Leçon concernées :
209-210-212-(213)-(224)-241-(264)-410-411-412-413-414-(423).

1. Suites de fonctions

1.1. Rappels.

(1)
- une limite simple de fonctions positives ou nulles est positive ou nulle.
- une limite simple de fonctions croissantes est croissante.
- une limite simple de fonctions convexes est convexe.
- une limite simple de fonctions k-lipschitziennes est k-lipschitzienne (k constant).
- une limite simple de fonctions linéaires est linéaire.

(2) Une limite localement uniforme de fonctions continues est continue.

(3) Une limite uniforme sur tout compact de fonctions continues est continue.

(4) Si (f_n) converge simplement vers la fonction f et si (f'_n) converge localement uniformément vers une fonction g alors f est dérivable et $f' = g$.

(5) Soit (f_n) une suite de fonctions définies sur un intervalle I (à valeurs dans un evn de dimension finie E) continues sur I. Si la suite (f_n) converge uniformément sur tout compact vers la fonction f alors pour tous $a, b \in I$ on a $\lim_{n\to\infty} \int_a^b f_n = \int_a^b f$. De plus, pour a fixé, les fonctions $x \mapsto \int_a^x f_n$ convergent uniformément sur tout compact vers la fonction $x \mapsto \int_a^x f$.

1.1.1. *Étude pratique.*

Exercice 1.1 On définit une suite (g_n) par

$$g_n(x) = \frac{1}{(1+x^2)^n} \quad \text{pour } x \in \mathbf{R}.$$

Étudier la convergence de la suite (g_n).

Exercice 1.2 On définit une suite (u_n) par

$$u_n(x) = e^{-nx} \sin(nx) \text{ pour } \ x \in \mathbf{R}_+.$$

(1) Étudier la convergence simple de la suite de fonctions (u_n) sur $[0, +\infty[$.

(2) Étudier la convergence uniforme sur $[a, +\infty[$ avec $a > 0$.

(3) Étudier la convergence uniforme sur $[0, +\infty[$.

Exercice 1.3 On définit une suite de fonctions $f_n : [0, 1] \to \mathbf{R}$ par $f_0 = 0$ et, pour tout $n \in \mathbf{N}$ et tout $x \in I = [0, 1]$,

$$f_{n+1}(x) = f_n(x) + \frac{1}{2}\left(x - (f_n(x))^2\right).$$

(1) Montrer que la suite (f_n) converge simplement sur I vers la fonction $x \mapsto \sqrt{x}$.

(2) Démontrer que, pour tout entier $n \geq 1$,

$$0 \leq \sqrt{x} - f_n(x) = \sqrt{x}\left(1 - \frac{\sqrt{x}}{2}\right)^n.$$

(3) En déduire que la convergence est uniforme sur I.

Exercice 1.4 Pour tout $n \in \mathbf{N}^*$, on définit $f_n \colon \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ par

$$g_n(x) = \sqrt{x^2 + \frac{1}{n}}.$$

Montrer que chaque f_n est de classe $\mathscr{C}^1$ et que la suite (f_n) converge uniformément sur $\mathbf{R}$. Déterminer sa limite.

Exercice 1.5 Soit, pour $n \in \mathbf{N}$, f_n la fonction définie sur $\mathbf{R}_+$ par

$$f_n(x) = \left(1 - \frac{x}{n}\right)^n \text{ si } x \in [0, n[\ \text{ et } \ f_n(x) = 0 \text{ si } x \geq n.$$

Étudier le mode de convergence de (f_n).

Exercice 1.6 Pour tout entier strictement positif n on définit la fonction

$$f_n \ : \ x \mapsto \frac{1}{n}\mathbb{1}_{[0,n]}.$$

Étudier la convergence de la suite (f_n) sur $\mathbf{R}$ puis celle de $\int_{\mathbf{R}} f_n(t)\,\mathrm{d}t$.

1.1.2. *Étude théorique.*

Exercice 1.7 Soient I un intervalle de $\mathbf{R}$ et (g_n) une suite de fonctions convexes de I dans $\mathbf{R}$. Montrer que si (g_n) converge simplement vers f, alors f est convexe sur I.

Exercice 1.8 Soit (P_n) une suite de fonctions polynômes de $\mathbf{R}$ dans $\mathbf{R}$. On suppose que cette suite converge uniformément vers une fonction f sur $\mathbf{R}$. Montrer que la fonction f est polynomiale.

Exercice 1.9 Soient I et J deux intervalles de $\mathbf{R}$. Soient (f_n) une suite de fonctions de I dans J convergeant uniformément vers une fonction $f \ : \ I \to J$.

– Montrer que si g est uniformément continue sur J, la suite de fonctions $(g \circ f_n)$ converge uniformément.
– Soit $f_n \colon \mathbf{R}_+ \to \mathbf{R}$ définie par

$$f_n(x) = x + \frac{1}{n}.$$

Montrer que la suite de fonctions (f_n) converge uniformément mais pas (f_n^2). Conclusion ?

