Capès 2001 - Sujet 1 - Enoncé

Notations et objet du problème

On désigne par :
- $\mathbb{N}$ l'ensemble des entiers naturels;
- $\mathbb{N}^*$ l'ensemble des entiers naturels non nuls;
- $\mathbb{Q}$ le corps des nombres rationnels;
- $\mathbb{R}$ le corps des nombres réels;
- $\mathbb{R}^+$ le sous-ensemble de $\mathbb{R}$ constitué des nombres réels positifs ou nuls;
- $\mathbb{R}^{+*}$ le sous-ensemble de $\mathbb{R}$ constitué des nombres réels strictement positifs;
- $\mathcal{C}(\mathbb{R}^+)$ l'espace vectoriel des fonctions continues de $\mathbb{R}^+$ dans $\mathbb{R}$.

Pour tout réel x, on note $[x]$ la partie entière de x. On rappelle que c'est l'unique entier relatif défini par :

$$[x] \leq x < [x] + 1.$$

Dans la première partie, on étudie l'équation fonctionnelle $f(x+y) = f(x)f(y)$ sur $\mathbb{R}^+$. Cette équation fonctionnelle est utilisée pour donner une caractérisation des variables aléatoires dites sans mémoire dans la partie **III.**

Dans la partie **II,** on étudie quelques propriétés du noyau de convolution des fonctions continues sur $\mathbb{R}^+$. Le produit de convolution intervient dans l'étude de variables aléatoires dans la partie **III.**

Les trois dernières parties sont consacrées à la modélisation probabiliste d'un problème de réception de messages pour un réseau informatique. Dans les parties **IV** et **V**, on étudie le comportement asymptotique d'une suite de maximum de variables aléatoires indépendantes suivant une même loi de Poisson.

Les parties **II.1.** et **II.2.** sont indépendantes des parties **III, IV, V.**

- I - L'équation fonctionnelle $f(x+y) = f(x)f(y)$ sur $\mathbb{R}^+$

Pour cette partie, on désigne par f une fonction définie sur $\mathbb{R}^+$ à valeurs réelles et vérifiant l'équation fonctionnelle suivante :

$$\forall (x,y) \in \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^+,\ f(x+y) = f(x)f(y). \tag{1}$$

I.1. Vérifier que la fonction f est à valeurs positives ou nulles.

I.2. Montrer que si $f(0) = 0$, alors la fonction f est identiquement nulle.

Dans ce qui suit, on suppose que f est non identiquement nulle.

I.3. Déterminer la valeur de $f(0)$.

I.4. Soient x un réel positif ou nul, et n un entier naturel non nul. Exprimer $f(nx)$ et $f\left(\frac{1}{n}x\right)$ en fonction de $f(x)$ et n.

I.5. Soient x un réel positif ou nul, $r = \frac{p}{q}$ un nombre rationel, où p et q sont deux entiers strictement positifs. En calculant $f(q(rx))$ de deux manières, exprimer $f(rx)$ en fonction de $f(x)$ et r.

I.6. *Pour cette question, on suppose qu'il existe un réel α strictement positif tel que $f(\alpha) = 0$.*

I.6.1 Construire une suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de réels strictement positifs convergente vers 0, telle que $f(x_n) = 0$ pour tout entier naturel n.

I.6.2 Montrer que la fonction f est nulle sur $\mathbb{R}^{+*}$.

Dans ce qui suit, on suppose que f est à valeurs réelles strictement positives.

I.7. On suppose dans cette question que la fonction f est continue à droite en tout point de $\mathbb{R}^+$. Montrer qu'il existe un réel a tel que $f(x) = e^{ax}$ pour tout réel x positif ou nul.

I.8. On suppose que la fonction f est continue à droite en 0. Montrer qu'elle est continue à droite en tout point de $\mathbb{R}^+$ et conclure.

I.9. On suppose qu'il existe deux réels A et B vérifiant $0 \leq A < B$, tels que f soit majorée sur l'intervalle $[A,B]$.

I.9.1 Montrer que sur l'intervalle $[0,B-A]$, la fonction f est bornée de borne inférieure strictement positive.

I.9.2 Montrer que la fonction f est continue à droite en 0.

