CAPES externe
de Mathématiques
session 2004
seconde composition

Enoncé

http ://perso.wanadoo.fr/megamaths/

[0] [ag59e] v1.00

RAPPELS ET NOTATIONS

• $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ est la $\mathbb{R}$-algèbre des matrices à coefficients réels et à trois lignes et trois colonnes. Si A est une matrice de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$, on note $A[i,j]$ le coefficient de A dont l'indice de ligne est égal à i et l'indice de colonne est égal à j.

• $\mathcal{M}_3(\mathbb{Z})$ est le sous-anneau de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ des matrices dont les coefficients sont entiers.

1. Dans tout le problème, E est un espace vectoriel euclidien orienté de dimension 3.

Le produit scalaire de deux vecteurs u et v est noté $\langle u, v\rangle$. La norme euclidienne d'un vecteur v est notée $\|v\|$. La distance associée à cette norme est notée d.
Si u et v sont deux vecteurs de E ; on a, donc $d(u,v) = \|u - v\|$.
E est rapporté à une base $\mathcal{B}$ orthonormée directe.
On note S^2 la sphère unité de E :

$$S^2 = \{v \in E \,/\, \|v\| = 1\}.$$

On note Id_E l'application identique de E.
$\mathrm{O}(E)$ est le groupe des automorphismes orthogonaux de E.
Si f et g sont deux éléments de $\mathrm{O}(E)$, on note fg au lieu de $f \circ g$ l'automorphisme composé de g et de f.

On rappelle que :

• Le déterminant d'un automorphisme orthogonal est égal à 1 ou à -1.

• Les rotations vectorielles (ou plus simplement les rotations) sont les éléments de $\mathrm{O}(E)$ dont le déterminant est égal à 1. Leur ensemble noté $\mathrm{SO}(E)$ est un sous-groupe de $\mathrm{O}(E)$.

• D étant une droite vectorielle de E, on appelle demi-tour d'axe D la symétrie orthogonale par rapport à D ; il s'agit d'une rotation vectorielle.

• $\mathrm{SO}(3)$ est le groupe des matrices orthogonales de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ dont le déterminant est égal à 1. Rappelons que l'application qui à toute rotation de E associe la matrice qui la représente dans $\mathcal{B}$ est un isomorphisme de $\mathrm{SO}(E)$ sur $\mathrm{SO}(3)$.

2. Ensembles dénombrables

On rappelle que :

• Une réunion dénombrable d'ensembles dénombrables est dénombrable.

• L'image d'un ensemble dénombrable par une application est encore un ensemble dénombrable.

• Tout sous-ensemble d'un ensemble dénombrable est dénombrable.

3. Partitions

Soit A un ensemble non vide. On rappelle que la famille $(A_i)_{i\in I}$ de sous-ensembles de A constitue une partition de A si :

(i) Aucun des sous-ensembles A_i n'est vide.

(ii) $\bigcup_{i\in I} A_i = A$.

(iii) $\forall\,(i,j)\in I^2, \quad i\neq j \Rightarrow A_i\cap A_i=\varnothing$.

4. Groupes, sous-groupe engendré par une partie

• Etant donné un groupe $(G,.)$ dont la loi est notée multiplicativement, g étant un élément de G, l'application de G dans G : $h\rightarrow gh$ est bijective. Si H est un sous-ensemble de G, on note

$$gH=\{gh\,/\,h\in H\}\,.$$

• Etant donné un groupe $(G,.)$ dont la loi est notée multiplicativement et S un sous-ensemble de G, on appelle sous-groupe engendré par S le plus petit sous-groupe de G contenant S ; c'est l'intersection de tous les sous-groupes de G qui contiennent S.

5. Déplacements

On note $\mathrm{Dep}\,(E)$ l'ensemble des déplacements de E lorsque ce dernier est muni de sa structure canonique d'espace affine euclidien sur lui-même. On rappelle que $(\mathrm{Dep}\,(E)\,,\circ)$ est un groupe.

PRELIMINAIRES

Soit Ω un ensemble quelconque non vide. A et B étant deux sous-ensembles de Ω, on note $A\backslash B$ l'intersection de A et du complémentaire de B ; en d'autres termes :

$$A\backslash B=\{x\in\Omega\,/\,x\in A \text{ et } x\notin B\}\,.$$

$\mathfrak{S}\,(\Omega)$ désigne le groupe des bijections de Ω sur lui-même.
Soit f appartenant à $\mathfrak{S}\,(\Omega)$; si A est un sous-ensemble de Ω, on note $f(A)$ le sous-ensemble de Ω dont les éléments sont les images des éléments de A :

$$f(A)=\{y\in\Omega\,/\,\exists x\in A \quad y=f\,(x)\}\,.$$

On rappelle que :

(i) $f(A)=\emptyset$ si et seulement si $A=\emptyset$.