Exercice 1.10 Soit (g_n) une suite croissante de fonctions continues sur un intervalle $I = [a, b]$ de $\mathbf{R}$. Montrer que si (g_n) converge simplement vers une fonction continue g sur I, alors la convergence est uniforme.

Exercice 1.11 Soit f_n une suite de fonctions qui converge uniformément vers 0 sur tout intervalle $I_a = [0, a]$ avec $0 < a < 1$ et soit g une fonction continue sur $[0, 1]$ nulle en 1.

– On suppose qu'il existe M tel que pour tout n on ait $\|f_n\|_I \leq M$. Montrer que la suite $g \cdot f_n$ converge uniformément vers 0 sur $I = [0, 1]$.
– On suppose désormais que $f_n(x) = n\cos^n x$ et $g(x) = \sin(x)$. Étudier la suite $g \cdot f_n$ sur $[0, 1]$ (convergence simple, convergence uniforme).

Exercice 1.12 [Théorème de Weierstraß, application]

(1) Pour tout entier n on pose $a_n = \displaystyle\int_{-1}^{1} (1 - t^2)^n\,\mathrm{d}t$ et on considère la fonction $\varphi_n \ : \ [-1, 1] \to \mathbf{R}$ définie par

$$\varphi_n(x) = \frac{1}{a_n}\left(1 - x^2\right)^n.$$

  (a) Montrer que pour tout n, $a_n \geq \dfrac{1}{n+1}$.
  (b) Montrer que pour tout $\alpha \in]0, 1]$, la suite (φ_n) converge uniformément vers 0 sur $[\alpha, 1]$.
  (c) Soit f une fonction continue nulle hors de $[-1/2, 1/2]$. On définit, pour tout $x \in \mathbf{R}$, une fonction f_n par

$$f_n(x) = \int_{-1}^{1} f(x - t)\varphi_n(t)\,\mathrm{d}t.$$

  Montrer que f_n est une fonction polynomiale sur $[-1/2, 1/2]$ nulle hors de $[-3/2, 3/2]$ et que la suite (f_n) converge uniormément vers f sur $\mathbf{R}$.
  (d) En déduire que si f est une fonction continue sur un intervalle $[a, b]$ de $\mathbf{R}$, alors f est, sur cet intervalle, limite uniforme d'une suite de fonctions polynomiales.

(2) Soit $f \ : \ [a, b] \to \mathbf{R}$ une fonction continue. On suppose que, pour tout $k \geq 0$, on a $\int_a^b f(t)t^k\,\mathrm{d}t = 0$. Montrer que f est la fonction nulle.

2. Séries de fonctions

2.1. Généralités.

(1) La somme d'une série (localement) uniformément convergente de fonctions continues est continue.
(2) Si la série $\sum f_n$ converge simplement vers la fonction f et si la série des dérivées $\sum f_n'$ converge localement uniformément vers une fonction g alors f est dérivable et $f' = g = \sum_n f_n'$.

(3) La somme d'une série de fonctions continues convergeant uniformément sur tout compact est continue.

(4) Si les fonctions $f_n : I$ (intervalle) à valeurs dans un evn de dimension finie E sont continues sur I et $\sum f_n$ converge uniformément sur tout compact vers la fonction f alors pour tous $a, b \in I$ on a $\sum_n \int_a^b f_n = \int_a^b f$ De plus, pour a fixé, la série de fonctions $x \mapsto \int_a^x f_n$ converge uniformément sur tout compact vers la fonction $x \mapsto \int_a^x f$.

(5) La convergence normale (localement normale, normale sur tout compact) entraîne la convergence uniforme (localement uniforme, uniforme sur tout compact).

Exercice 2.13 Étudier la convergence de la série $\sum f_n$ où, pour tout $x \in \mathbf{R}$ et tout $n \in \mathbf{N}^*$

$$f_n(x) = \frac{1}{n^2 + x^2}.$$

Exercice 2.14 Étudier la convergence de la série $\sum f_n$ où, pour tout $x \in \mathbf{R}$ et tout $n \in \mathbf{N}^*$

$$f_n(x) = \frac{(-1)^n}{n + x^2}.$$

Exercice 2.15 On pose $u_n(x) = (-1)^{n+1} x^{2n+2} \ln x$ pour $x \in]0, 1]$ et $u_n(0) = 0$.

(1) Calculer $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} u_n(x)$ ..

(2) Montrer que la série des u_n converge uniformément sur $[0, 1]$.

(3) En déduire l'égalité

$$\int_0^1 \frac{\ln x}{1 + x^2}\, \mathrm{d}x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{(2n+1)^2}.$$

Exercice 2.16 Soit $(a_n)_{n \in \mathbf{N}}$ une suite réelle positive et décroissante. Pour tout $n \in \mathbf{N}$, on définit une fonction u_n par :

$$u_n(x) = a_n x^n (1 - x) \quad x \in [0, 1].$$

(1) Montrer la convergence simple de la série de fonctions $\sum u_n$.

