Relation des sinus

En utilisant le théorème de l'arc capable, montrer que dans un triangle ABC (non aplati), on a :

$$\frac{a}{sinA} = \frac{b}{sinB} = \frac{c}{sinC} = 2R$$

où $a = BC, b = CA, c = AB,\ R =$ le rayon du cercle circonscrit et A, B, C les angles géométriques du triangle ABC.

Caractérisation des quadrilatères convexes inscriptibles

Montrer qu'une condition nécessire et suffisante pour qu' un quadrilatère (non aplati) $ABCD$ soit convexe et inscriptible (dans un cercle) est

$$(\widehat{\overrightarrow{CA}, \overrightarrow{CB}}) = (\widehat{\overrightarrow{DA}, \overrightarrow{DB}}) + \pi \bmod (2\pi).$$

LeThéorème des trois cercles :

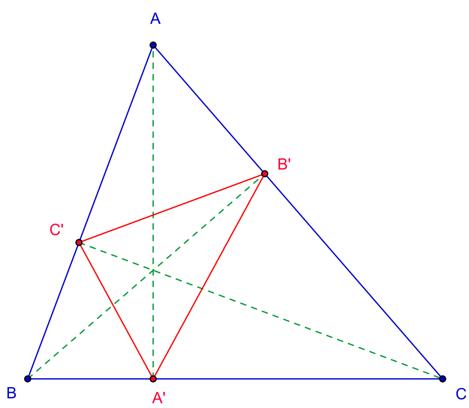
Soient trois cercles (C1), (C2), (C3) se rencontrant en un point O, on appelle M, N et P les autres points d'intersection des cercles (C1) et (C2), (C2) et (C3), (C3) et (C1). Soit A un point de (C1) tel que la droite (MA) recoupe (C2) en B et la droite (PA) recoupe (C3) en C.
Montrer que les points B, N et C sont alignés.
Montrer réciproquement que si ABC est un triangle, et si M, N et P sont trois points situés respectivement sur (AB), (BC) et (CA) , les cercles circonscrits aux triangles (AMP), (BMN) et (CNP) se rencontrent en un point O.

Le point de Miquel(Auguste Miquel 1838)

Soit $ABCDEF$ un quadrilatère complet ($ABCD$ convexe, $E = (AB) \cap (CD)$, $F = (BC) \cap (AD)$).
Montrer que les quatre cercles circonscrits aux triangles ADE, ABF, BCE, CDF ont un point en commun.
Ce point s'appelle le *Point de Miquel* du quadrilatére complet.

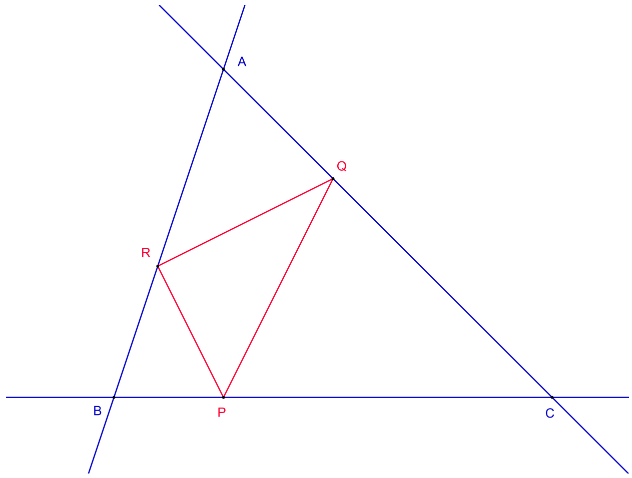
Le triangle orthique

Soit ABC un triangle du plan affine euclidien et A', B', C' les pieds des hauteurs.
Montrer que les côtés du triangle ABC sont des bissectrices du triangle $A'B'C'$.

