SUITES ET SÉRIES DE FONCTIONS

1. Soit (f_n) une suite de fonctions continues sur $\mathbb{R}$, convergeant uniformément vers *f*. Étudier la convergence simple puis la convergence uniforme de la suite $\left(f_n \circ f_n\right)$.

2. Soit (f_n) une suite de fonctions *k*-lipschitziennes, convergeant simplement sur $[a,b]$ vers une fonction *f*. Prouver que *f* est *k*-lipschitzienne, et que la convergence est uniforme.

3. <u>Théorème de Dini</u> : Soit *K* un compact d'un e.v.n. *E*, et (f_n) une suite croissante de fonctions numériques continues sur *K*, convergeant simplement vers une fonction continue *f*. Le théorème de Dini affirme que cette convergence est uniforme.

a. Prouver qu'une intersection décroissante de fermés non vides inclus dans *K* est non vide.

b. On fixe $\varepsilon > 0$, et on pose $K_n = \left\{x \in K \ / \ f_n(x) \leq f(x) - \varepsilon\right\}$. Prouver que la suite (K_n) est une suite décroissante de fermés, d'intersection vide.

c. Conclure.

4. On note *E* l'espace des fonctions continues sur $[0,1]$ à valeurs dans $\mathbb{C}$, que l'on munit de la norme $\| \ \|_\infty$ de la convergence uniforme. Soit (f_n) une suite de Cauchy d'éléments de *E*.

a. Prouver que la suite (f_n) converge simplement sur $[0,1]$ vers une certaine fonction *f*.

b. Prouver que la convergence de la suite (f_n) est uniforme.

c. Prouver que *E* est complet.

5. Soit (f_n) une suite de fonctions périodiques de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{C}$, convergeant simplement vers une certaine fonction *f*.

a. On suppose toutes les f_n *T*-périodiques. Prouver que *f* est *T*-périodique.

b. On suppose que, pour tout entier *n*, la fonction f_n est T_n-périodique, et que la suite (T_n) converge vers une certaine limite non nulle *T*. Quelles sont les hypothèses naturelles à imposer permettant d'affirmer que *f* est *T*-périodique ?

c. On suppose que l'on se place sous les hypothèses inventées dans la question **b.**, mais on ne suppose plus la suite (T_n) convergentes. En revanche, on suppose que les T_n sont toutes dans un même segment $[a,b]$ de $\mathbb{R}$, avec $a > 0$. Prouver que *f* est périodique.

d. Prouver que la conclusion de la question **c.** reste vraie en supposant que les T_n sont toutes dans un même intervalle de la forme $]0,b]$.

e. On pose, pour *x* réel :

$$S_N(x) = \sum_{n=1}^{N} \frac{\cos \frac{x}{n}}{2^n} \quad \text{et} \quad S(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\cos \frac{x}{n}}{2^n}.$$

Prouver que chaque fonction S_N est périodique, que la suite $(S_N)_N$ converge uniformément vers la fonction continue *S*, mais que *S* n'est pas périodique.

6. On définit par récurrence sur $I = [-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}]$ une suite de fonctions en posant $f_0 = 0$ et, pour $n \geq 0$:

$$f_{n+1}(x) = \frac{x^3}{3} + \int_0^x f_n^2(t)\,\mathrm{d}t\,.$$

a. Prouver que $\left|f_n(x)\right| \leq \frac{5}{6}$ pour tout *x* de *I*.

b. Prouver que pour tout $n \geq 1$, on a $\| f_{n+1} - f_n \|_\infty \leq \dfrac{5}{6} \| f_n - f_{n-1} \|_\infty$

c. Qu'en déduire concernant la série de fonctions $\sum (f_{n+1} - f_n)$?

Prouver que la suite (f_n) converge uniformément sur I. Soit f sa limite.

d. Prouver que f est une solution sur I de l'équation différentielle $y' = x^2 + y^2$ satisfaisant à $f(0) = 0$.