(2) Étudier la convergence normale de cette série.

(3) À quelle condition sur la suite (a_n) cette série est-elle uniformément convergente ?

Exercice 2.17 Pour $x \in \mathbf{R}$ et $n \geq 1$, on note $u_n(x) = \dfrac{\ln(1 + n^2 x^2)}{n^2 \ln(1 + n)}$.

(1) Déterminer le domaine de convergence D de la série $\displaystyle\sum_{n \geq 1} u_n(x)$.

(2) On note $S(x)$ sa somme, montrer que S est une fonction de classe C^1 sur D.

Exercice 2.18 Soit f une fonction continue sur $I = [0, 1]$. Pour tout entier n on pose $u_n(x) = x^n f(x)$. Montrer que la suite $(u_n)_{n \in \mathbf{N}}$ converge uniformément sur I si et seulement si $f(1) = 0$. Montrer que la série de terme général u_n converge uniformément sur $[0, 1]$ si et seulement si $f(1) = 0$, f est dérivable au point 1 et $f'(1) = 0$.

2.2. **Séries entières.**

Exercice 2.19 Déterminer le rayon de convergence des séries entières suivantes :

1. $\sum_n \frac{(1+i)^n z^{3n}}{n \cdot 2^n}$	**2.** $\sum_{n \geq 1} \ln\left(1 + \sin \frac{1}{n}\right) x^n$	**3.** $\sum_{n \geq 1} \left(\exp(1/n) - 1\right) x^n$
4. $\sum_n a^{\sqrt{n}} z^n,\ a > 0$	**5.** $\sum_n z^{n!}$	**6.** $\sum_n n^{\ln n} z^n$

Exercice 2.20 Soit $\sum_n a_n z^n$ et $\sum_n b_n z^n$ deux séries entières de rayon de convergence respectif ρ_1 et ρ_2. Montrer que le rayon de convergence R de la série $\sum_n a_n b_n z^n$ vérifie $R \geq \rho_1 \rho_2$. A-t-on toujours égalité ?

Exercice 2.21 Soit $f(z) = \sum_n a_n z^n$ une série entière de rayon de convergence $R > 0$ et soit $r \in]0, R[$.

(1) Montrer que, pour tout entier k, la série de fonctions $\theta \mapsto \sum_n a_n r^n e^{i(n-k)\theta}$ converge normalement sur $[0, 2\pi]$.

(2) En déduire que pour tout $k \in \mathbf{N}$, on a

$$2\pi r^k a_k = \int_0^{2\pi} f(re^{i\theta}) e^{-ik\theta} d\theta.$$

(3) Application : on suppose que $R = +\infty$ et que f est bornée sur $\mathbf{C}$. Montrer que f est constante.

Exercice 2.22 Soit (a_n) une suite de réels tel que $\sum_n a_n x^n$ soit de rayon de convergence 1. On note f la somme de cette série entière. On suppose de plus que la série numérique $\sum_n a_n$ converge et on note

$$R_n = \sum_{k=n+1}^{+\infty} a_k.$$

(1) Démontrer que, pour tout $x \in [0, 1[$ et tout $n \geq 1$, on a

$$f(x) - \sum_{k=0}^{+\infty} a_k = \sum_{k=0}^{n} a_k (x^k - 1) + (x - 1) \sum_{k=n+1}^{+\infty} R_k x^k + R_n (x^{n+1} - 1).$$

(2) En déduire que

$$\lim_{x \to 1^-} f(x) = \sum_{k=0}^{+\infty} a_k.$$

Exercice 2.23 Soit $S(x) = \sum_{n \geq 0} a_n x^n$ une série entière de rayon de convergence 1. On suppose de plus que $S(x)$ admet une limite lorsque x tend vers 1^- et on note ℓ cette limite. On suppose enfin que $a_n = o(1/n)$.

Pour $N \in \mathbf{N}$ et $x \in [0, 1]$, on note

$$A_n(x) = S(x) - \ell,\ B_N(x) = \sum_{n=0}^{N} (1 - x^n) a_n,\ C_N(x) = \sum_{n=N+1}^{+\infty} a_n x^n.$$

(1) Vérifier que $\sum_{n=0}^{N} a_n - \ell = A_N(x) + B_N(x) - C_N(x)$.

(2) Soit $\varepsilon > 0$. Démontrer qu'il existe un entier N_0 tel que, pour tout $N \geq N_0$,

$$|C_N(x)| \leq \frac{\varepsilon}{N(1 - x)}.$$

(3) Démontrer que la série $\sum_n a_n$ converge et que sa somme vaut ℓ.

Exercice 2.24 Soit $f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} e^{-n} e^{n^2 ix}$.

(1) Justifier que f est une fonction de classe C^∞ sur $\mathbf{R}$.

(2) Montrer que, pour chaque k, $\frac{|f^{(k)}(0)|}{k!} \geq k^k e^{-k}$.

(3) En déduire que f n'est pas développable en série entière en 0.