XMP 2009-2010

SUITES NUMÉRIQUES

1. Étudier les suites définies par :

a. $u_{n+1} = \sqrt{1+u_n}$ **b.** $u_{n+1} = \sqrt{2-u_n}$ **c.** $u_{n+2} = \sqrt{u_{n+1}u_n}$ **d.** $u_n = \sum_{p=1}^{n} \sin\left[\frac{p}{n^2}\right]$

e. $u_n = \left[\frac{(2n)!}{n!n^n}\right]^{\frac{1}{n}}$ **f.** $u_{n+1} = u_n - u_n^2$ **g.** $u_{n+1} = \ln\left(\frac{e^{u_n}-1}{u_n}\right)$.

2. Déterminer la limite l de la suite (u_n) définie par :

$u_1 = 1$ et $\forall n \in \mathbf{N}^*,\ u_{n+1} = (n + u_n^{\ n-1})^{\frac{1}{n}}$ (il pourra être bon d'envisager une suite auxiliaire).

Déterminer ensuite un équivalent de $u_n - l$.

3. Prouver que l'équation $x^n - nx + 1 = 0$ possède, pour tout entier n supérieur ou égal à 3, une unique racine c_n dans]0,1[. Déterminer la limite de la suite (c_n), et donner un équivalent de $c_n - \lim c_n$.

(4.) On donne deux réels strictement positifs u_0 et u_1, et on construit par récurrence une suite en posant, pour tout entier n

$$u_{n+2} = \sqrt{u_{n+1}} + \sqrt{u_n}\ .$$

a. Déterminer les seules limites possibles de la suite (u_n) et prouver que l'une peut être exclue.

b. On pose $\Delta_n = |u_n - L|$ où L est la seule limite possible de la suite (u_n). Prouver l'existence d'un réel k tel que $0 < k < 1/2$, et vérifiant pour tout n : $\Delta_{n+2} \le k(\Delta_{n+1} + \Delta_n)$.

c. On considère une suite (δ_n) définie par $\delta_0 = \Delta_0$, $\delta_1 = \Delta_1$, et $\forall n,\ \delta_{n+2} = k(\delta_{n+1} + \delta_n)$.
Etudier la limite de la suite (δ_n), et conclure.

5. On définit une suite (u_n) par la donnée de u_0 dans $\mathbf{R}$ et la relation de récurrence : $u_{n+1} = \frac{u_n}{3-2u_n}$.

a. On suppose momentanément que u_0 est tel que la suite soit entièrement définie.
Quelles sont ses limites possibles ?
Prouver que si $u_0 \neq 1,\ u_n \neq 1\, \forall n$. On pose alors $v_n = \frac{u_n}{u_n - 1}$.
Quelle est la nature de la suite (v_n) ?
Achever alors l'étude de la suite (u_n).

b. Pour quelles valeurs de u_0 la suite (u_n) est-elle entièrement définie ?

6. **a.** Montrer que l'ensemble des entiers n tels que $2^{n^2} < (4n)!$ est fini.

b. Calculer $\lim_n \left(\lim_k \frac{n^k}{(n+1)^k}\right)$ et $\lim_k \left(\lim_n \frac{n^k}{(n+1)^k}\right)$.

c. Les crochets désignant la partie entière et α un réel, calculer $\lim_n \frac{[\alpha]+[2\alpha]+\ldots+[n\alpha]}{n^2}$.

d. Prouver que la suite $\left(\sin(2+\sqrt{3})^n\pi\right)$ tend vers 0 !

SÉRIES

1. Étudier les séries de termes généraux suivants :

a. $\sqrt[n]{n+1}-\sqrt[n]{n}$ **b.** $\dfrac{e^{-1/n}}{\sqrt[n]{n+1}}$ **c.** $e^{-(\ln\ln n)^3}$ **d.** $\left(\dfrac{\pi}{2}\right)^{3/5}-(\mathrm{Arctg}\,n)^{3/5}$ **d'.** $\dfrac{\mathrm{ch}\,n}{\mathrm{ch}\,2n}$

e. $\sqrt{\sin\dfrac{1}{n}}-\sqrt{\sin\dfrac{1}{n+1}}$ **f.** $\left(1+\dfrac{1}{n}\right)^n-e$ **g.** $\dfrac{(-1)^n}{\ln n}$ **h.** $\arccos\left(\dfrac{n^3+1}{n^3+2}\right)$ **h'.** $\dfrac{(3n+3)x^{3n+1}}{\ln n(1+x^n)}$

i. $\ln\left[\dfrac{\sqrt{n}+(-1)^n}{\sqrt{n+a}}\right]$ **j.** $\dfrac{1}{(\ln n)^{\ln n}}$ **k.** $\mathrm{Arcsin}\left(\dfrac{\sqrt{2}}{2}+\dfrac{(-1)^n}{n^\alpha}\right)-\dfrac{\pi}{4}$ **k'.** $u_n=\dfrac{(-1)^n}{n^{3/4}+(-1)^n\sqrt{n}(\ln n)^{1/3}}$

