Bien qu'elles présentent quelques points communs, les deux parties constituant ce problème sont assez largement indépendantes. La première se place d'un point de vue algébrique, la seconde d'un point de vue analytique.

On note A l'ensemble des suites de réels. On définit sur A deux lois de composition internes de la façon suivante :

si $a=(a_n)$ et $b=(b_n)$ sont deux éléments de A, on pose $a+b=(a_n+b_n)$ et $a*b=(c_n)$ avec $c_n=\sum_{k=0}^{n}a_kb_{n-k}$.

On peut vérifier (ce n'est pas demandé) que $(A,+)$ est un groupe commutatif, et que la loi $*$ est commutative, associative, et distributive par rapport à la loi +.

Les plus perspicaces d'entre vous auront reconnu en c_n *le terme général de la série produit de Cauchy des séries* $\sum a_n$ *et* $\sum b_n$. *Même s'il est bien de l'avoir vu, cette constatation ne sera guère utile dans ce problème, mis à part dans une question.*

Partie I

0. Exprimer sous forme explicite (sans symbole Σ) les réels c_0, c_1, c_2 et c_3 (cette question parfaitement creuse a pour seul objectif de vous familiariser avec le fonctionnement de la suite c).

1. Vérifier que la suite ε définie par $\varepsilon_0=1$ et $\varepsilon_n=0$ pour $n\geq 1$ est élément neutre pour la loi $*$.
Que peut-on en déduire concernant $(A,+,*)$?

2. Soit u la suite constante égale à 1.
- **a.** Calculer $u*u$ et $u*u*u$.
- **b.** Le sous-ensemble B de A constitué des suites qui sont bornées est-il un sous-anneau de A ?

3. Soient $a=(a_n)$ et $b=(b_n)$ deux éléments *non nuls* de A. On note a_p et b_q les premiers termes non nuls des suites a et b. Soit $c=a*b$. Calculer c_{p+q}. Peut-on avoir $c=0$?
Que peut-on en déduire concernant l'anneau $(A,+,*)$?

4. On recherche dans cette question les éléments inversibles de A pour la loi $*$.
- **a.** Soit $a\in A$. Prouver que pour que a soit inversible dans A, il est nécessaire que $a_0\neq 0$.
- **b.** Soit, réciproquement, une suite a de A telle que $a_0\neq 0$.
  Quel système infini d'équations doit vérifier une suite $b=(b_n)$ pour que $a*b=\varepsilon$?
  Prouver que ce système d'équations détermine pour tout n une et une seule valeur de b_n, puis conclure.
- **c.** *Exemple :*
  Déterminer l'inverse pour la loi $*$ de la suite u constante égale à 1 évoquée à la question **2.**

5. Soit D le sous-ensemble de A constitué des suites ayant la propriété suivante :

$$a\in D \Leftrightarrow \exists m,r\in\mathbb{R} \text{ tels que } \forall n\in\mathbb{N}, |a_n|\leq mr^n.$$

On notera, c'est essentiel pour la suite, que si $a\in D$, *les m et r de l'inégalité précédente ne sont pas uniques et que n'importe quelles valeurs plus grandes conviennent encore.*
- **a.** Prouver que la somme de deux éléments de D est encore un élément de D.
- **b.** Prouver que pour tout entier n, on a $n+1\leq 2^n$.
  En déduire que le produit (au sens de la loi $*$) de deux éléments de D est encore un élément de D.
  Que peut-on dire de D vis-à-vis de A ?

6. Soit a un élément de D vérifiant $a_0 = 1$, et b son inverse pour la loi $*$.

a. Prouver l'existence d'un réel R tel que $\forall n \in \mathbb{N}, |a_n| \leq R^n$.

b. Prouver pour tout entier n l'inégalité $|b_n| \leq (2R)^n$. Que peut-on dire de la suite b ?

c. Prouver, plus généralement, que l'inverse d'un élément inversible de D est encore dans D.