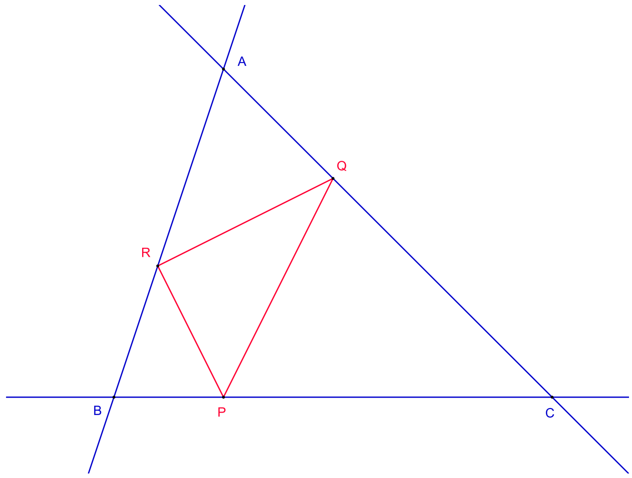


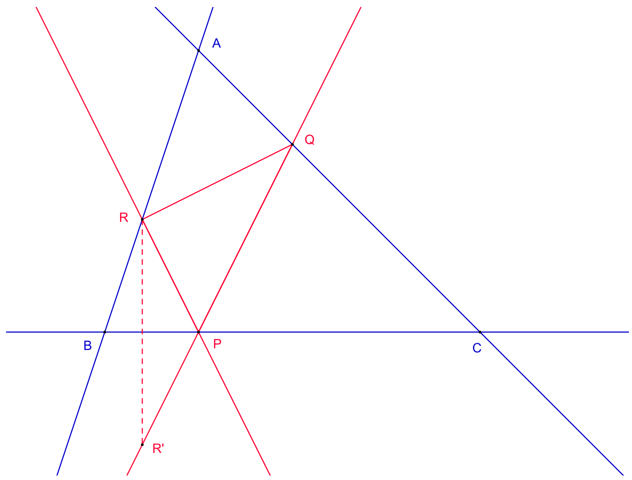
Le problème de Fagnano

Soit ABC un triangle du plan affine euclidien dont tous les angles sont aigus et P, Q, R trois points appartenant respectivement aux côtés BC, CA et AB du triangle et distincts de ses sommets tels que la somme $PQ + QR + RP$ soit minimale. On se propose de montrer que les côtés du triangle ABC sont les bissectrices extérieures du triangle PQR.

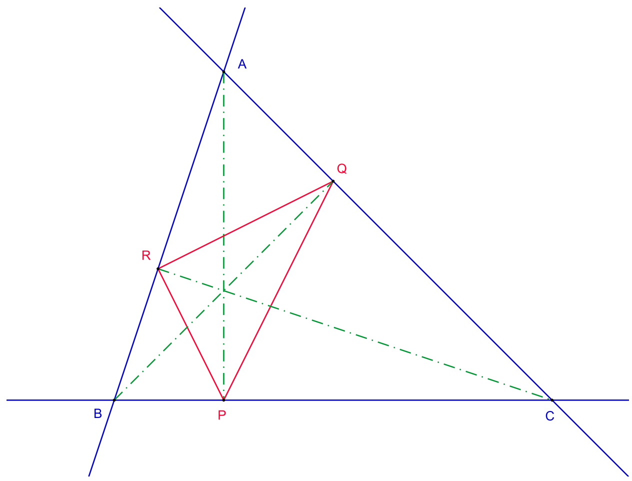


1) Pour Q et R fixés, déterminer le point P qui minimise $PQ + PR$

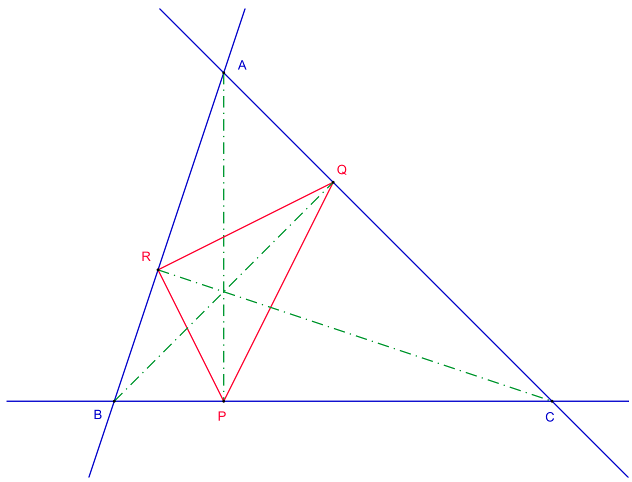


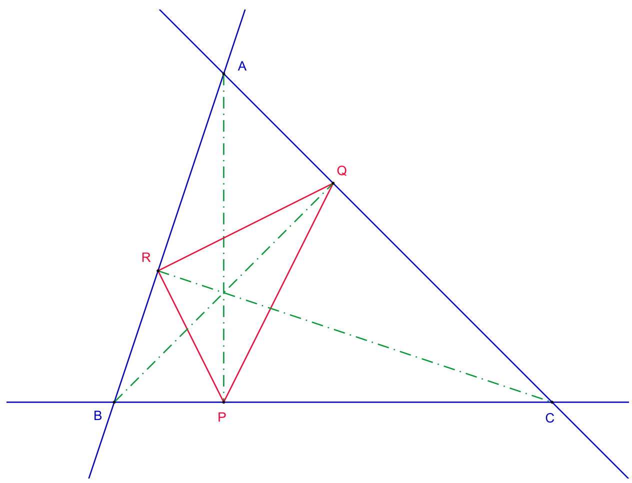


2) En déduire que les points P, Q, R sont les pieds des hauteurs du triangle ABC.

