PLAN DU COURS D'ALGÈBRE POUR LA PRÉPARATION À L'AGRÉGATION INTERNE (AVEC QUELQUES ENNONCÉS D'EXERCICES CLASSIQUES).

EMMANUEL FERRAND

Abstract. Ces notes ne constituent en aucun cas un cours d'algèbre linéaire. Tout au plus pouvez-vous les considérer comme un pense-bête, une check-list de notions à connaître, agrémentée d'une liste d'exercices. Certain énoncés d'exercices sont complets. Les autres sont standards et se trouvent dans tous les bouquins. Certains exercices sont originaux et/ou peuvent illustrer des leçons d'oral.

1. Algèbre Linéaire I.

1.1. **Définitions générales.**

1.1.1. Espaces vectoriels: exemples classiques, dont des espaces de fonctions, l'espace des polynômes.

1.1.2. Notions de famille libre, famille génératrice, base.

1.1.3. Sous espace vectoriel.

1.1.4. Application linéaire, noyau, image.

1.2. **En dimension finie.**

1.2.1. Toutes les bases ont même cardinal.

1.2.2. Famille incomplète.

1.2.3. $dim(E_1 + E_2) = dim(E_1) + dim(E_2) - dim(E_1 \cap E_2)$.

1.2.4. Somme directe, supplémentaires.

1.2.5. Projections: $(p^2 = p) \Rightarrow Ker(p) \bigoplus Im(p)$.

1.2.6. Formule du rang

1.3. **Dualité.**

1.3.1. Hyperplans

1.3.2. Bases duales

1.3.3. Bidual

1.3.4. Polynômes de Lagrange

1.4. **Exercices.**

Date: Juin 2005.

1.4.1. Soit $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ l'application définie par $f(z) = az + b\bar{z}$. Expliquer pourquoi on peut considérer f comme un endomorphsime de $\mathbb{R}^2$, déterminer son noyau et son image.

1.4.2. Soit F un sous-espace vectoriel d'un espace vectoriel E de dimension finie. Soit $\check{F}$ l'ensemble des formes linéaires nulles sur F. Montrer que $\check{F}$ est un sous-espace vectoriel de E^* et calculer sa dimension.

1.4.3. Dans l'espace vectoriel $\mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}, \mathbb{R})$, on considère la famille de fonctions $f_n(x) = (sin(x))^n$. Cette famille est-elle libre?

1.4.4. Soit $E = \mathbb{R}_n[X]$. Soit P $\in E$ et F l'ensemble des multiples de P. Montrer que F est un sous-espace vectoriel de E, et calculer sa dimension. On suppose $n > 6$ et $P(X) = (X-1)^2(X-2)^3(X-3)$. Donner une base de $\check{F}$.

1.5. **Matrices.** Pour toute application linéaire ϕ, il existe un choix de bases de l'espace de départ et de l'espace d'arrivée, tel que la matrice de ϕ dans ces bases est de la forme:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \end{pmatrix}$$

Autrement dit, deux matrices de $\mathcal{M}_{n,m}(\mathbb{C})$ sont *équivalentes* si et seulement si elles ont même rang.

1.6. **Exercices.**

1.6.1. Transposée d'une application, matrice de la transposée.

1.6.2. a) Soit M la matrice de coefficient $M_{i,j} = \binom{i-1}{j-1}$. Calculer M^{-1}, et $M^k, k \in \mathbb{Z}$.
b) Soit A la matrice carrée de taille n dont tous les coefficients sont égaux à 1. Calculer $A^k, k \in \mathbb{N}$.

1.6.3. Soit $P_l(X) = (X)(X-1)(X-2)\dots(X-l+1)/l!,\ l = 0, \dots, n$. Soit $R \in \mathbb{R}_n[X]$ tel que $R(\mathbb{Z}) \subset \mathbb{Z}$. Montrer qu'il existe $a_0, \dots, a_n \in \mathbb{Z}$ tel que $R = \sum_{l=0}^{n} a_l P_l(X)$. Déterminer la base duale de la famille $P_l, l = 0, \dots, n$.