(ii) Si A et B sont deux sous-ensembles de Ω,

$$A\subset B\Leftrightarrow f\,(A)\subset f\,(B)\,.$$

(iii) Si $(A_i)_{i\in I}$ est une famille quelconque de sous-ensembles de Ω indexée par l'ensemble I, on a :

$$f(\bigcup_{i\in I} A_i) = \bigcup_{i\in I} f(A_i).$$

(iv) Si $(A_i)_{i\in I}$ est une famille quelconque de sous-ensembles de Ω indexée par l'ensemble I, on a :

$$f(\bigcap_{i\in I} A_i) = \bigcap_{i\in I} f(A_i).$$

(v) Si A et B sont deux sous-ensembles de Ω, on a :

$$f(A\backslash B) = f(A)\backslash f(B).$$

1. Démontrer les propriétés (iv) et (v).

2. Prouver ensuite que $(A_i)_{i\in I}$ est une partition de Ω si et seulement si $(f(A_i))_{i\in I}$ est une partition de Ω.

PARTIE I : QUELQUES PROPRIETES DES ROTATIONS DE L'ESPACE

1. Soient ρ_1 et ρ_2 deux rotations vectorielles de E.

a) On suppose que ρ_1 et ρ_2 ont le même axe. Prouver que $\rho_2\rho_1 = \rho_1\rho_2$.

b) On suppose que ρ_1 et ρ_2 sont deux demi-tours d'axes respectifs D_1 et D_2 orthogonaux. Prouver que $\rho_2\rho_1 = \rho_1\rho_2$ et déterminer cette rotation.

2. Réciproque :
Soit ρ une rotation vectorielle distincte de Id_E, d'axe $D = r\omega$ où $\|\omega\| = 1$.

a) Soit Δ une droite vectorielle distincte de D et telle que $\rho(\Delta) = \Delta$. Prouver que D et Δ sont orthogonales et que ρ est un demi-tour.

b) Soient ρ_1 et ρ_2 deux rotations vectorielles distinctes de Id_E dont les axes respectifs D_1 et D_2 sont distincts. Montrer que si $\rho_2\rho_1 = \rho_1\rho_2$, alors D_1 est une droite invariante par ρ_2. En déduire que ρ_1 et ρ_2 sont deux demi-tours dont les axes sont orthogonaux.

c) Conclure en donnant une condition nécessaire et suffisante pour que deux éléments ρ_1, ρ_2 de $\mathrm{SO}(E)$ commutent (c'est-à-dire $\rho_2\rho_1 = \rho_1\rho_2$).

Soient ρ_1 *et* ρ_2 *deux rotations vectorielles de* E *et* $\mathbf{G}$ *le sous-groupe de* $\mathrm{SO}(E)$ *engendré par* ρ_1 *et* ρ_2*.*

3. On suppose que ρ_1 et ρ_2 sont les rotations d'angles respectifs α_1, α_2 autour de la droite D dirigée et orientée par le vecteur unitaire ω.

a) On note $\mathbf{H} = \left\{\rho_1^{n_1}\rho_2^{n_2} \ / \ (n_1, n_2) \in \mathbb{Z}^2\right\}$. Montrer que $\mathbf{H}$ est un sous-groupe de $\mathrm{SO}\,(E)$ et, que $\mathbf{H} = \mathbf{G}$.

b) On suppose de plus que l'égalité

$$x\alpha_1 + y\alpha_2 + z\pi = 0$$

où x, y, z sont des entiers relatifs n'est possible que si $x = y = z = 0$. Démontrer que pour tout $r \in \mathbf{G}$, il existe un unique couple $(n_1, n_2) \in \mathbb{Z}^2$ tel que $r = \rho_1^{n_1}\rho_2^{n_2}$.

4. On suppose que ρ_1 et ρ_2 sont deux demi-tours dont les axes sont orthogonaux. Démontrer que $\mathbf{G}$ contient exactement quatre éléments que l'on explicitera. On donnera la table du groupe de $\mathbf{G}$.