En conclusion de cette partie, le résultat suivant a été démontré :
Si une fonction f à valeurs réelles définie sur $\mathbb{R}^+$:

- vérifie l'équation (1),
- est non identiquement nulle sur $\mathbb{R}^{+*}$,
- est majorée sur un intervalle de longueur strictement positive,

alors il existe un réel a tel que $f(x) = e^{ax}$ pour tout réel x positif ou nul.

- II - Produit de convolution

On admet le résultat suivant : si R est un réel strictement positif, et ψ une fonction à valeurs réelles définie et continue sur le carré $C_R = [0,R]^2$, alors :

$$\int_0^R \left(\int_0^R \psi(t,x)dt\right) dx = \int_0^R \left(\int_0^R \psi(t,x)dx\right) dt.$$

II.1. Soient R un réel strictement positif, et φ une fonction à valeurs réelles définie et continue sur le triangle T_R défini par :

$$T_R = \{(t,x) \in \mathbb{R}^2;\ 0 \leq t \leq x \leq R\}.$$

Le but de cette question **II.1.** est de démontrer l'égalité suivante :

$$\int_0^R \left(\int_0^x \varphi(t,x)dt\right) dx = \int_0^R \left(\int_t^R \varphi(t,x)dx\right) dt. \tag{2}$$

II.1.1. Montrer que la fonction ψ définie sur $C_R = [0,R]^2$ par :

$$\forall (t,x) \in C_R,\ \psi(t,x) = \begin{cases} \varphi(t,x) - \varphi(t,t) & \text{si } (t,x) \in T_R, \\ 0 & \text{si } (t,x) \notin T_R, \end{cases}$$

est continue sur C_R.

II.1.2 Soient R un réel strictement positif et k une fonction à valeurs réelles définie et continue sur l'intervalle $[0,R]$. Montrer, à l'aide de dérivations, que :

$$\forall z \in [0,R],\ \int_0^z \left(\int_0^x k(t)dt \right) dx = \int_0^z \left(\int_t^z k(t)dx \right) dt.$$

II.1.3 Montrer, à l'aide de ce qui précède, l'identité (2).

II.2. *Pour toutes fonctions f,g appartenant à $\mathcal{C}(\mathbb{R}^+)$, on définit la fonction $f * g$ par :*

$$\forall x \in \mathbb{R}^+, \quad f * g(x) = \int_0^x f(x-t)g(t)dt.$$

II.2.1. Montrer que la loi $*$ est une loi de composition interne sur $\mathcal{C}(\mathbb{R}^+)$.

On admet que la loi $*$ ainsi définie est commutative et associative. On suppose, dans les questions qui suivent, que f et g sont deux fonctions appartenant à $\mathcal{C}(\mathbb{R}^+)$ à valeurs positives ou nulles dont les intégrales impropres sur $\mathbb{R}^+$ sont convergentes.

II.2.2. Montrer que pour tout réel R strictement positif, on a :

$$\int_0^R f * g(x)dx = \int_0^R g(t) \left(\int_0^{R-t} f(x)dx \right) dt.$$

II.2.3. Montrer que pour tout réel R strictement positif, on a :

$$\int_0^{R/2} f(x)dx \int_0^{R/2} g(t)dt \leq \int_0^R f * g(x)dx \leq \int_0^R f(x)dx \int_0^R g(t)dt.$$

II.2.4. Déduire de ce qui précède que l'intégrale impropre de $f * g$ sur $\mathbb{R}^+$ est convergente et que :

$$\int_0^{+\infty} f * g(x)dx = \int_0^{+\infty} f(x)dx \int_0^{+\infty} g(t)dt.$$

II.3. Pour tout réel λ strictement positif, on désigne par f_λ la fonction définie par :

$$\forall t \in \mathbb{R}^+,\ f_\lambda(t) = \lambda e^{-\lambda t}.$$

On définit la suite $(f_\lambda^{*n})_{n \in \mathbb{N}^*}$ des puissances de convolution de la fonction f_λ par $f_\lambda^{*1} = f_\lambda$, et pour tout entier naturel non nul n, $f_\lambda^{*(n+1)} = f_\lambda^{*n} * f_\lambda$.

