Ce problème explore le thème archi-classique des polynômes de Tchebychev. La partie **I** établit leur existence et donne leurs toutes premières propriétés. La partie **II** les utilise pour résoudre un problème arithmétique assez naturel, enfin les parties **III**, **IV** et **V** illustrent le lien privilégié existant entre les polynômes de Tchebychev et l'interpolation polynomiale (lien qui, d'ailleurs, est à l'origine de leur découverte par Tchebychev, la célèbre identité qui sert désormais à les définir " $\cos nx = T_n(\cos x)$ ", fruit d'un joli hasard, n'ayant été constatée qu'ultérieurement...).

Partie préliminaire

Soit l'équation algébrique suivante, où les a_i sont des entiers, a_0 et a_n étant supposés non nuls :

$$\text{(E)} \qquad a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \ldots + a_0 = 0 \ .$$

Supposons que (E) admette une racine rationnelle $x_0 = \dfrac{p}{q}$, où p est un entier non nul, q un entier strictement positif, p et q premiers entre eux.

Prouver alors que p divise a_0 et que q divise a_n .

Partie I

1. **a.** Soit n un entier positif ou nul. Montrer, en utilisant la formule de de Moivre, qu'il existe un unique polynôme T_n (comme Tchebychev, bien sûr) tel que, pour tout réel x, on ait l'égalité :

$$\cos nx = T_n(\cos x) \ .$$

b. Prouver que T_n est à coefficients entiers relatifs, et donner son degré.

c. Déterminer T_0 , T_1 , T_2 et T_3 .

d. Prouver la relation de récurrence

$$T_{n+1}(X) = 2XT_n(X) - T_{n-1}(X) \ .$$

e. Prouver que T_n a même parité que n, déterminer le coefficient de son terme de plus haut degré ainsi que ses valeurs en -1 et 1.

2. **a.** Quelles sont, en supposant n supérieur ou égal à 1, les racines de T_n ? Vérifier que celles-ci sont toutes réelles, simples et appartenant à l'intervalle $]-1,1[$.

b. Préciser la disposition des zéros de T_{n-1} par rapport à ceux de T_n quand n est plus grand que 2.

3. Prouver que l'on définit un produit scalaire sur $\mathbf{R}[X]$ en posant :

$$\left(P \middle| Q\right) = \int_{-1}^{1} \frac{P(t)Q(t)}{\sqrt{1-t^2}} \, \mathrm{d}t \ .$$

Montrer que la famille $\left(T_n\right)$ est orthogonale pour ce produit scalaire.

Partie II

Il est bien connu que $\cos\frac{\pi}{3} = \frac{1}{2}$. On a donc $0 < \frac{1}{3} < \frac{1}{2}$, $\frac{1}{3} \in \mathbf{Q}$, $\cos\frac{\pi}{3} \in \mathbf{Q}$.

L'objet de cette partie est de déterminer si $\frac{1}{3}$ est, ou non, l'unique rationnel r vérifiant :

$$0 < r < \frac{1}{2} \text{ et } \cos r\pi \in \mathbf{Q}.$$

Soit donc r un rationnel vérifiant $0 < r < \frac{1}{2}$ et $\cos r\pi \in \mathbf{Q}$. Si $r = \frac{p}{q}$, p et q étant des entiers naturels premiers entre eux, on a donc :

$$1 \leq p < \frac{q}{2}, \text{ ce qui entraîne que } q \geq 3.$$

1. Montrer que $\cos\frac{\pi}{q}$ est rationnel (on utilisera l'identité de Bézout et les résultats de la partie **I**).

2. Montrer que q n'est pas multiple de 4. Il est donc possible d'écrire $q = h$ ou $q = 2h$, h étant un entier impair supérieur ou égal à 3.

3. En supposant que $q = h$ entier impair, montrer que $h = 3$, puis que $p = 1$ (on utilisera la partie préliminaire).

4. Peut-on avoir $q = 2h$?

5. Conclure.

Partie III

On s'intéresse ici au lien entre les polynômes de Tchebychev et le problème de l'interpolation.