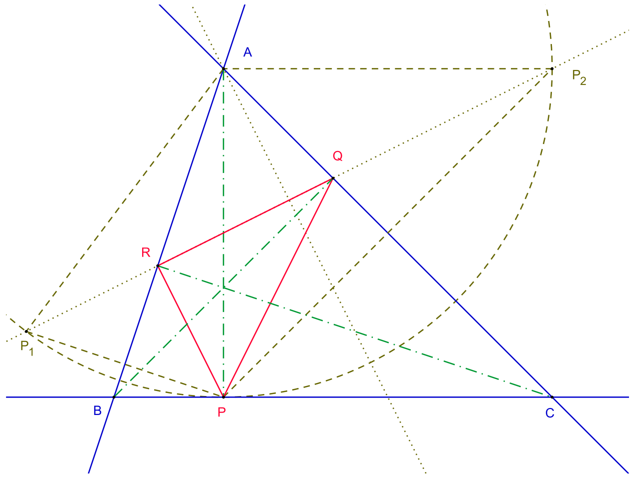


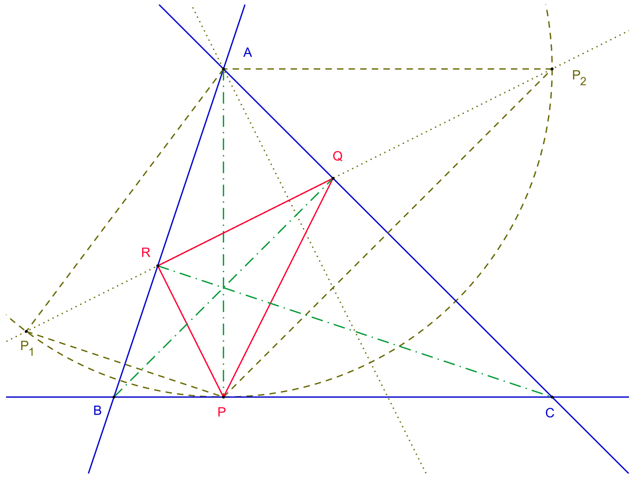
3) Déterminer l'image de la droite PR par la composée $f = s_{AB} \circ s_{CA} \circ s_{BC}$ des réflexions d'axes BC, CA et AB. Quelle est la nature géométrique de f ?



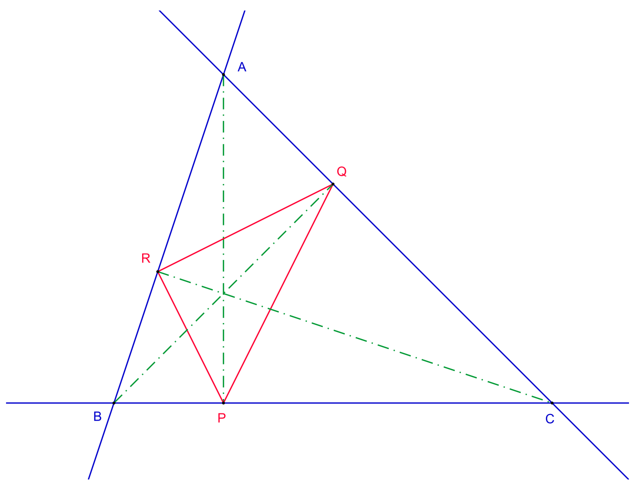


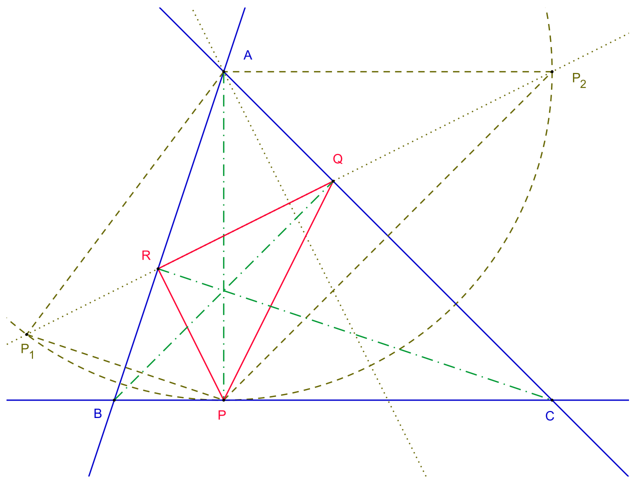
4) Soit P, Q, R les pieds des hauteurs issues de A, B, C dans le triangle ABC, P_1 et P_2 les symétriques de P par rapport à AB et AC. Montrer que les points P_1, R, Q et P_2 sont alignés et que le périmètre du triangle PQR est égal à P_1P_2. Exprimer ce périmètre en fonction de AP et de l'angle en A du triangle ABC.





5) En déduire que le triangle orthique PQR est le triangle de périmètre minimal inscrit dans le triangle ABC.





Remarque :
Le triangle PQR est donc à la fois le triangle de périmètre minimal inscrit dans le triangle ABC et le seul triangle de lumière (ou trajectoire de billard) contenu dans ce triangle. Si l'un des angles du triangle ABC est obtus, il n'existe pas de trajectoire de lumière dans le triangle ABC et le triangle de périmètre minimal est aplati : c'est le triangle APA si l'angle en A du triangle ABC est obtus.