Agregation Interne de Mathématiques

Suites et Séries de Fonction 2011-2012

I .

1)

$$U_n : \quad [0,1] \to \mathbb{R}$$
$$x \mapsto \frac{2^n.x}{1+n2^nx^2}$$

Etudier la convergence simple et uniforme de la suite (U_n).

2) Même question que 1 avec la suite :

$$U_n : \quad [0,1] \to \mathbb{R}$$
$$x \mapsto n.x^n.\sin(\pi x)$$

II .

Calculer $\lim_{n\to\infty}\left(\int_0^1 (1+x)\frac{ne^x+xe^{-x}}{n+x}dx\right)$

III .

1) $\lambda \in [0,1]$, $(U_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite définie par $U_0 = 0$ et $\forall n \in \mathbb{N}$:

$U_{n+1} = U_n + \frac{1}{2}(\lambda - U_n^2)$. Etudier la suite (U_n).

2) $(P_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite de fonctions définies par :

$$P_0 : \quad [0,1] \to \mathbb{R}$$
$$x \mapsto 0$$

et $\forall n \in \mathbb{N}$:

$$\begin{aligned} P_{n+1} : \quad & [0,1] \to \mathbb{R} \\ & x \mapsto P_n(x) + \frac{1}{2}\left(x - (P_n(x))^2\right) \end{aligned}$$

Etudier la convergence simple et uniforme de la suite (P_n).

IV . Premier théorème de Dini.

(E,d) espace métrique. $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ suite de fonctions continues et croissantes d'élément de $\mathfrak{C}(E,\mathbb{R})$, et qui converge simplement vers une fonction $f \in \mathfrak{C}(E,\mathbb{R})$. Pour $\epsilon > 0$, on pose $F_{n,\epsilon} = \{x \in E \ \ t.q. \ \ f(x) - f_n(x) \geq \epsilon\}$.

1) Montrer que $(F_{n,\epsilon})_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite décroissante de compactes.

2) Montrer que $\bigcap_{n\in\mathbb{N}}(F_{n,\epsilon}) = \emptyset$.

3) En déduire que la suite $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge uniformement vers f sur E.

4) Application: Retrouver le résultat du III.2.

V . Deuxième théorème de Dini.

1) Soient $a, b \in \mathbb{R}$ avec $a < b$, et pour $n \in \mathbb{N}$, $f_n : [a,b] \to \mathbb{R}$ fonction croissante. On suppose que la suite $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge (simplement) vers une fonction $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ continue. Alors la suite $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge unifromement vers f sur $[a,b]$.

2) Application:

$$\begin{aligned} f_n : \quad & \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R} \\ & x \mapsto (1 + \frac{x}{n})^n \end{aligned}$$

la suite $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge uniformement vers la fonction exponentielle sur tout segment de $\mathbb{R}_+$.

VI . Théorème d'approximation de Weierstross (produit de convolution).

1) Montrer que $\forall n \in \mathbb{N}$, il existe $a_n > 0$ t.q. $a_n . \int_{-1}^{1}(1-x^2)^n dx = 1$.

2) Calculer $\int_0^1 (1-x^2)^n x dx$, et en déduire que $0 < a_n < n+1$.

3) soit $\delta > 0$. Montrer que $\left(\int_{[-1,-\delta]\cup[\delta,1]} a_n(1-x^2)^n dx\right) \to_{n\to+\infty} 0$.

4) soit $f \in \mathfrak{C}([0,1];\mathbb{R})$ dont le support est inclus dans $[0,1]$ et

$$K_n : \quad [-1,1] \to \mathbb{R}$$
$$x \mapsto a_n(1-x^2)^n$$

et soit :

$$P_n = f * K_n : \quad [0,1] \to \mathbb{R}$$
$$x \mapsto \int_{-1}^{1} f(x-t).K_n(t)dt$$

a) Montrer que la suite $(P_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge uniformement vers f sur $[0,1]$.

b) Montrer que $\forall x \in [0,1]$ $P_n(x) = \int_0^1 K_n(x-t).f(t)dt$ et en déduire que P_n est une fonction polynomiale.

5) $g : [a,b] \to \mathbb{R}$ fonction continue. Montrer que g est limite uniforme sur $[a,b]$ d'une suite de fonction polynomiale.

VII .

1) a) $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ continue. On suppose que $\forall\ k \in \mathbb{N}$:

$\int_0^1 t^k.f(t)dt = 0$. Montrer que $f = 0$.

b) On munit $E = \mathfrak{C}([0,1];\mathbb{R})$ du produit scalaire :

$$< .,. >: \quad E \times E \to \mathbb{R}$$
$$(f,g) \mapsto \int_0^1 f(t)g(t)dt$$

Déduire de a) que le sous-espace vectoriel de E de fonctions polynomiales définies sur $[0,1]$ n'a pas de supplémentaire orthogonale dans l'espace préhilbertien $(E, <.,.>)$.

2) Montrer que $\forall\ n \in \mathbb{N} : \int_0^{+\infty} t^n.e^{-(1-i)t}dt = 0$.

Que peut-on conclure ?

VIII . Pour quelle valeur de x la série suivante converge.

-Calculer dans ce cas sa somme :

a) $\sum \frac{1}{n^2}\left(x^n + (\frac{-x}{1-x})^n\right)$.

b) $\sum \frac{1}{n^2}\left(x^n + (1-x)^n\right)$.