1

Suites et séries numériques

Une suite d'éléments de $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$ est une application définie sur $\mathbb{N}$ (ou une partie de $\mathbb{N}$) à valeurs dans $\mathbb{K}$. On note $u = (u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ou $u = (u_n)_{n\geq n_0}$ une telle suite.

Pour simplifier, on suppose que les suites sont définies sur $\mathbb{N}$ et on note $\mathbb{K}^{\mathbb{N}}$ l'ensemble des suites d'éléments de $\mathbb{K}$.

Si $(u_n)_{n\geq n_0}$ est une suite d'éléments de $\mathbb{K}$, étudier la série de terme général u_n revient à étudier la suite $(S_n)_{n\geq n_0}$ des sommes partielles définie par :

$$\forall n \geq n_0,\ S_n = \sum_{k=n_0}^{n} u_k.$$

On notera plus simplement $\sum u_n$ une telle série et on parlera de série numérique.

Pour tout entier $n \geq n_0$, on dit que u_n est le terme d'indice n et s_n la somme partielle d'indice n de cette série.

On supposera a priori que $n_0 = 0$.

1.1 Suites convergentes ou divergentes

Exercice 1 *En utilisant la définition, montrer que la suite* $u = ((-1)^n)_{n\in\mathbb{N}}$ *est divergente.*

Solution. Si cette suite converge vers un réel ℓ, la suite $|u| = (|(-1)^n|)_{n\in\mathbb{N}}$ qui est constante égale à 1 va converger vers $|\ell|$ et nécessairement $\ell = \pm 1$.
En écrivant que pour $\varepsilon = 1$, il existe un entier n_0 tel que :

$$\forall n \geq n_0,\ |(-1)^n - \ell| < 1,$$

et en prenant $n \geq n_0$ de la même parité que ℓ, on aboutit à $2 < 1$ qui est impossible. La suite u est donc divergente.

Exercice 2 *Montrer qu'une suite à valeurs dans* $\mathbb{Z}$ *converge si, et seulement si, elle est stationnaire.*

Solution. Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite à valeurs dans $\mathbb{Z}$ convergente vers $\ell \in \mathbb{R}$. Il existe un entier n_0 tel que :

$$\forall n \geq n_0,\ |u_n - u_{n_0}| \leq |u_n - \ell| + |\ell - u_{n_0}| < \frac{1}{2}$$

ce qui implique que :

$$\forall n \geq n_0,\ u_n = u_{n_0}$$

puisque les u_n sont entiers. La suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est donc stationnaire et $\ell \in \mathbb{Z}$.
La réciproque est évidente.

Exercice 3 *Montrer que si* $f : [1, +\infty[\to \mathbb{R}$ *est une fonction telle que la fonction* $g : x \longmapsto xf(x)$ *soit minorée par un réel* $\lambda > 0$*, alors la série* $\sum f(n)$ *est divergente.*

Solution. On a :

$$S_{2n} - S_n = \sum_{k=1}^{n} f(n+k) \geq \lambda \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{n+k} \geq \lambda \frac{n}{2n} = \frac{\lambda}{2} > 0$$

et la suite $(S_n)_{n\in\mathbb{N}}$ diverge.

Exercice 4 *Montrer que pour tout $\alpha \leq 1$, la série $\sum \frac{1}{n^\alpha}$ est divergente.*

Solution. Il suffit d'appliquer le résultat précédent à

$$f : x \longmapsto \frac{1}{x^\alpha}$$

avec $xf(x) = x^{1-\alpha} \geq 1$ pour $x \geq 1$.

Exercice 5 *Montrer que pour tout $\alpha < 1$ et tout $\beta \in \mathbb{R}$, la série $\sum \frac{1}{n^\alpha (\ln(n))^\beta}$ est divergente.*

Solution. Il suffit d'appliquer le résultat précédent à

$$f : x \longmapsto \frac{1}{x^\alpha (\ln(x))^\beta}$$

avec $xf(x) = \frac{x^{1-\alpha}}{(\ln(x))^\beta} \underset{x\to+\infty}{\to} +\infty$, donc $xf(x) \geq 1$ pour x assez grand.