II.3.1 Calculer f_λ^{*2}.

II.3.2 Calculer f_λ^{*n} pour tout entier naturel non nul n.

- III - Variables aléatoires sans mémoire et temps d'attente

On rappelle que :

- *Si X est une variable aléatoire réelle définie sur un espace probabilisé $(\Omega,\mathcal{B},P)$, alors sa fonction de répartition est la fonction F_X définie sur $\mathbb{R}$ par :*

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad F_X(x) = P(X \leq x);$$

- *la fonction de répartition caractérise la loi de la variable aléatoire réelle X ;*
- *une variable aléatoire réelle X suit une loi exponentielle s'il existe un réel λ strictement positif tel que :*

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad F_X(x) = \begin{cases} 0 & si\ x \leq 0 \\ \int_0^x f_\lambda(t)dt & si\ x \geq 0, \end{cases}$$

où f_λ est la fonction définie en **II.3.**
On dit alors que X suit une loi exponentielle de paramètre λ.

III.1. *Soit X une variable aléatoire réelle suivant une loi exponentielle de paramètre λ.*

III.1.1. Expliciter sa fonction de répartition.

III.1.2. Montrer que :

$$\forall (s,t) \in \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^+, \quad P((X > s+t)|(X > t)) = P(X > s), \tag{3}$$

où la notation $P(A|B)$ représente la probabilité conditionnelle de l'événement A sachant que l'événement B de probabilité non nulle est réalisé. On rappelle que :

$$P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}.$$

La propriété (3) *se traduit en disant que la variable aléatoire X est sans mémoire.*

III.2. Soit T une variable aléatoire réelle sans mémoire. On note F_T sa fonction de répartition.

III.2.1. Montrer que la fonction G_T définie sur $\mathbb{R}^+$ par :

$$\forall x \in \mathbb{R}^+, \quad G_T(x) = 1 - F_T(x)$$

vérifie l'équation fonctionnelle (1).

III.2.2. Montrer que la variable aléatoire T suit une loi exponentielle.

III.3. *Pour cette partie et les suivantes, on s'intéresse à la modélisation probabiliste d'un problème concernant l'arrivée de messages vers un réseau d'informatique.*
On désigne par T_1 le temps d'attente pour le réseau d'un premier message à partir de l'instant initial $t = 0$ et, pour tout entier naturel k supérieur ou égal à 2, par T_k le temps d'attente du k-ième message à partir de l'arrivée du $(k-1)$-ième.
On suppose que les T_k pour $k \geq 1$, sont des variables aléatoires suivant une même loi exponentielle de paramètre λ strictement positif et que, pour tout entier naturel $n \geq 2$, les variables aléatoires

$T_1, \dots, T_n$ sont indépendantes.
Pour tout entier naturel non nul n, on désigne par S_n la variable aléatoire réelle définie par :

$$S_n = \sum_{k=1}^{n} T_k.$$

On admet que la fonction de répartition F_{S_n} de S_n est donnée par :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad F_{S_n}(x) = P(S_n \leq x) = \begin{cases} 0 & si\ x \leq 0 \\ \int_0^x f_\lambda^{*n}(t)dt & si\ x \geq 0. \end{cases}$$

III.3.1. Donner une interprétation de la variable aléatoire S_n.

Pour les cinq questions suivantes, t est un réel strictement positif fixé. Pour les solutions, on pourra utiliser les variables de type $S_i (i \in \mathbb{N}^*)$ et leur fonction de répartition.

III.3.2 Calculer la probabilité pour qu'aucun message ne soit arrivé entre les instants 0 et t.

III.3.3 Calculer la probabilité pour qu'au plus un message soit arrivé entre les instants 0 et t.

Soit n un entier naturel.

III.3.4. Calculer la probabilité pour qu'au plus n messages soient arrivés entre les instants 0 et t.

III.3.5. Calculer la probabilité pour qu'exactement n messages soient arrivés entre les instants 0 et t.

III.3.6. Quelle est la loi de probabilité de la variable aléatoire N_t indiquant le nombre de messages reçus entre les instants 0 et t?