7. Application

On choisit pour a la suite $a = \left((-1)^n \dfrac{x^{2n}}{(2n)!}\right)$, x étant un réel.

a. Prouver que la suite a est un élément de D.

b. Prouver que son inverse b pour la loi $*$ est de la forme $b = (\beta_n x^{2n})$ où (β_n) est une certaine suite de réels ne dépendant pas de x que l'on ne cherchera pas à expliciter.

c. Prouver que la série $\sum a_n$ converge pour tout réel x, et que la série $\sum b_n$ converge pour tout réel x vérifiant $|x| < \dfrac{1}{\sqrt{2}}$.

d. Calculer, pour $|x| < \dfrac{1}{\sqrt{2}}$, le produit $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n \times \sum_{n=0}^{+\infty} b_n$.

Partie II

Soit I un intervalle de la forme $]-\alpha, \alpha[$ avec $\alpha > 0$. Une fonction f de I dans $\mathbb{R}$, de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur I, sera dite *analytique sur I* [1] si :

$$\exists m, r \in \mathbb{R} \text{ tels que } \forall x \in I, \left|\frac{f^{(n)}(x)}{n!}\right| \leq m r^n.$$

8. **a.** Prouver que la somme de deux fonctions analytiques sur I est une fonction analytique sur I.

b. Après avoir justifié pour $k \in [[0, n]]$ l'inégalité $k!(n-k)! \leq n!$, prouver que le produit de deux fonctions analytiques sur I est une fonction analytique sur I.

c. Prouver que toute fonction polynôme est analytique (sur n'importe quel intervalle I de la forme donnée).

d. Prouver que la dérivée d'une fonction analytique sur I est une fonction analytique sur I (on pourra utiliser le résultat de la question **5.b.**).

9. On fixe dans cette question une fonction analytique f sur $I =]-\alpha, \alpha[$ telle que $\forall x \in I, \left|\dfrac{f^{(n)}(x)}{n!}\right| \leq m r^n$ $(m, r \in \mathbb{R})$.

a. Rappeler, sous leur forme la plus générale, les théorèmes de Taylor avec reste intégral et de Taylor-Lagrange.

b. Prouver que pour certaines valeurs de x que l'on précisera, la série $\sum \dfrac{f^{(k)}(0)}{k!} x^k$ est convergente de somme $f(x)$.

10. *La fonction tangente est analytique sur* $]-\dfrac{\pi}{4}, \dfrac{\pi}{4}[$.

a. Soit $Q = a_n X^n + \ldots + a_1 X + a_0$ un polynôme réel de degré n à coefficients *positifs*.

Prouver que $\forall t \in [-1,1], |Q(t)| \leq Q(1)$ et $|Q'(t)| \leq n Q(1)$.

b. Prouver, pour tout entier p, l'existence d'un polynôme réel P_p tel que :

$$\forall x \in]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[, \ \tan^{(p)} x = P_p(\tan x).$$

c. Prouver qu'un tel polynôme P_p est unique.

---

[1] Il ne s'agit pas là de la définition officielle d'une fonction analytique.

d. Donner une formule de récurrence liant P_{p+1} et P_p, et en déduire le degré de P_p et le fait que ses coefficients sont positifs.

e. Prouver que $0 \leq P_{p+1}(1) \leq 2(p+1)P_p(1)$.

En déduire une majoration de $P_p(1)$ valable pour tout entier *p*.

f. Prouver que $\forall x \in]-\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4}[$, $\left|\tan^{(p)} x\right| = \left|P_p(\tan x)\right| \leq 2^p p!$.

11. *Une fonction de classe $\mathcal{C}^\infty$ qui n'est pas analytique.*

On pose, pour $x \in \mathbb{R}$, $x \neq 0$, $f(x) = \mathrm{e}^{-\frac{1}{x^2}}$.

a. Déterminer la limite *l* de *f* en 0.

On posera désormais $f(0) = l$.

b. Prouver que la fonction *f* ainsi prolongée en 0 est de classe $\mathcal{C}^\infty$ (on pourra poser l'hypothèse de récurrence suivante : "H(*n*) : la dérivée *n*-ième de *f* sur $\mathbb{R}^*$ est de la forme $P_n(\frac{1}{x})\mathrm{e}^{-\frac{1}{x^2}}$, *f* est de classe $\mathcal{C}^n$ sur $\mathbb{R}$ et $f^{(n)}(0) = 0$").

c. Prouver que *f* n'est analytique sur aucun intervalle de la forme $]-\alpha, \alpha[$ avec $\alpha > 0$.