Exercice 6 *Montrer que la suite $u = (\tan(n))_{n\in\mathbb{N}}$ est divergente.*

Solution. Supposons que $\lim\limits_{n\to+\infty} (\tan(n)) = \ell$. Avec :

$$\tan(n+1) = \frac{\tan(n) + \tan(1)}{1 - \tan(n)\tan(1)},$$

on déduit que $\ell = \frac{\ell + \tan(1)}{1 - \ell \tan(1)}$ et $\tan(1)\left(1 + \ell^2\right) = 0$ qui est impossible.

Exercice 7 *Montrer que les suites réelles $u = (\sin(n))_{n\in\mathbb{N}}$ et $v = (\cos(n))_{n\in\mathbb{N}}$ sont divergentes.*

Solution. Supposons que $\lim\limits_{n\to+\infty} (\sin(n)) = \ell$. Avec :

$$\sin(n+1) + \sin(n-1) = 2\sin(n)\cos(1),$$

on déduit que $2\ell = 2\ell\cos(1)$, ce qui impose $\ell = 0$ puisque $\cos(1) \neq 1$.
Avec :

$$\sin(n+1) = \cos(n)\sin(1) + \sin(n)\cos(1),$$

on déduit que $\lim\limits_{n\to+\infty} (\cos(n)\sin(1)) = 0$, ce qui entraîne $\lim\limits_{n\to+\infty} (\cos(n)) = 0$ puisque $\sin(1) \neq 0$, mais ce dernier résultat est incompatible avec $\cos^2(n) + \sin^2(n)$.

Exercice 8 *Étudier, de manière plus générale, les suites $u = (\sin(n\theta))_{n\in\mathbb{N}}$ et $v = (\cos(n\theta))_{n\in\mathbb{N}}$, où θ est un réel fixé.*

Solution. Si $\theta = k\pi$, où k est un entier relatif, on a alors pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n = 0$ et $v_n = (-1)^{nk}$. La suite u est donc convergente et la suite v est convergente pour k pair et divergente pour k impair.
On suppose maintenant que $\theta \notin \pi\mathbb{Z}$. Si $\lim\limits_{n\to+\infty} (\sin(n\theta)) = \ell$, avec :

$$\sin((n+1)\theta) + \sin((n-1)\theta) = 2\sin(n\theta)\cos(\theta),$$

on déduit que $2\ell = 2\ell\cos(\theta)$, ce qui impose $\ell = 0$ puisque $\cos(\theta) \neq 1$ pour $\theta \notin \pi\mathbb{Z}$. Puis avec :

$$\sin((n+1)\theta) = \cos(n\theta)\sin(\theta) + \sin(n\theta)\cos(\theta),$$

on déduit que $\lim\limits_{n\to+\infty} (\cos(n\theta)\sin(\theta)) = 0$, ce qui entraîne $\lim\limits_{n\to+\infty} (\cos(n\theta)) = 0$ puisque $\sin(\theta) \neq 0$ pour $\theta \notin \pi\mathbb{Z}$. Mais ce dernier résultat est incompatible avec $\cos^2(n\theta) + \sin^2(n\theta) = 1$.
Si $\lim\limits_{n\to+\infty} (\cos(n\theta)) = \ell$, avec :

$$\cos((n+1)\theta) = \cos(n\theta)\cos(\theta) - \sin(n\theta)\sin(\theta),$$

on déduit que $\lim\limits_{n\to+\infty} \sin(n\theta) = \frac{\ell(\cos(\theta) - 1)}{\sin(\theta)}$, ce qui contredit la divergence de u.

1.2 Valeurs d'adhérence

Définition 1 *On dit qu'un scalaire a est valeur d'adhérence de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ s'il est limite d'une suite extraite de $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$.*

Exercice 9 *Montrer qu'une suite convergente a une unique valeur d'adhérence. Autrement dit : si une suite est convergente, alors toute suite extraite converge vers la même limite.*

Solution. Supposons que $\lim\limits_{n\to+\infty}(u_n)=\ell$. On se donne une application $\varphi:\mathbb{N}\to\mathbb{N}$ strictement croissante et un réel ε strictement positif. On a alors :

$$\exists n_0\in\mathbb{N}\mid\forall n\geq n_0,\ |u_n-\ell|<\varepsilon$$

et :

$$\forall n\geq n_0,\ \varphi(n)\geq n\geq n_0$$

ce qui implique que :

$$\forall n\geq n_0,\ \left|u_{\varphi(n)}-\ell\right|<\varepsilon.$$

La suite $\left(u_{\varphi(n)}\right)_{n\in\mathbb{N}}$ est donc convergente vers ℓ.