5. On suppose que ρ_1 et ρ_2 ne commutent pas. On note $\mathbf{H}$ le sous-ensemble de $\mathrm{SO}\,(E)$ formé des éléments de la forme $s_1^{a_1}s_2^{a2}...s_n^{a_n}$, où $n \in \mathbb{N}^*$, $(s_1, ..., s_n) \in \{\rho_1, \rho_2\}^n$, $(a_1, ..., a_n) \in \mathbb{Z}^n$.

a) Démontrer que $\mathbf{H}$ est un sous-groupe de $\mathrm{SO}\,(E)$ et que $\mathbf{H} = \mathbf{G}$.

b) Soit $g \in \mathbf{G}\backslash\{Id_E\}$. Démontrer qu'il existe un entier $n \in \mathbb{N}^*$, une famille $(s_1, ..., s_n)$ appartenant à $\{\rho_1, \rho_2\}^n$, une famille $(a_1, ..., a_n)$ appartenant à $\mathbb{Z}^{*n}$ tels que :

$$g = s_1^{a_1}s_2^{a2}...s_n^{a_n} \quad \text{et} \quad \forall i \in [1, n[, \ s_i \neq s_{i+1}. \qquad (1)$$

Cette décomposition n'est en général pas unique (si ρ_1 est un demi-tour, alors $\rho_1 = \rho_1^3$). Dans la partie suivante on construit un exemple où cette fois la décomposition sera unique.

PARTIE II : ETUDE D'UN SOUS-GROUPE DE SO (3)

On pose dans ce qui suit $\alpha = \arccos\left(\frac{3}{5}\right)$.

I_3, R et T sont les matrices de $\mathrm{SO}\,(3)$ définies par :

$$I_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \ R = \begin{pmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha & 0 \\ \sin\alpha & \cos\alpha & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \ T = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\alpha & -\sin\alpha \\ 0 & \sin\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix}.$$

ρ et τ sont les rotations de E de matrices respectives R, T dans la base $\mathcal{B}$.

$\mathbb{G}$ est le sous-groupe de $\mathrm{SO}\,(3)$ engendré par $\{R, T\}$. $\mathbf{G}$ est le sous-groupe de $\mathrm{SO}\,(E)$ engendré par $\{\rho, \tau\}$. Il est manifestement isomorphe à $\mathbb{G}$.

On rappelle que la relation $p \equiv q \bmod 5$ où p et q sont des entiers relatifs, signifie que 5 divise $q - p$.

1. Pour tout entier relatif n, on pose $a_n = 5^{|n|}\cos(n\alpha)$ et $b_n = 5^{|n|}\sin(n\alpha)$.

a) Factoriser $\cos(n+1)\alpha + \cos(n-1)\alpha$. En déduire que pour tout entier n supérieur ou égal à 1 : $a_{n+1} = 6a_n - 25a_{n-1}$.

b) Prouver que pour tout entier n supérieur ou égal à zéro :

$$b_{n+1} = 3b_n + 4a_n.$$

c) Prouver que pour tout entier relatif n, a_n et b_n sont des entiers relatifs.

d) Montrer que si n est différent de zéro, alors $a_n \equiv 3 \bmod 5$.

e) Montrer que si n est un entier strictement positif, alors $b_n \equiv 4 \bmod 5$. Montrer que si n est un entier strictement négatif, alors $b_n \equiv 1 \bmod 5$.

2. On note $\equiv$ la relation définie sur $\mathcal{M}_3(\mathbb{Z})$ par $M \equiv M'$ si et seulement si pour tout couple (i,j) de $[1,3]^2$, on a :

$$M[i,j] \equiv M'[i,j] \bmod 5.$$

On vérifie aisément qu'il s'agit là d'une relation d'équivalence sur $\mathcal{M}_3(\mathbb{Z})$. On ne demande pas de démontrer ce résultat.

a) Démontrer que cette relation est compatible avec le produit matriciel, c'est-à-dire si A, B, C, D sont des éléments de $\mathcal{M}_3(\mathbb{Z})$ tels que $A \equiv B$ et $C \equiv D$, alors $AC \equiv BD$.