Précisons : soit f une fonction numérique définie sur un intervalle $[a,b]$ de $\mathbf{R}$, et soient p réels $x_1, \ldots, x_p$ éléments de $[a,b]$. Interpoler f aux points x_i, c'est assimiler f à l'unique polynôme de degré plus petit que $p-1$ qui prend les mêmes valeurs que f aux x_i.

L'objet de cette partie est, dans un premier temps, de prouver l'existence et l'unicité d'un tel polynôme interpolateur, et d'évaluer l'erreur commise quand on substitue ce polynôme à f.

Dans un deuxième temps, on se pose le problème suivant : puisque l'on a le choix des points x_i, comment les répartir dans le segment $[a,b]$ pour que l'interpolation soit la plus efficace possible ? La première réponse qui vient à l'esprit, totalement intuitive, est d'équirépartir les x_i dans $[a,b]$ en posant :

$$\text{pour } k = 1, \ldots, p : x_k = a + (k-1)\frac{b-a}{p-1}.$$

Nous allons voir qu'en fait, il n'en est rien, que le bon choix des x_i est tout autre, et que, étrangement, il conduit à prendre plus de points d'interpolation de *f* vers les bords de l'intervalle qu'en son centre…

A. Polynôme d'interpolation de Lagrange

On fixe ici un intervalle $[a,b]$ de **R**, un entier p supérieur ou égal à 2, et p points $x_1,\dots,x_p$ de $[a,b]$ deux à deux distincts. Soit d'autre part une fonction numérique *f* définie sur $[a,b]$.

1. Prouver que l'application

$$\Phi : \begin{cases} \mathbf{R}_{p-1}[X] \to \mathbf{R}^p \\ P \mapsto \left(P(x_1),\dots,P(x_p)\right) \end{cases}$$

est un isomorphisme d'espaces vectoriels.

2. En déduire l'existence et l'unicité d'un polynôme P de degré inférieur ou égal à $p-1$ qui prend les mêmes valeurs que *f* aux points x_i.

3. Donner une formule explicite de ce polynôme P (on pourra au préalable construire un polynôme prenant la valeur 1 en x_k et s'annulant aux x_i pour $i \neq k$).

B. Évaluation de l'erreur

On garde ici les notations de la partie **A.**. On suppose de plus que *f* est de classe C^p, et on pose $g = f - P$.

1. Soit x un élément fixé de $[a,b]$, différent de tous les x_i.

a. Prouver qu'il est possible de choisir une constante réelle K pour que la fonction h définie sur $[a,b]$ par :

$$h(t) = g(t) - K(t-x_1)\dots(t-x_p)$$

s'annule en tous les x_i et en x. Ce choix sera supposé fait dans la suite.

b. Prouver alors que la dérivée $h^{(p)}$ s'annule sur $[a,b]$.

c. En déduire l'existence d'un point c de $[a,b]$ tel que :

$$g(x) = \frac{g^{(p)}(c)}{p!}(x-x_1)\dots(x-x_p)\,.$$

2. Soit M un majorant de la valeur absolue de la dérivée d'ordre p de *f* sur $[a,b]$. Prouver que pour tout x de $[a,b]$, on a l'inégalité suivante :

$$\left| f(x) - P(x) \right| \leq \frac{M}{p!}\left|(x-x_1)\dots(x-x_p)\right|\,.$$

C. Choix des points d'interpolation

On suppose ici que l'intervalle $[a,b]$ est l'intervalle $[-1,1]$, et on fixe toujours une fonction numérique *f* de classe C^p sur $[-1,1]$. Puisqu'il n'est pas possible de jouer sur l'ordre de grandeur de la dérivée d'ordre p de *f* qui est fixée, le bon choix des x_i pour faire la meilleure interpolation de *f* possible est, en vertu de l'inégalité qui vient d'être prouvée, celui qui minimise le produit $\left|(x-x_1)\ldots(x-x_p)\right|$ quand *x* décrit [–1,1].

On munit donc $\mathbf{R}_p[X]$ de la norme $\|P\| = \sup\limits_{-1\le t\le 1}|P(t)|$, et il s'agit de déterminer, de tous les polynômes unitaires de degré *p* possédant *p* racines distinctes dans [–1,1], celui (ou ceux) qui sont de norme minimale. On est bien d'accord ?