L'exercice qui suit nous montre que la réciproque est fausse.

Exercice 10 *Montrer que la suite $u=\left(n^{(-1)^n}\right)_{n\in\mathbb{N}}$ admet 0 comme unique valeur d'adhérence et est divergente.*

Solution. De $\lim\limits_{n\to+\infty}u_{2n+1}=\lim\limits_{n\to+\infty}\dfrac{1}{2n+1}=0$, on déduit que 0 est une valeur d'adhérence de u.
Si $\ell=\lim\limits_{n\to+\infty}u_{\varphi(n)}$ est une valeur d'adhérence non nulle de u, où $\varphi:\mathbb{N}\to\mathbb{N}$ est strictement croissante, on a alors $\ell>0$ (puisque $u_n>0$ pour tout n) et :

$$|\ln(\ell)|=\lim_{n\to+\infty}\left|\ln\left(u_{\varphi(n)}\right)\right|=\lim_{n\to+\infty}\left|(-1)^{\varphi(n)}\varphi(n)\right|=\lim_{n\to+\infty}\varphi(n)=+\infty,$$

ce qui est impossible. Donc 0 est l'unique valeur d'adhérence de u.
Et cette suite est divergente puisque non majorée ($u_{2n}=2n$).

Exercice 11 *Montrer qu'une suite périodique convergente est nécessairement constante.*

Solution. Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite périodique convergente vers ℓ et périodique de période p où p est un entier strictement positif.
Pour tout entier naturel k, la suite extraite $(u_{pn+k})_{n\in\mathbb{N}}$ est constante de valeur commune u_k et convergente vers ℓ. On a donc $u_k=\ell$ pour tout $k\in\mathbb{N}$.
La réciproque est évidente.

Exercice 12 *Montrer que si $u=(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite complexe telle que les trois suites extraites $(u_{2n})_{n\in\mathbb{N}}$, $(u_{2n+1})_{n\in\mathbb{N}}$ et $(u_{3n})_{n\in\mathbb{N}}$ sont convergentes (pas nécessairement vers la même limite), alors u est convergente.*

Solution. Notons ℓ, ℓ' et ℓ'' les limites respectives des suites $(u_{2n})_{n\in\mathbb{N}}$, $(u_{2n+1})_{n\in\mathbb{N}}$ et $(u_{3n})_{n\in\mathbb{N}}$.
La suite $(u_{6n})_{n\in\mathbb{N}}$ qui est extraite de $(u_{2n})_{n\in\mathbb{N}}$ et $(u_{3n})_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers ℓ et ℓ'', ce qui entraîne $\ell=\ell''$ du fait de l'unicité de la limite. De même en remarquant que $(u_{6n+3})_{n\in\mathbb{N}}$ est extraite de $(u_{2n+1})_{n\in\mathbb{N}}$ et $(u_{3n})_{n\in\mathbb{N}}$, on déduit que $\ell'=\ell''$ et $\ell=\ell'$, c'est-à-dire que $(u_{2n})_{n\in\mathbb{N}}$ et $(u_{2n+1})_{n\in\mathbb{N}}$ convergent vers la même limite, ce qui équivaut à la convergence de u.

Exercice 13 *On se propose de montrer que l'ensemble des valeurs d'adhérence de la suite $u=(\cos(n))_{n\in\mathbb{N}}$ est $[-1,1]$.*
On dit qu'un sous-groupe additif H de $(\mathbb{R},+)$ est discret si pour tout compact K de $\mathbb{R}$, l'intersection $H\cap K$ est finie.

1. *Montrer que les sous-groupes additifs de $\mathbb{R}$ discrets sont de la forme :*

$$\mathbb{Z}\alpha=\{p\alpha\mid p\in\mathbb{Z}\},$$

où α est un réel.

