PRÉPARATION DE L'AGREGATION INTERNE MATHS 2005-2006 COMPLÉMENTS D'ALGÈBRE BILINÉAIRE, ETC...

EMMANUEL FERRAND

1. Algèbre bilinéaire en dimension finie.

1.1. Ceci est un plan abrégé. Vous devez savoir donner un sens à tous les termes et mots-clés évoqués en vrac ci-dessous.

1.2. **Définitions générales.**

1.2.1. Formes bilinéaires symétriques, formes quadratiques, formes non-dégénérées, formes définies positives, matrice associée, formule de changement de base, espace euclidien, formes hermitiennes, endomorphisme adjoint, vecteurs isotropes, signature, etc...

1.2.2. Liens avec la dualité: une forme non dégénérée induit un isomorphisme de E sur E^*. Orthogonalité: Bases orthogonales, orthonormées, orthogonal d'un sous-espace.

1.3. **Gauss.**

1.3.1. Algorithme de Gauss pour trouver des bases orthogonales. Classification des formes quadratiques.

1.4. **Espaces euclidiens.**

1.4.1. Produit scalaire, endomorphisme adjoint, auto-adjoint, isométries, matrices unitaires, inégalité de Cauchy-Schwartz, $< M, N >= tr(^tMN)$ est un produit scalaire sur l'espace des matrices réelles.

1.4.2. Procédé d'orthogonalisation de Schmidt.

1.4.3. Théorème de Pythagore. Projection orthogonale, formule explicite de la projection sur un sous-espace dont on connaît une base orthonormée, ainsi que de la symétrie associée.

1.4.4. *Exercice.* Matrice de Gram associée à n vecteurs d'un espace euclidien, distance à un sous-espace, volume des parallélépipèdes. Méthode des moindres carrés. Approximation d'un nuage de points par une droite.

1.5. **Théorème spectral.**

1.5.1. Toute matrice auto-adjointe se diagonalise dans une base orthonormée.

1.5.2. Soit A et B deux matrices hermitiennes. On suppose $A > 0$. Il existe une matrice P telle que $A =^t PP$ et $B =^t PDP$, avec D diagonale.

1.5.3. Axes principaux des coniques et des surfaces quadriques.

Date: Mercredi 18 janvier 2006.

1.5.4. *Exercice.* Soit $p \in \mathbb{N}$, si f autoadjoint et $f \geq 0$, on peut définir la racine $p-$iemme de f: il existe un unique g auto-adjoint positif tel que $f = g^p$.

1.6. **Quelques exercices.**

1.6.1. Soit E un espace vectoriel de dimension deux sur $\mathbb{R}$. Soit $q : \mathcal{L}(E) \to \mathbb{R}$ définie par $q(u) = det(u)$.
a. Exprimer $q(u)$ en fonction de la trace de u et de celle de u^2.
b. Montrer que q est une forme quadratique, définir sa forme polaire ϕ associée.
c. La forme ϕ est-elle dégénérée, quelle est sa signature?

1.6.2. Soit q une forme quadratique sur $M_2(\mathbb{R})$ telle que $q(AB) = q(A)q(B)$. Déterminer quelles sont les matrices isotropes pour q. Expliciter la matrice de la forme polaire de q dans la base canonique. Exprimer q en fonction du déterminant.

1.6.3. Soit f une forme bilinéaire symétrique non-dégénérée sur un espace vectoriel E de dimension finie. Soit q la forme quadratique associée. Montrer que l'ensemble $\{u \in \mathcal{L}(E), q \circ u = q\}$ des applications linéaires qui laissent q invariante est un groupe.

1.6.4. Décomposition QR d'une matrice inversible (Q orthogonale, R triangulaire supérieure). Inégalité de Hadamard. Décomposition de $S = L^tL$ de Cholesky, pour S symétrique définie positive.

1.6.5. Soit E un espace vectoriel sur $\mathbb{C}$ hermitien. Un endomorphisme u est dit *normal* ssi u et u^* commutent.
a. Déterminer tous les endomorphismes normaux dans le cas $E = \mathbb{C}^2$. Donner des exemples classiques d'endomorphismes normaux.
b. Montrer que u est normal ssi, $\forall (x, y) \in E^2, < u(x), u(y) >=< u^*(x), u^*(y) >$.
c. Montrer que si u est normal, alors u et u^* ont les mêmes valeurs propres, et que les espaces propres de u sont deux à deux orthogonaux.
d. Montrer que si un sous espace F est stable par une application linéaire f, alors sont orthogonal $F^\perp$ est stable par f^*.
e. Montrer qu'un endomorphisme est normal si et seulement si il existe une base orthonormée de vecteurs propres.

1.6.6. Soit E un espace hermitien de dimension r, u un endomorphisme hermitien dont les valeurs propres sont strictement positives et distinctes. Soit x_0 un vecteur non-nul de E. Soit x_n la suite définie par $x_n = u^n(x_0)$. On pose $y_n = x_n/||x_n||$, et $\rho_n =< y_n|u(y_n) >$. Déterminer les limites des suites x, y et ρ.

1.6.7. *Paramétrisation de Cayley.* Soit u un endomorphisme unitaire d'un espace hermitien de dimension finie. On suppose que 1 n'est pas valeur propre de u. Montrer que $(u - e)$ est inversible et que $a = -i(u + e)(u - e)^{-1}$ est hermitienne. Réciproquement, associer une matrice unitaire à chaque matrice hermitienne. Dessin en dimension 1.

1.6.8. *Polynômes de Laguerre.* Etant donné deux polynômes réels P et Q, on pose $< P, Q >= \int_0^\infty e^{-x}P(x)Q(x)dx$. Montrer que cela induit un produit scalaire sur l'espace des polynômes réels. Schmidter la base canonique (exprimer le résultat en fonction de $e^x \frac{d^n}{dx^n}(e^{-x}x^n)$).

Institut Fourier, BP 74, 38402 St Martin d'Hères Cedex, France.
E-mail address: emmanuel.ferrand@ujf-grenoble.fr