7. Pour $x > 0$, on pose $\psi(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \dfrac{(-1)^{n-1}}{n^x}$. On pose de même, pour $x > 1$, $\zeta(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \dfrac{1}{n^x}$.

a. Donner une relation reliant $\psi(x)$ et $\zeta(x)$ pour $x > 1$.

b. Prouver que ψ est de classe C^∞ sur $\mathbb{R}^{+*}$ et donner ses dérivées successives (attention !).

c. Retrouver l'équivalent de ζ au voisinage de 1.

On pose, pour x élément de $]1,2]$ et $n > 0$, $u_n(x) = \dfrac{1}{n^x} - \displaystyle\int_n^{n+1} \dfrac{\mathrm{d}t}{t^x}$.

d. Prouver que la série $\sum u_n$ converge normalement sur $]1,2]$ et exprimer sa somme à l'aide de la fonction ζ.

b. Déterminer la limite en 1 de la fonction u_n et en déduire $\lim_{x \to 1+} \left(\zeta(x) - \dfrac{1}{x-1} \right)$.

8. On pose, quand c'est possible, $f(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \dfrac{\sin nx}{n^2 \ln n}$ et $g(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \dfrac{\cos nx}{n \ln n}$.

a. Donner le domaine de définition de f.

b. Prouver que pour tout x de $\mathbb{R} - 2\pi\mathbb{Z}$ et tous entiers p et q avec $q > p$, on a $\left| \sum_{k=p+1}^{q} \cos kx \right| \leq \dfrac{1}{\sin x/2}$. En déduire que la série définissant $g(x)$ converge pour tout x de $\mathbb{R} - 2\pi\mathbb{Z}$, et que la convergence est uniforme sur tout intervalle de la forme $[\alpha, 2\pi - \alpha]$ avec $\alpha > 0$. Qu'en conclure concernant f ?

c. En écrivant $g(x) = \sum_{n=1}^{[\frac{1}{x}]} \dfrac{\cos nx}{n \ln n} + \sum_{n=[\frac{1}{x}]}^{+\infty} \dfrac{\cos nx}{n \ln n}$ (les crochets désignant la partie entière), déterminer la limite de g en 0.

9. Soit $\sum c_n z^n$ une série entière de rayon de convergence $R > 0$, f sa fonction somme définie sur le disque $D(0,R)$ du plan complexe. Soit a un élément de $D(0,R)$, et r un réel tel que $|a| < r < R$.

a. Pour θ dans $[0, 2\pi]$, représenter $f(re^{i\theta})$ et $\dfrac{1}{1 - \frac{a}{r} e^{-i\theta}}$ sous forme de séries.

En déduire un développement en série de $g(\theta) = \dfrac{f(re^{i\theta})}{1 - \frac{a}{r} e^{-i\theta}}$.

b. Prouver que la convergence de la série ainsi obtenue est normale sur $[0, 2\pi]$, et en déduire la formule intégrale de Cauchy :

$$f(a) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{f(re^{i\theta})}{1 - \frac{a}{r} e^{-i\theta}} \mathrm{d}\theta.$$

c. Soit réciproquement une fonction continue f sur $D(0,R)$, qui pour tous a et r vérifiant $|a| < r < R$, satisfait à la formule intégrale précédente.

Grâce au développement en série de $\dfrac{1}{1-\dfrac{a}{r}e^{-i\theta}}$, puis à une intégration terme à terme bien justifiée, prouver que f est développable en série entière sur $D(0,R)$.

d. Soit (f_n) une suite de fonctions définies sur $D(0,R)$, développables en série entière sur ce disque, et convergeant uniformément sur tout disque $D(0,r)$ avec $r < R$, vers une fonction f.

Prouver que f est définie et continue sur $D(0,R)$, et qu'elle vérifie, pour tous a et r vérifiant $|a| < r < R$, la formule intégrale de Cauchy. Conclure.