2. *Montrer que les sous-groupes additifs de* $\mathbb{R}$ *sont denses ou discrets.*
3. *Soient* a, b *deux réels non nuls. Montrer que le groupe additif* $G = \mathbb{Z}a + \mathbb{Z}b = \left\{pa + qb \mid (p, q) \in \mathbb{Z}^2\right\}$ *est discret [resp. dense] si, et seulement si,* $\frac{a}{b}$ *est rationnel [resp. irrationnel].*
4. *On note* $\Gamma = \{z \in \mathbb{C} \mid |z| = 1\}$ *le cercle unité dans le plan complexe.*
   - (a) *Montrer que* $\left\{e^{in} \mid n \in \mathbb{Z}\right\}$ *est dense dans* Γ.
   - (b) *Montrer que l'ensemble* $\{\cos(n) \mid n \in \mathbb{N}\}$ *est dense dans* $[-1, 1]$, *ce qui signifie que l'ensemble des valeurs d'adhérence de la suite* $u = (\cos(n))_{n\in\mathbb{N}}$ *est* $[-1, 1]$.

Solution.

1. Il est clair que tout sous-groupe de $(\mathbb{R}, +)$ de la forme $\mathbb{Z}\alpha$ est discret. En effet pour $\alpha = 0$ c'est clair et pour $\alpha \neq 0$ tout compact K de $\mathbb{R}$ est contenu dans un intervalle $[a, b]$ avec $a < b$ et il n'y a qu'un nombre fini d'entiers p vérifiant $a \leq p\alpha \leq b$.
   Réciproquement si H est un sous-groupe discret de $(\mathbb{R}, +)$ non réduit à $\{0\}$, il existe alors un réel a dans $H \cap \mathbb{R}_+^*$ ($0 \neq a \in H \Rightarrow -a \in H$) et $]0, a] \cap H$ est fini non vide, il admet donc un plus petit élément $\alpha > 0$. De $\alpha \in H$ on déduit que $\mathbb{Z}\alpha \subset H$. De plus, pour tout $x \in H$ il existe un entier relatif k tel que $0 \leq x - k\alpha < \alpha \leq a$ ($k = E\left(\frac{x}{\alpha}\right)$) et avec $x - k\alpha \in H \cap \mathbb{R}_+$ on déduit du caractère minimal de α que $x - k\alpha = 0$, soit $x = k\alpha \in \mathbb{Z}\alpha$. On a donc en définitive $H = \mathbb{Z}\alpha$.
2. Si H un sous-groupe additif de $\mathbb{R}$ non réduit à $\{0\}$ alors :
   $$K = H \cap \mathbb{R}_+^* \neq \emptyset$$
   et cet ensemble est minoré par 0, il admet donc une borne inférieure α.
   On distingue deux cas.
   Si $\alpha > 0$, alors $\alpha \in K$. En effet dans le cas contraire, par définition de la borne inférieure, on peut trouver $x \in K$ tel que $\alpha < x < 2\alpha$ (on suppose que $\alpha \notin H$). Pour la même raison, on peut trouver $y \in K$ tel que $\alpha < y < x$. On a alors $0 < x - y < \alpha$ avec $x - y \in H \cap \mathbb{R}_+^*$, ce qui est contradictoire avec la définition de la borne inférieure α. Avec la structure de groupe additif de H, on déduit alors que $H = \mathbb{Z}\alpha$. En effet, $\mathbb{Z}\alpha \subset H$ du fait que α appartient au groupe H et pour tout x dans H, il existe k dans $\mathbb{Z}$ tel que $0 \leq x - k\alpha < \alpha$, donc $x - k\alpha = 0$ et $x \in \mathbb{Z}\alpha$, c'est-à-dire que $H \subset \mathbb{Z}\alpha$.
   Si $\alpha = 0$, alors H est dense dans $\mathbb{R}$. En effet pour $x < y$ dans $\mathbb{R}$, il existe z dans $H \cap \mathbb{R}_+^*$ tel que $0 < z < y - x$ soit $1 < \frac{y}{z} - \frac{x}{z}$ et pour $n \in \left]\frac{x}{z}, \frac{y}{z}\right[\cap \mathbb{Z}$, on a $x < nz < y$ avec $nz \in H$.
   Si G est discret, alors $G = \mathbb{Z}\alpha$ et $a = p\alpha$, $b = q\alpha$ avec p et q non nuls dans $\mathbb{Z}$ et en conséquence $\frac{a}{b} = \frac{p}{q} \in \mathbb{Q}$.
   Réciproquement, supposons $\frac{a}{b}$ rationnel, on peut écrire $\frac{a}{b} = \frac{p}{q}$ avec p et q entiers premiers entre eux et on a :
   $$G = \mathbb{Z}a + \mathbb{Z}b = \left(\mathbb{Z}\frac{p}{q} + \mathbb{Z}\right) b = (\mathbb{Z}p + \mathbb{Z}q)\, \frac{b}{q}.$$
   Le théorème de Bézout nous dit que $\mathbb{Z}p + \mathbb{Z}q = \mathbb{Z}$ et donc $G = \mathbb{Z}\frac{b}{q}$, c'est-à-dire que G est discret.
3.
   - (a) Comme 2π est irrationnel, le groupe $H = \mathbb{Z}2\pi + \mathbb{Z}$ est dense dans $\mathbb{R}$. Avec la 2π-périodicité, la continuité et la surjectivité de l'application $f : x \mapsto e^{ix}$ de $\mathbb{R}$ sur Γ, on déduit alors que l'ensemble :
     $$f(H) = \left\{e^{(2\pi m + n)i} \mid (m, n) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}\right\} = \left\{e^{in} \mid n \in \mathbb{Z}\right\}$$
     est dense dans Γ.
   - (b) Avec la continuité et la surjectivité de la projection $p : z \mapsto \Re(z)$ de Γ sur $[-1, 1]$, on déduit que l'ensemble $\{\cos(n) \mid n \in \mathbb{Z}\}$ est dense dans $[-1, 1]$, puis par parité que l'ensemble $\{\cos(n) \mid n \in \mathbb{N}\}$ est dense dans $[-1, 1]$.