- IV - Comportement asymptotique d'une suite de variables aléatoires

Dans ce qui suit, Y est une variable aléatoire réelle, suivant une loi de Poisson de paramètre μ, réel strictement positif. On rappelle que cette loi est définie par :

$$\forall k \in \mathbb{N}, \quad P(Y = k) = \frac{e^{-\mu}\mu^k}{k!}.$$

Sa fonction de répartition, dont la définition est rappelée au début de la partie **III**, *est notée F_Y. On note G_Y la fonction définie sur l'ensemble des entiers supérieurs ou égaux à -1 par :*

$$\forall m \in \mathbb{N} \cup \{-1\}, \quad G_Y(m) = 1 - F_Y(m).$$

Pour tout entier naturel non nul n, on désigne par A_n le nombre de messages arrivés dans l'intervalle de temps $[n-1,n[$. On suppose que les A_n, pour $n \geq 1$, sont des variables aléatoires suivant une même loi de Poisson de paramètre μ strictement positif, et que pour tout entier $n \geq 2$, les variables aléatoires $A_1, \dots, A_n$ sont indépendantes.
Le réseau informatique ayant une capacité limitée de réception de messages sur chaque unité de temps, il est intéressant d'étudier la suite de variables aléatoires $(M_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ définie par :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad M_n = \max\{A_1, \dots, A_n\}$$

(on admet que les M_n sont des variables aléatoires réelles).

IV.1. Que représente la variable aléatoire M_n pour le modèle proposé.

IV.2. Montrer que :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad \forall m \in \mathbb{N}, \quad P(M_n \leq m) = (1 - G_Y(m))^n.$$

IV.3. **IV.3.1.** Montrer que, pour tout entier naturel m strictement supérieur à $\mu - 2$, on a :

$$\frac{e^{-\mu}\mu^{m+1}}{(m+1)!} \leq G_Y(m) \leq \frac{e^{-\mu}\mu^{m+1}}{(m+1)!} \frac{1}{1 - \frac{\mu}{m+2}}.$$

IV.3.2. En déduire un équivalent de $G_Y(m)$ pour m tendant vers l'infini.

IV.3.3. En déduire un équivalent de $\dfrac{G_Y(m+1)}{G_Y(m)}$ pour m tendant vers l'infini.

IV.4. *On définit la fonction G_C sur $[-1, +\infty[$ par :*

$$\forall x \in [-1, +\infty[, \qquad G_C(x) = G_Y([x]) \left(\frac{G_Y([x]+1)}{G_Y([x])} \right)^{x-[x]}.$$

IV.4.1. Montrer que la fonction G_C est continue sur $[1, +\infty[$.

IV.4.2. Montrer que la fonction G_C est strictement décroissante sur $[1, +\infty[$.

IV.4.3. Montrer que la fonction G_C réalise un homéomorphisme de $[-1, +\infty[$ sur $]0,1]$.

IV.5. *On définit la suite de réels $(\alpha_m)_{m\in\mathbb{N}}$ par :*

$$\forall m \in \mathbb{N}, \quad \alpha_m = \frac{G_C\left(m + \frac{1}{2}\right)}{G_C(m)}.$$

IV.5.1. Montrer que :

$$\forall m \in \mathbb{N}, \quad \alpha_m = \sqrt{\frac{G_C(m+1)}{G_C(m)}} = \frac{G_C(m+1)}{G_C(m+\frac{1}{2})}.$$

IV.5.2. Montrer que la suite $(\alpha_m)_{m\in\mathbb{N}}$ est convergente, et déterminer sa limite.

IV.6. *En notant G_C^{-1} l'application réciproque de G_C, on définit les suites $(a_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ et $(I_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ par :*

$$\forall n \in \mathbb{N}^*,\ a_n = G_c^{-1}\left(\frac{1}{n}\right), \quad I_n = \left[a_n + \frac{1}{2}\right].$$

IV.6.1. Etudier les limites éventuelles des suites $(a_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ et $(I_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$.