1.6.4. Soit A un endomorphisme nilpotent d'un espace vectoriel E. Montrer que $Id + A$ est inversible.

1.7. **Applications linéaires d'un espace dans lui même.**

1.7.1. Caractérisation des isomorphismes.

1.7.2. Algèbre $\mathcal{L}(E, E)$.

1.7.3. Valeurs propres, vecteurs propres.

1.7.4. Polynômes et applications linéaires.

1.7.5. Bezout pour les polynômes, lemme des noyaux.

1.7.6. Polynôme minimal.

2. Algèbre linéaire II

2.1. **Diagonalisation.** f est diagonalisable ssi son polynôme minimal est simple.

2.2. **Déterminants.** Volume, orientation, L'espace des formes $n-$linéaires alternées, formule explicite, opérations sur les lignes et le colonnes, développement par rapport à une ligne ou une colonne. $det(A) = det({}^tA)$, $det(AB) = det(A).det(B)$, co-matrice, formule de Kramer, A inversible ssi $det(A) \neq 0$, L'ensemble des matrices inversibles est un ouvert dense. Groupes de matrices, GL_n, SL_n, ...

2.2.1. *Exercices : Déterminants classiques.* a) van der Monde. b) Soit J la matrice carrée de taille n dont tous les coefficients sont égaux à 1. Soit a un nombre réel. Développer le polynôme $P(X) = det(X \cdot Id + a \cdot J)$. c) Soit D une matrice diagonale. Calculer $det(J+D)$ (réponse : $\prod_i x_i + \sum_i \prod_{j \neq i} x_j$, où les $x_1, \ldots, x_n$ sont les éléments diagonaux de D. d) Matrice "dorée" : M est la matrice symétrique telle que $M_{i,j} = j$ si $i \geq j$. (réponse $det(M) = 1$, voir décomposition LU ci dessous). e) Matrice M telle que $M_{i,i} = a$, $M_{i,i+1} = b$, $M_{i,i-1} = c$, $M_{i,j} = 0$ sinon. f) Matrice M telle que $M_{i,j}$ est égal à la somme des diviseurs communs de i et de j (indication : chercher une matrice triangulaire inférieure Z ainsi qu'une matrice diagonale D telle que $M = ZD^tZ$).

2.2.2. L'ensemble des matrices inversibles est un ouvert dense dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$.

2.3. **Polynôme caractéristique.**

$$P(\lambda) = det(A - \lambda I) = (-1)^n(\lambda^n - tr(A) + \cdots + (-1)^n det(A))$$

Théorème de Cayley-Hamilton: Le polynôme minimal divise le polynôme caractéristique.
Diagonalisation simultanée.
Triangularisation.
Une matrice générique a toutes ses valeurs propres distinctes.
Endomorphismes qui commutent avec un endomorphisme dont les valeurs propres sont distinctes.

2.4. **Exercices.**

2.4.1. *Matrice compagnon.*

2.4.2. *Spectre d'un polynôme d'endomorphisme.* Soit f un endomorphisme de $\mathbb{C}^n$. Soit $P \in \mathbb{C}[X]$. Exprimer le spectre de $P(f)$ en fonction de P et du spectre de f. Est-il vrai que f et $P(f)$ sont simultanément scindés et diagonalisables ?

2.4.3. *Algèbre des matrices circulantes.* Soit $X = (x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{C}^n$. Soit M_X la matrice carrée de taille n dont les coefficients sont $M_{X\,i,j} = X_{\sigma^{(i-1)}(j)}$, où σ est la permutation circulaire $\sigma(j) = j-1$ si $n \geq j > 1$, $\sigma(1) = n$. Calculer le polynôme caractéristique de M_X. Commencer par le cas où X est le vecteur $e_n = (0, \ldots, 0, 1)$. Puis exprimer M_X comme un polynôme de M_{e_n}, et utiliser ensuite l'exercice précédent.

2.5. **Algèbre linéaire III.**

2.5.1. *Puissances d'une matrice, exponentielle d'une matrice.*

2.5.2. *Suites solutions d'une récurrence linéaire.*

2.5.3. *Fonctions solutions d'une équation différentielle linéaire.*

2.6. **Exercices.**

2.6.1. *Lemme de Hadamard.* Une matrice à diagonale dominante sur les lignes est inversible. Localisation des valeurs propres.