Moins classique est le résultat suivant.

Exercice 14 *Soit* α *un réel fixé dans* $]0, 1[$ *et* $u = (u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *définie par* $u_n = \cos(n^\alpha)$ *pour* $n \geq 0$.
On se donne un réel $x \in [-1, 1]$ *et on note* θ *le réel de* $[0, \pi]$ *défini par* $x = \cos(\theta)$.
Pour tout entier $n \geq 1$, *on désigne par* $\varphi(n)$ *l'entier défini par :*

$$\varphi(n)^\alpha \leq \theta + 2n\pi < (\varphi(n) + 1)^\alpha$$

c'est-à-dire que $\varphi(n) = E\left((\theta + 2n\pi)^{\frac{1}{\alpha}}\right)$ *(partie entière).*

1. *Montrer que* φ *est une fonction strictement croissante de* $\mathbb{N}^*$ *dans* $\mathbb{N}^*$.
2. *Montrer que* $\lim\limits_{n\to+\infty} (\theta + 2n\pi - \varphi(n)^\alpha) = 0$.
3. *Montrer que* $\lim\limits_{n\to+\infty} \left(u_{\varphi(n)}\right) = x$.
4. *En déduire que l'ensemble des valeurs d'adhérence de la suite* u *est* $[-1, 1]$.

Solution.

1. Résulte de la croissance de la fonction partie entière (précisément si $x - y > 1$ alors $E(x) > E(y)$), de la stricte croissance de la fonction $t^{\frac{1}{\alpha}}$ et du fait que $2\pi > 1$. En effet, en posant $v_n = (\theta + 2n\pi)^{\frac{1}{\alpha}}$ et en utilisant le théorème des accroissements finis, on a pour tout entier $n \geq 1$:
$$v_{n+1} - v_n = 2\pi \frac{1}{\alpha} \xi_n^{\frac{1}{\alpha}-1}$$
où ξ_n est un réel compris entre $\theta + 2n\pi$ et $\theta + 2(n+1)\pi$. Et comme $0 < \alpha < 1$, $\xi_n > 1$, on a $\dfrac{1}{\alpha}\xi_n^{\frac{1}{\alpha}-1} > 1$ et $v_{n+1} - v_n > 2\pi > 1$ de sorte que $\varphi(n+1) = E(v_{n+1}) > E(v_n) = \varphi(n)$.
2. Résulte de :
$$-0 \leq \theta + 2n\pi - \varphi(n)^\alpha < (\varphi(n) + 1)^\alpha - \varphi(n)^\alpha$$
et de $\lim\limits_{p\to+\infty} ((p+1)^\alpha - p^\alpha) = 0$ (exercice **??**).
3. Pour $n \geq 1$, on a, en utilisant l'inégalité des accroissements finis pour la fonction $\cos$:
$$\begin{aligned}\left|u_{\varphi(n)} - x\right| &= \left|\cos(\varphi(n)^\alpha) - \cos(\theta)\right| = \left|\cos(\varphi(n)^\alpha) - \cos(\theta + 2n\pi)\right| \\ &\leq \left|\theta + 2n\pi - \varphi(n)^\alpha\right| \underset{n\to+\infty}{\to} 0.\end{aligned}$$
4. La suite u étant à valeurs dans $[-1, 1]$, ses valeurs d'adhérence sont dans $[-1, 1]$ et ce qui précède nous donne l'inclusion réciproque puisqu'on a montré que tout réel $x \in [-1, 1]$ est limite d'une suite extraite de u.