IV.6.2. Montrer que :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \begin{cases} 0 < G_C(I_n + 1) \leq \frac{\alpha_{I_n}}{n}, \\ G_C(I_n - 1) \geq \frac{1}{n\alpha_{I_n - 1}}. \end{cases}$$

IV.7. On définit les suites de réels $(p_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ et $(q_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ par :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad \begin{cases} p_n = P(M_n \leq I_n + 1), \\ q_n = P(M_n \leq I_n - 1). \end{cases}$$

Montrer que ces suites sont convergentes et déterminer leurs limites.

IV.8. Montrer que :

$$\lim_{n\to+\infty}(P(M_n = I_n) + P(M_n = I_n + 1)) = 1.$$

IV.9. *Application numérique.* On utilisera la table numérique suivante, pour $\mu = 0{,}4$:

k	$P(Y=k)$	$F_Y(k)$	$G_Y(k)$
0	0,67032005	0,67032005	0,329679954
1	0,26812802	0,93844806	0,061551936
2	0,0536256	0,99207367	0,007926332
3	0,00715008	0,99922375	0,000776251
4	0,00071501	0,99993876	$6{,}12433E-5$
5	$5{,}7201E-5$	0,99999596	$4{,}04268E-6$
6	$3{,}8134E-6$	0,99999977	$2{,}29307E-7$
7	$2{,}1791E-7$	0,99999999	$1{,}13997E-8$

IV.9.1. Calculer I_{10^5}.

IV.9.2. Calculer $P(M_{10^5} = I_{10^5}) + P(M_{10^5} = I_{10^5} + 1)$.

IV.9.3. Commenter ce résultat.

- V - Étude des suites $P(M_n = I_n)$ et $P(M_n = I_n + 1)$.

On définit une suite de réels $(r_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ et $(s_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ par :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad \begin{cases} r_n &= P(M_n = I_n + 1), \\ s_n &= P(M_n = I_n), \end{cases}$$

où M_n est la variable aléatoire définie au début de la partie **IV** *et le réel I_n est défini en* **IV.6.**

V.1. *On définit la fonction H sur $[-1, +\infty[$ par :*

$$\forall x \in [-1, +\infty[, \quad H(x) = \frac{1}{G_C(x)},$$

où G_C est la fonction définie en **IV.4.**

V.1.1. Montrer que la fonction H est dérivable sur l'ensemble des réels $\mathbb{R}^+ - \mathbb{N}$ des réels positifs non entiers.

V.1.2. Calculer, pour tout entier naturel m :

$$h_m = \inf_{x\in]m,m+1[} H'(x)$$

où H' désigne la fonction dérivée de la fonction H. Montrer que :

$$\lim_{m\to+\infty} h_m = +\infty.$$

V.2. Soit $(a_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ la suite définie en **IV.6.**

V.2.1. Montrer que :

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{H(a_{n+1}) - H(a_n)}{a_{n+1} - a_n} = +\infty.$$

V.2.2. En déduire que :

$$\lim_{n\to+\infty} (a_{n+1} - a_n) = 0.$$

V.3. Montrer que l'ensemble :

$$A = \{I_n - a_n | n \in \mathbb{N}^*\}$$

est dense dans l'intervalle $[-1/2,1/2]$.

V.4.1. Montrer que pour tout entier m non nul tel que :

$$I_m - a_m < -\frac{1}{4},$$

on a :

$$G_C(I_m) > \frac{1}{m\sqrt{\alpha_{I_m}}},$$

où $(\alpha_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est la suite définie en **IV.5.**

V.4.2. Montrer qu'il existe une sous-suite $(r_{\theta(n)})_{n\in\mathbb{N}^*}$ de $(r_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ qui converge vers 1, soit :

$$\lim_{n\to+\infty} P(M_{\theta(n)} = I_{\theta(n)} + 1) = 1.$$

V.4.3. Montrer que pour tout entier m non nul tel que :

$$I_m - a_m > \frac{1}{4},$$

on a :

$$G_C(I_m) < \frac{\sqrt{\alpha_{(I_m-1)}}}{m}.$$

V.4.4. Montrer qu'il existe une sous-suite $(s_{\xi(n)})_{n\in\mathbb{N}^*}$ de $(s_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ qui converge vers 1, soit :

$$\lim_{n\to+\infty} P(M_{\xi(n)} = I_{\xi(n)}) = 1.$$