2.6.2. *D+N.* Décomposition "diagonale+nilpotente", racine carrée d'une matrice inversible à coefficients complexes.

2.6.3. *Matrices de van der Monde.* soit $VDM(x_0, \dots, x_n)$ la matrice de van der Monde de taille n associée aux paramètres complexes $x_0, \dots, x_n$. Pour chaque $t \in \mathbb{R}$, on pose $V(t) = VDM(x_0 + t, \dots, x_n + t)$. On suppose les x_i deux à deux distincts ($V(t)$ est donc inversible pour tout t). Montrer que la matrice $V(t+1)(V(t))^{-1}$ ne dépend pas de t. Préciser cette matrice.

2.6.4. *Rang de la comatrice.* Exprimer le rang de $com(M)$ en fonction de celui de M.

2.6.5. *Endomorphismes de translation.* : Soit f un endomorphisme de l'espace vectoriel E sur $\mathbb{C}$ de dimension finie. Soit F l'application de $\mathcal{L}(E)$ dans $\mathcal{L}(E)$ définie par $F(g) = f \circ g$. Montrer que c'est un endomorphisme et déterminer son spectre et ses espaces propres en fonction de ceux de f.

2.6.6. *Pendule avec frottement, linéarisé.* Discuter les solutions de $\frac{d^2x}{dt}(t) + \rho\frac{dx}{dt}(t) + kx(t)$ en fonction de la valeur des paramètres ρ et k.

2.6.7. *Portraits de phase.* Dessiner en fonction des différentes valeurs de la trace et du déterminant d'une matrice 2×2 réelle M l'allure des orbites de l'équation $\frac{dX}{dt} = MX$.

2.6.8. *Méthode de Putzer.* Soit M une matrice complexe carrée, et $P(X) = X^k + c_{k-1}X^{k-1} + \cdots + c_0X^0$ un annulateur de M. Soit C la matrice d'ordre k compagnon de P et $Z(t) = (z_1(t), \dots, z_k(t))$ la solution de $\frac{dZ}{dt}(t) = CZ(t)$ telle que $Z(0) = (1, 0, \dots, 0, 0)$. Montrer que $exp(tM) = z_1(t) + z_2(t)M + \cdots + z_k(t)M^{k-1}$. (Remarque : avec cette méthode, il n'est pas nécessaire de trouver la forme de Jordan de M pour calculer son exponentielle).

Dans le cas (générique) où les valeurs propres $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ de M sont toutes distinctes, exprimer les coefficients $a_1, \dots, a_n$ tels que $exp(M) = \sum_{l=0}^{n-1} a_l M^l$ en fonction des $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ (introduire une matrice de van der Monde).

Toujours dans l'hypothèse où les valeurs propres de M sont deux à deux distinctes, montrer que

$$exp(tM) = \sum_{l=1}^{n} e^{t\lambda_l} \prod_{p \neq l} \frac{M - \lambda_p Id}{\lambda_l - \lambda_p}.$$

On suppose que M est une matrice 2×2. Montrer que $exp(tM) = e^{t\lambda}(Id - t(M - \lambda Id))$ si les deux valeurs propres sont égales à λ et que

$$exp(tM) = \frac{\lambda_1 e^{t\lambda_2} - \lambda_2 e^{t\lambda_1}}{\lambda_1 - \lambda_2} Id + \frac{e^{t\lambda_1} - e^{t\lambda_2}}{\lambda_1 - \lambda_2} M$$

si les deux valeurs propres sont $\lambda_1 \neq \lambda_2$. On remarquera que M vérifie

$$M^2 - (\lambda_1 + \lambda_2)M + \lambda_1\lambda_2 Id = 0.$$

2.6.9. *Décomposition LU.* Soit M une matrice carrée dont les coefficients sont $M_{i,j} = j$ si $i \geq j$ et i sinon. Trouver L et U telles que $M = LU$, avec L triangulaire inférieure, et U triangulaire supérieure (indication : commencer par le cas des matrices 2×2, puis 3×3).

2.6.10. Institut Fourier, BP 74, 38402 St Martin d'Hères Cedex, France.
E-mail address: emmanuel.ferrand@ujf-grenoble.fr