1. Calculer $\|T_p\|$. On posera dans la suite $U_p = \dfrac{T_p}{2^{p-1}}$, de telle sorte que U_p est un polynôme unitaire de norme égale à $\dfrac{1}{2^{p-1}}$.

2. Résoudre, pour *x* dans [–1,1], l'équation $\left|U_p(x)\right| = \dfrac{1}{2^{p-1}}$.

3. Soit *Q* un polynôme unitaire de degré *p*, et de norme inférieure ou égale à $\dfrac{1}{2^{p-1}}$. En envisageant certaines valeurs prises par le polynôme $Q - U_p$, prouver que $Q = U_p$.

4. Quel est, en toute généralité, le bon choix à faire pour les points $x_1, \ldots, x_p$ d'interpolation ?

Faire un dessin, par exemple pour $p = 16$, de leur répartition dans l'intervalle [–1,1].

Partie IV

Soit *f* une fonction numérique de classe C^∞ sur un intervalle contenant [–1,1]. Pour tout entier *p*, on note P_p le polynôme de degré plus petit que *p* prenant les mêmes valeurs que *f* aux racines du polynôme de Tchebychev T_p. On cherche dans cette partie une condition suffisante pour que la suite (P_p) converge uniformément vers *f* sur [–1,1].

On supposera que *f* est somme de la série entière $\sum a_n x^n$ sur [–1,1], cette série entière étant de rayon de convergence *R* ($R \ge 1$ bien sûr !).

1. Soit *r* un réel élément de [0,*R*[, et α un réel vérifiant $0 \le \alpha < r$.

a. Prouver que la suite $\left(a_n r^n\right)$ est bornée ; on notera $M = \sup\limits_n \left|a_n r^n\right|$.

b. Prouver que pour tout *x* de [–α,α], et pour tout entier positif *p*, on a :

$$\left| f^{(p)}(x)\right| \le Mr\frac{1}{(r-\alpha)^{p+1}}\,p!\,.$$

2. À partir de quelle valeur de R peut-on affirmer que la suite $\left(P_p\right)$ converge uniformément vers f sur $[-1,1]$?

Partie V

Dans cette partie, on désigne par I l'intervalle [0,1], et on munit l'espace E des fonctions numériques continues sur I de la norme de la convergence uniforme (on rappelle qu'il s'agit alors d'un espace de Banach).

On choisit une suite finie $(x_0, x_1, \ldots, x_n)$ de $n+1$ points distincts de I (que l'on pourra supposer être rangés dans l'ordre croissant), et on définit l'application linéaire Λ_n qui, à un élément f de E, associe son polynôme interpolateur de Lagrange aux x_i :

$$\Lambda_n : \begin{cases} E \to E \\ f \mapsto \sum_{i=0}^{n} f(x_i) L_i(X) \end{cases} \quad \left(\text{avec } L_i(X) = \prod_{j \neq i} \frac{(X - x_j)}{(x_i - x_j)}\right)$$

1. Prouver que Λ_n est un opérateur continu, et que sa norme subordonnée vérifie :

$$\lambda_n = \left\|\Lambda_n\right\| = \sup_{x \in I} \sum_{i=0}^{n} \left|L_i(x)\right| .$$

On suppose désormais que les points x_i ont été choisis équidistants ; on a donc $x_i = \frac{i}{n}$.

2. **a.** Prouver que $\left|L_i\left(\frac{1}{2n}\right)\right| \geq \frac{1}{4n^2}\binom{n}{i}$.

b. En déduire que $\lambda_n \geq \frac{2^n}{4n^2}$.

3. Grâce au délicat théorème de Banach-Steinhaus (?!), en déduire l'existence d'une fonction f de E pour laquelle on n'a pas :

$$\lim_n \Lambda_n(f) = f .$$

4. Sachant que si l'on avait choisi les points d'interpolation comme racines du $n+1$ ème polynôme de Tchebychev, on aurait trouvé $\lambda_n \leq \alpha \ln n$ où α est une certaine constante, commenter...

5. Redémontrer la complétude de l'espace E muni de la norme infinie.

That's all, folks !