Géométrie affine euclidienne et groupes

Exercice 1

1. Dans le plan affine euclidien, on considère ABC triangle non aplati. On note G son isobarycentre, H son orthocentre, et O le centre de son cercle circonscrit. Montrer que $\overrightarrow{OH} = 3\overrightarrow{OG}$ *(droite d'Euler; on pourra calculer* $< 3\overrightarrow{OG} - \overrightarrow{OH}, \overrightarrow{BC} >$*).*

2. On passe dans le plan complexe, et on note a, b et c les affixes respectives des points A, B, C, et $j = e^{2i\pi/3}$. Montrer que le triangle ABC est équilatéral direct si et seulement si $a + jb + j^2c = 0$.

Exercice 2 Soit u une isométrie de $\mathcal{E}$ espace affine euclidien de dimension n. On note $\vec{u}$ la partie linéaire de u, et E l'espace vectoriel sous–jacent à $\mathcal{E}$.

1. Démontrer que $E = \mathrm{Ker}\,(\vec{u} - \mathrm{id}_E) \overset{\perp}{\oplus} \mathrm{Im}\,(\vec{u} - \mathrm{id}_E)$. On notera $F = \mathrm{Ker}\,(\vec{u} - \mathrm{id}_E)$.

2. Caractériser les translations t_v de $\mathcal{E}$ qui commutent avec u.

3. Montrer que si u possède un point fixe et $v \in E$, alors $t_v \circ u$ possède un point fixe si et seulement si $v \in F^{\perp}$.

4. Pour $n = 1$, puis 2 puis 3, quelles sont les isométries de $\mathcal{E}$ qui s'écrivent comme produit de $n + 1$ réflexions orthogonales, et pas de moins?

5. Pour $n = 3$, caractériser à quelle condition deux rotations de $\mathcal{E}$ d'axes distincts commutent.

Pour les exercices 3. à 9. on se donne $\mathcal{P}$ un plan affine euclidien.

Exercice 3 Soit ABC un triangle non aplati de $\mathcal{P}$. Soit M_0 un point de (AB). La parallèle à (BC) issue de M_0 coupe (AC) en M_1. La parallèle à (AB) issue de M_1 coupe (BC) en M_2 *etc.* On définit ainsi des points M_n (pour $n \geq 0$). Montrer que $M_6 = M_0$.

Exercice 4

1. Étant donnés deux cercles $\mathcal{C}$ et $\mathcal{C}'$ de $\mathcal{P}$, de centres O et O' et de rayons inégaux R et R', combien y a–t–il d'homothéties de $\mathcal{P}$ qui envoient $\mathcal{C}$ sur $\mathcal{C}'$? Construire leur centre.

2. Soient A un point de $\mathcal{P}$, et D_1, D_2 deux droites sécantes de $\mathcal{P}$ qui ne contiennent pas A. Justifier qu'il existe un unique couple de points (M_1, M_2) qui vérifie: $M_i \in D_i$ $(i = 1, 2)$, et $2\overrightarrow{AM_1} + 3\overrightarrow{AM_2} = \overrightarrow{0}$. En donner une construction.

3. Soit ABC un triangle non aplati de $\mathcal{P}$. À partir de tout point $M = M_0$ de $\mathcal{P}$, on construit M_1 le milieu de $[M_0A]$, puis M_2 le milieu de $[M_1B]$, M_3 le milieu de $[M_2C]$, M_4 le milieu de $[M_3A]$ et ainsi de suite. On pose $\varphi_n(M) = M_n$.

- **a.** Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, φ_n est une application affine de $\mathcal{P}$.
- **b.** Montrer que la suite $(M_{3n})_{n\geq 0}$ est convergente. Quelle est sa limite?
- **c.** Pensez–vous que la suite $(M_n)_{n\geq 0}$ soit convergente?

Exercice 5

Étant données r et r' deux rotations de $\mathcal{P}$ de centres respectifs A et B et d'angles respectifs α et β, expliciter la composée $r' \circ r$ (on donnera une construction de ses éléments géométriques).

Exercice 6

Soient A, B, C trois points non alignés de $\mathcal{P}$. On note r_A (resp. g_A) la rotation de centre A et d'angle $a = \widehat{BAC}$ (resp. $2a/3$), et on définit de même les rotations r_B et r_C (resp. g_B et g_C).

1. On note I le point d'intersection des deux trisectrices intérieures partant de A et B "proches" du côté AB. Déterminer l'isométrie $g_A \circ g_B$.

2. Déterminer les isométries $f = r_C \circ r_B \circ r_A$ et $f' = r_A \circ r_B \circ r_C$. Que peut–on dire si le triangle ABC est équilatéral ?

3. Déterminer de même la composée de symétries orthogonales $g = s_{(AB)} \circ s_{(CA)} \circ s_{(BC)}$: montrer que g n'a pas de point fixe et préciser sa décomposition canonique, selon que ABC est ou non rectangle en B.

4. Montrer que ${r_A}^2 \circ {r_B}^2 \circ {r_C}^2 = \mathrm{id}_{\mathcal{P}}$ (utiliser les symétries de 2.).

Exercice 7 Soient $\mathcal{C}$ un cercle du plan $\mathcal{P}$, et $\Delta_1, \Delta_2, \Delta_3$ trois directions de droites distinctes de $\mathcal{P}$. À tout $M = M_0 \in \mathcal{C}$, on associe le point M_1 intersection de $\mathcal{C}$ avec la droite (M, Δ_1), puis le point M_2 intersection de $\mathcal{C}$ avec la droite (M_1, Δ_2), puis le point M_3 intersection de $\mathcal{C}$ avec la droite (M_2, Δ_3). À partir de M_3, on reprend le procédé, comme pour M.

Montrer que la suite de points $(M_i)_i$ ainsi définie est périodique, et donner sa période.

Exercice 8 On se donne trois droites D_1, D_2, D_3 du plan $\mathcal{P}$, concourantes en un point O.

Construire un triangle ABC dans $\mathcal{P}$ de sorte que les droites D_i, $1 \leq i \leq 3$, soient respectivement les médiatrices de ses côtés $[BC], [CA]$ et $[AB]$.

Exercice 9 Dans le plan affine euclidien $\mathcal{P}$, on considère deux points A et B, situés dans un même demi–plan ouvert de frontière D.

1. Déterminer les points M de la droite D tels que la somme $MA + MB$ soit minimale.

2. Pour un tel point M, que peut–on dire des demi–droites $[MA)$ et $[MB)$?

3. Reprendre la question 1. avec D droite, et A, B deux points de $\mathcal{E}$ *euclidien de dimension 3.*

Exercice 10 *Pentagone et isométries*

Soient A, B, C, D, E cinq points de $\mathcal{E}$ un espace affine euclidien de dimension 3. On suppose que $AB = BC = CD = DE = EA \neq 0$ et que les angles $\widehat{EAB}, \widehat{ABC}, \widehat{BCD}, \widehat{CDE}$ et $\widehat{DEA}$ sont égaux. L'objectif est de montrer que les cinq points A, B, C, D, E sont coplanaires.

1. Montrer qu'il existe une isométrie f de $\mathcal{E}$ telle que $f(A) = B$, $f(B) = C$, $f(C) = D$, $f(D) = E$ et $f(E) = A$.

On suppose que les cinq points ne sont pas coplanaires.

2. Montrer que $f^5 = \mathrm{id}_{\mathcal{E}}$.

3. En déduire que f est une rotation de $\mathcal{E}$.

4. Conclure.

5. Peut–on étendre ce résultat à d'autres entiers que 5 ? Lesquels?

♢ ♢ ♢