l. $\sin\left(\dfrac{n^3+1}{n^2+1}\pi\right)$ **m.** a^{-n^α} **n.** $\dfrac{\sin n}{\sqrt{n^3+n\cos\frac{1}{n}}}$ **o.** $\dfrac{\sum_{k=1}^{n}\sin\frac{1}{k^2}}{\sum_{k=1}^{n}\sqrt{k}}$ **o'.** $\left(1-\dfrac{1}{\ln n}\right)^{\ln^p n}$

p. $n!x^{n^2}$ (x réel) **q.** $\dfrac{(-1)^n}{n^\alpha+(-1)^n}$ **r.** $\dfrac{1}{n\ln n\ln\ln^2 n}$ **s.** $\dfrac{(-1)^n}{\ln n+\sin(2n\pi/3)}$

2. Soit $\sum a_n$ une série *convergente* à termes positifs. Étudier les séries :

$$\sum\frac{a_n}{1+a_n}\ ,\ \sum\frac{a_n}{1-a_n}\ ,\ \sum a_n^2\ ,\ \sum\frac{\sqrt{a_n}}{n}$$

3. Soit $\sum a_n$ une série divergente à termes positifs. Étudier les séries :

$$\sum\frac{a_n}{1+a_n}\ ,\ \sum a_n^2\ ,\ \sum\frac{a_n}{1+na_n}$$

4. Convergence et, s'il y a lieu, somme des séries suivantes :

$$\sum\frac{4n-3}{n(n^2-4)}\ ,\ \frac{[\sqrt{n+1}]-[\sqrt{n}]}{n}\ ,\ \sum\frac{n^4+2n-1}{n!}\ ,\ \sum\sum_{k=1}^{n-1}\frac{1}{[k(n-k)]^\alpha}\ ,\ \sum\left[\frac{\pi}{4}-\left(1-\frac{1}{3}+\ldots+\frac{(-1)^n}{2n+1}\right)\right]$$

(5.) Soit (u_n) une suite de réels positifs tendant vers $+\infty$ en croissant. Étudier, en minorant par une intégrale, les séries :

$$\sum\frac{u_{n+1}-u_n}{u_n}\ \text{ puis }\ \sum\frac{u_{n+1}-u_n}{u_{n+1}}.$$

6. Convergence et somme (s'il y a lieu !) de la série de terme général : $u_n=\ln(n+2)+a\ln(n+1)+b\ln n$.

7. On considère la série de terme général $u_n=\dfrac{4^n}{n\binom{2n}{n}}$ Le but de cet exercice est d'étudier cette série de trois façons.

a. Donner une étude directe de la série $\sum u_n$ grâce à un équivalent de u_n.

b. En faisant une comparaison logarithmique (?) de u_n avec le terme général d'une série de Riemann quelconque *a priori*, puis en choisissant l'exposant intelligemment, donner le comportement de $\sum u_n$.

(c.) Déterminer le développement limité à l'ordre 2 de $\ln\left(\dfrac{u_{n+1}}{u_n}\right)$, et en déduire l'existence d'un réel non nul a et d'un réel α tels que $u_n\approx\dfrac{a}{n^\alpha}$. Conclure.

8. Étudier les séries de termes généraux u_n et v_n suivantes :

a. $u_n = n^{\alpha}\prod_{k=2}^{n}\left(1+\frac{(-1)^k}{k}\right)$.

(b.) $v_n = n^{\alpha}\prod_{k=2}^{n}\left(1+\frac{(-1)^k}{\sqrt{k}}\right)$

9. Soit (u_n) une suite de réels positifs telle que la suite $\left(\sqrt[n]{u_n}\right)$ ait une limite l dans $\mathbf{R}^+ \cup \{+\infty\}$.
Discuter, suivant la valeur de l, la nature de la série $\sum u_n$.

Montrer que cette règle (dite "de Cauchy") est plus précise que celle de d'Alembert, en ce sens que si la suite $\left(\frac{u_{n+1}}{u_n}\right)$ a une limite l, alors la suite $\left(\sqrt[n]{u_n}\right)$ converge aussi vers l, mais que la réciproque est inexacte.

10. Soit E une algèbre normée complète. Prouver que l 'ensemble U de ses éléments inversibles est un ouvert. Prouver que pour a élément de U, et h assez petit, on a $(a+h)^{-1} = a^{-1} - a^{-1}ha^{-1} + \mathrm{o}(\|h\|)$.

11. Étudier la *suite* de terme général $u_n = \frac{n^a n!}{a(a+1)\dots(a+n)}$.