b) Démontrer que pour tout entier k, $5^{|k|}R^k$ et $5^{|k|}T^k$ appartiennent à $\mathcal{M}_3(\mathbb{Z})$ et que

$$\forall k \in \mathbb{Z}^* \quad 5^{|k|}R^k \equiv \begin{pmatrix} 3 & \varepsilon_k & 0 \\ -\varepsilon_k & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad 5^{|k|}T^k \equiv \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & \varepsilon_k \\ 0 & -\varepsilon_k & 3 \end{pmatrix}$$

où $\varepsilon_k = 1$ si $k > 0$ et $\varepsilon_k = -1$ si $k < 0$. Existe-t-il un entier relatif k différent de 0, tel que $R^k = I_3$ ou $T^k = I_3$?

c) Démontrer que

$$\forall (m,n) \in \mathbb{Z}^{*2} \quad 5^{|m|+|n|}T^m R^n \equiv \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 2\varepsilon_n & 4 & 0 \\ \varepsilon_n\varepsilon_m & 2\varepsilon_m & 0 \end{pmatrix}.$$

d) Soient $(a_1, ..., a_n)$, $(b_1, ..., b_n)$ appartenant à $\mathbb{Z}^{*n}$ et β appartenant à $\mathbb{Z}^*$. On pose $q = \sum_{i=1}^{n} (|a_i| + |b_i|)$. Démontrer que

$$5^q T^{a_1} R^{b_1} ... T^{a_n} R^{b_n} \equiv \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ a & b & 0 \\ c & d & 0 \end{pmatrix}$$

où a, b, c, d sont des entiers relatifs qui ne sont pas congrus à 0 modulo 5.

e) En déduire que

$$\begin{aligned} T^{a_1}R^{b_1}...T^{a_n}R^{b_n} &\neq I_3 \qquad (2) \\ T^{a_1}R^{b_1}...T^{a_n}R^{b_n}T^{\beta} &\neq I_3 \qquad (3) \end{aligned}$$

3. Soient $(a_1, ..., a_n)$, $(b_1, ..., b_n)$ appartenant à $\mathbb{Z}^{*n}$ et β appartenant à $\mathbb{Z}^*$. Déduire des égalités précédentes que

$$\begin{aligned} R^{a_1}T^{b_n}...R^{a_n}T^{b_n} &\neq I_3 \qquad (4) \\ R^{a_1}T^{b_n}...R^{a_n}T^{b_n}R^{\beta} &\neq I_3 \qquad (5) \end{aligned}$$

4. Conclure que pour tout g appartenant à $\mathbf{G}\backslash\{Id_E\}$, il existe de *façon unique* un entier n strictement positif, une famille $(s_1, s_2, ..., s_n)$ de $\{\rho, \tau\}^n$ et une famille $(a_1, a_2, ..., a_n)$ de $\mathbb{Z}^{*n}$ tels que :

$$g = s_1^{a_1} s_2^{a_2} ... s_n^{a_n} \quad \text{et} \quad \forall i \in [1, n-1]\,,\ s_i \neq s_{i+1}.$$

On appelle terme de tête de g l'élément s_1 lorsque $a_1 > 0$ et s_1^{-1} lorsque $a_1 < 0$. Ce terme de tête sera noté $t(g)$.

5. Démontrer que $\mathbf{G}$ est un ensemble dénombrable.

6. Pour tout élément σ de $\{\rho, \rho^{-1}, \tau, \tau^{-1}\}$, on note $L(\sigma)$ l'ensemble des éléments g de $\mathbf{G}\backslash\{Id_E$ pour lesquels $t(g) = \sigma$.

a) Vérifier que $\mathbf{G} = \{Id_E\} \cup L(\rho) \cup L(\rho^{-1}) \cup L(\tau) \cup L(\tau^{-1})$ et que l'obtient ainsi une partition de $\mathbf{G}$.

b) Vérifier que $L(\rho) = \{\rho\} \cup \rho L(\rho) \cup \rho L(\tau) \cup \rho L(\tau^{-1})$ et que l'obtient ainsi une partition de $L(\rho)$.

De la même manière on a

$$\begin{aligned} &L(\rho^{-1}) = \{\rho^{-1}\} \cup \rho^{-1}L(\rho^{-1}) \cup \rho^{-1}L(\tau) \cup \rho^{-1}L(\tau^{-1}) \\ &L(\tau) = \{\tau\} \cup \tau L(\tau) \cup \tau L(\rho) \cup \tau L(\rho^{-1}) \\ &L(\tau^{-1}) = \{\tau^{-1}\} \cup \tau^{-1}L(\tau^{-1}) \cup \tau^{-1}L(\rho) \cup \tau^{-1}L(\rho^{-1})\,. \end{aligned}$$

On ne demande pas de démontrer ces trois égalités.

c) En déduire que $\mathbf{G} = L(\rho) \cup \rho L(\rho^{-1}) = L(\tau) \cup \tau L(\tau^{-1})$ et que, dans les deux cas, on obtient ainsi une partition de $\mathbf{G}$.