12. On se donne une fonction f de classe C^1 de $[a,+\infty[$ dans $\mathbf{C}$, telle que f' soit sommable sur $[a,+\infty[$. Pour n entier assez grand, on pose $d_n = \int_{n-1}^{n} f(t)\mathrm{d}t - f(n)$. Prouver que $d_n = \int_{n-1}^{n}(n+1-t)f'(t)\mathrm{d}t$. En déduire la convergence absolue de la série $\sum d_n$, puis une condition nécessaire et suffisante de convergence de la série $\sum f(n)$.

<u>Applications</u> : Étudier la convergence des séries $\sum \frac{\cos\ln n}{n}$ et $\sum \frac{\cos\sqrt{n}}{n}$.

13. Soit une suite (u_n) de réels strictement positifs telle que $\frac{u_{n+1}}{u_n} = 1 - \frac{a}{n} + \mathrm{o}\left(\frac{1}{n}\right)$. Prouver, par comparaison à une série de Riemann, que la série $\sum u_n$ converge pour $a>1$, et diverge pour $a<1$ (règle de Raabe-Duhamel).

On suppose ici que $a=1$, et que le quotient $\frac{u_{n+1}}{u_n}$ possède un développement limité au second ordre. Prouver, en la comparant à une série de la forme $\sum \frac{1}{n+\alpha}$ que la série diverge.

14. Prouver, pour tout réel x de $]-1,1[$, la convergence de la série $\sum (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{2n+1}$ et prouver que sa somme est égale à $\mathrm{Arctg}\, x$. Donner une majoration du reste de cette série.

<u>Application</u> : Prouver la formule de John Machin, selon laquelle $\frac{\pi}{4} = 4\mathrm{Arctg}\frac{1}{5} - \mathrm{Arctg}\frac{1}{239}$. À quel ordre doit-on arrêter les sommes partielles pour obtenir une valeur approchée de π avec un million de décimales exactes ?

15. Peut-on empiler 100 pièces de 1 € de telle sorte que la dernière soit entièrement en porte à faux (c'est à dire que sa projection sur un plan horizontal ne se superpose pas avec la première pièce) ?

16. **a.** Prouver la convergence de la série $\sum \frac{1}{n\ln^2 n}$, ainsi que l'encadrement $\frac{1}{\ln(n+1)} \le S - S_n \le \frac{1}{\ln n}$.

b. Prouver que si la somme partielle S_n fournit une approximation de la somme totale S à 10^{-3} près, alors $n > 10^{434}$. Temps de calcul nécessaire à un ordinateur faisant un milliard d'opérations à la seconde ?

c. Calculer S à 10^{-3} près.

7. Prouver que l'équation $\tan x = x$ possède une unique solution x_n dans tout intervalle de la forme $[n\pi, n\pi + \pi/2[$, et donner un développement asymptotique à 3 termes de x_n .

8. **a.** On se donne un réel $u_0 > 0$, et on définit une suite (u_n) par : $\forall n \in \mathbf{N},\ u_{n+1} = \ln(1+u_n)$. Déterminer la limite de la suite (u_n) , et donner un équivalent de u_n en appliquant Cesáro à $v_n = \dfrac{1}{u_{n+1}} - \dfrac{1}{u_n}$.

Que dire de la suite (u_n) si $u_0 < 0$?

b. De même, on choisit un réel $u_0 \in]0, \pi[$ et on définit une suite (u_n) par $\forall n \in \mathbf{N},\ u_{n+1} = \sin u_n$.
Étudier la suite (u_n) , et en donner un équivalent.

9. On considère la suite (u_n) définie par :

$$u_0 = \frac{11}{2},\ u_1 = \frac{61}{11},\ \text{et}\ \forall n \in \mathbf{N},\ u_{n+2} = 111 - \frac{1130}{u_{n+1}} + \frac{3000}{u_n u_{n+1}}.$$

a. A partir du calcul des premiers termes de la suite, postuler la forme générale des u_n .

b. Quelle limite une calculatrice suggère-t-elle pour la suite (u_n) ?

c. Calculer la limite de la suite (u_n) . Que s'est-il passé ?

(10.) **a.** Prouver qu'une suite de réels possédant une unique valeur d'adhérence dans $\mathbf{R} \cup \{-\infty, +\infty\}$ converge vers cette valeur d'adhérence.

b. Soient (p_n) et (q_n) deux suites d'entiers positifs telles que la suite de rationnels $\left(\dfrac{p_n}{q_n}\right)$ converge vers un irrationnel α. Prouver que ces deux suites tendent vers $+\infty$.

c. On définit sur [0,1] une fonction *f* par $f(x) = 0$ si *x* est irrationnel, et $f(x) = \dfrac{1}{q}$ si *x* est un rationnel admettant la représentation irréductible $\dfrac{p}{q}$. Étudier les points de continuité de *f*.