PARTIE III : ETUDE DE SOUS-ENSEMBLES DE S^2

Les données et les notations de cette partie sont celles de la Partie II. $\mathbf{G}$ est le sous-groupe de $\mathrm{SO}(E)$ engendré par $\{\rho, \tau\}$. On considère l'ensemble

$$F = \left\{v \in S^2 \,/\, \exists g \in \mathbf{G} \backslash \{Id_E\} \quad g(v) = v\right\}$$

et son complémentaire dans S^2, soit $X = S^2 \backslash F$.

1. Démontrer que l'ensemble F est un sous-ensemble dénombrable de S^2. En déduire que X n'est pas vide.

2. Vérifier que pour tout $g \in \mathbf{G}$ et pour tout $v \in X$, $g(v) \in X$.

3. Démontrer que si g et h sont deux éléments de $\mathbf{G}$ tels qu'il existe v appartenant à X vérifiant $g(v) = h(v)$, alors $g = h$.

4. a) Démontrer que pour tout g appartenant à $\mathbf{G}$, la restriction de g à X induit une bijection de X sur lui-même que l'on notera g_X.

b) Démontrer que l'application

$$\begin{array}{ccc} \mathbf{G} & \to & \mathfrak{S}(X) \\ g & \mapsto & g_X \end{array}$$

est un homomorphisme injectif de groupes. Cela permet d'identifier $\mathbf{G}$ à un sous-groupe de $\mathfrak{S}(X)$.

5. On considère la relation $\sim_{\mathbf{G}}$ définie sur X par

$$a \sim_{\mathbf{G}} b \;\Leftrightarrow\; \exists g \in \mathbf{G} \quad a = g(b)\,.$$

Prouver qu'il s'agit d'une relation d'équivalence.

On sait que les classes d'équivalence de $\sim_{\mathbf{G}}$ forment une partition de X. On admet alors en utilisant l'axiome du choix l'existence d'un sous-ensemble M de X dont l'intersection avec chaque classe d'équivalence contient un et un seul point.

6. Prouver que la famille $(g(M))_{g \in \mathbf{G}}$ constitue une partition de X.

7. On pose

$$\begin{aligned} X_0 &= M, \quad X_1 = \bigcup_{g \in L(\rho)} g(M)\,, \quad X_2 = \bigcup_{g \in L(\tau)} g(M)\,, \\ X_3 &= \bigcup_{g \in L(\rho^{-1})} g(M)\,, \quad X_4 = \bigcup_{g \in L(\tau^{-1})} g(M)\,. \end{aligned}$$

a) Prouver que $(X_0, X_1, X_2, X_3, X_4)$ constitue une partition de X.

b) Prouver que

$$\begin{aligned} X &= X_1 \cup \rho(X_3) \text{ et } X_1 \cap \rho(X_3) = \varnothing \qquad (6) \\ X &= X_2 \cup \tau(X_4) \text{ et } X_2 \cap \tau(X_4) = \varnothing \qquad (7) \end{aligned}$$

8. On note $\Lambda = \{(u, v) \in F \times F \,/\, u \neq v\}$.

a) Vérifier que Λ est un ensemble dénombrable.

b) Si $(u, v) \in \Lambda$, on considère $\Gamma_{u,v} = \left\{w \in S^2 \,/\, \|w - u\| = \|w - v\|\right\}$. Quelle est la nature géométrique de cet ensemble ?

c) Soit $\Gamma = \bigcup_{(u,v)\in\Lambda} \Gamma_{u,v}$. Démontrer que $\Gamma \cup F$ est symétrique par rapport à l'origine et que $\Gamma \cup F$ est strictement inclus dans S^2. Indication : on pourra considérer l'intersection de $\Gamma \cup F$ avec un cercle tracé sur S^2 qui ne soit pas centré à l'origine.

d) Démontrer qu'il existe un élément r de $\mathrm{SO}(E)$ dont l'axe ne rencontre pas $\Gamma \cup F$ et tel que

$$\forall p \in \mathbb{Z}^* \quad r^p \neq Id_E.$$

e) Soit (u, v) appartenant à $F \times F$. Montrer que pour tout entier k strictement positif, $r^k(u)$ est différent de v. On distinguera les cas : $u = v$ et $u \neq v$. En déduire que si m et n sont deux entiers naturels distincts, alors

$$r^n(F) \cap r^m(F) = \varnothing.$$

f) On pose

$$Y = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} r^n(F) \quad \text{et} \quad Z = S^2 \backslash Y.$$

g) Démontrer que

$$r(Y) \cap Z = \varnothing \quad \text{et} \quad S^2 \backslash F = r(Y) \cup Z.$$

PARTIE IV : EQUIDECOMPOSABILITE

Soient A et B deux parties non vides de E. On dit que A est équidécomposable à B s'il existe une partition finie $(A_i)_{i\in I}$ de A, une partition finie $(B_i)_{i\in I}$ de B et une famille finie $(g_i)_{i\in I}$, de déplacements de E telles que

$$\forall i \in I \quad B_i = g_i(A_i)$$

(les trois familles sont indexées par un même ensemble fini I). On écrira alors $A \sim B$.

1. Les notations étant celles de la question III. 8, vérifier que S^2 est équidécomposable à $S^2 \backslash F$.

2. Soient A_1, A_2, B_1, B_2 des sous-ensembles non vides de E tels que :

$$A_1 \cap A_2 = B_1 \cap B_2 = \varnothing, \quad A_1 \sim B_1, \quad A_2 \sim B_2.$$

a) Vérifier que $A_1 \cup A_2 \sim B_1 \cup B_2$.

b) Généraliser.

3. Démontrer que la relation $\sim$ est une relation d'équivalence sur l'ensemble des parties non vides de E. Pour démontrer la transitivité, on observera que si $(A_i)_{i \in I}$ et $(A'_j)_{j \in J}$ sont deux partitions de A, et que si l'on pose

$$K = \{(i, j) \in I \times J \,/\, A_i \cap A'_j \neq \varnothing\}$$

alors la famille $(A_i \cap A'_j)_{(i,j) \in K}$ est encore une partition de A.

4. On suppose que $A \sim B$. Démontrer qu'il existe une bijection ψ de A sur B telle que pour tout sous-ensemble non vide C de A, on ait : $C \sim \psi(C)$.

Soient A et B deux sous-ensembles non vides de E, On posera $A \preccurlyeq B$ lorsqu'il existe un sous-ensemble non vide B' de B tel que $A \sim B'$. En particulier, si $A \sim B$, alors $A \preccurlyeq B$.

La relation $\preccurlyeq$ est une relation réflexive et transitive sur l'ensemble des parties non vides de E. Les preuves sont analogues à celles des questions précédentes. On observera par ailleurs que si A et B sont des sous-ensembles non vides de X tels que $A \subset B$, il est évident que $A \preccurlyeq B$.

On admettra dans la suite du problème le théorème de Banach-Schröder-Bernstein, qui s'énonce de la manière suivante :

Si A et B sont deux sous-ensembles non vides de E tels que $A \preccurlyeq B$ et $B \preccurlyeq A$, alors $A \sim B$.

PARTIE V : ENSEMBLES PARADOXAUX

Les définitions et les notations sont les mêmes que dans la partie précédente. Un sous-ensemble A de E est paradoxal s'il existe deux sous-ensembles non vides B, C de A tels que

$$B \sim A, \quad C \sim A \quad \text{et} \quad B \cap C = \varnothing. \qquad (8)$$

1. Les notations étant celles de la partie III, vérifier que X est paradoxal.

2. Soient A et B deux sous-ensembles non vides de E tels que $A \sim B$. Démontrer que si A est paradoxal, alors il en est de même de B. On pourra utiliser le résultat de la question 4 de la partie IV.

3. Soit A un sous-ensemble paradoxal de E, B, C deux sous-ensembles de A non vides vérifiant les relations (8).

a) En utilisant le théorème de Banach-Schröder-Bernstein, démontrer que $(A \backslash C) \sim A$.

b) En déduire qu'il existe une partition (A_1, A_2) de A telle que :

$$A_1 \sim A \quad \text{et} \quad A_2 \sim A.$$

4. Démontrer que S^2 est paradoxal.

5. En déduire que si Σ_1 et Σ_2 sont deux sphères disjointes de rayon 1, alors

$$S^2 \sim (\Sigma_1 \cup \Sigma_2)\,.$$