1.3 Le critère de Cauchy

Définition 2 *On dit qu'une suite* $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *est de Cauchy si :*
$$\forall \varepsilon > 0,\ \exists n_0 \in \mathbb{N} \mid \forall n \geq n_0,\ \forall m \geq n_0,\ |u_n - u_m| < \varepsilon.$$

Exercice 15 *Montrer que, pour tout nombre complexe* z, *la suite* $(u_n(z))_{n\in\mathbb{N}}$ *définie par* $u_n(z) = \sum\limits_{k=0}^{n} \dfrac{z^k}{k!}$ *est convergente. La limite de cette suite est l'exponentielle complexe de* z *notée* $\exp(z)$.

Solution. Pour $m > n > 2$, on a :
$$\begin{aligned}|u_m(z) - u_n(z)| &= \left|\sum_{k=n+1}^{m} \frac{z^k}{k!}\right| = \frac{|z|^{n+1}}{(n+1)!}\left|1 + \frac{z}{n+2} + \cdots + \frac{z^{m-n-1}}{(n+2)\cdots(m-1)m}\right| \\ &\leq \frac{|z|^{n+1}}{(n+1)!}\left(1 + \frac{|z|}{n+2} + \frac{|z|^2}{(n+2)^2} \cdots + \frac{|z|^{m-n-1}}{(n+2)^{m-n-1}}\right)\end{aligned}$$
et en désignant par $n_0 > 2$ un entier naturel tel que $n_0 + 2 > |z|$, on a pour $m > n \geq n_0$:
$$|u_m(z) - u_n(z)| \leq \varepsilon_n = \frac{|z|^{n+1}}{(n+1)!} \frac{1}{1 - \frac{|z|}{n+2}}$$
avec $\lim\limits_{n\to+\infty} (\varepsilon_n) = 0$, ce qui implique que $(u_n(z))_{n\in\mathbb{N}}$ est de Cauchy, donc convergente.
En écrivant $\varepsilon_n = \delta_n \dfrac{1}{1 - \frac{|z|}{n+2}}$, le fait que $\lim\limits_{n\to+\infty} (\varepsilon_n) = 0$ se déduit de $\lim\limits_{n\to+\infty} \left(1 - \dfrac{|z|}{n+2}\right) = 1$ et $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{\delta_{n+1}}{\delta_n} = \lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{|z|}{n+2} = 0$ qui entraîne $\lim\limits_{n\to+\infty} (\delta_n) = 0$.

Exercice 16 *Montrer que, pour tout nombre complexe z tel que $|z| < 1$, la suite $(u_n(z))_{n \geq 1}$ définie par $u_n(z) = \sum_{k=1}^{n} \frac{z^k}{k}$ est convergente (pour z réel, cette limite est $-\ln(1-z)$).*

Solution. Pour $m > n \geq 1$, on a :

$$\begin{aligned} |u_m(z) - u_n(z)| &= \left| \sum_{k=n+1}^{m} \frac{z^k}{k} \right| \leq |z|^{n+1} \sum_{k=0}^{m-n-1} |z|^k \\ &\leq |z|^{n+1} \frac{1-|z|^{m-n}}{1-|z|} \leq |z|^{n+1} \frac{1}{1-|z|} \end{aligned}$$

1.4 Suites monotones

Exercice 17 *Montrer que la suite $u = (u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ définie par $u_n = \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!}$ est convergente vers un nombre irrationnel e.*

Solution. La suite u est croissante et pour $n > 2$, on a :

$$\begin{aligned} u_n &= \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!} \leq 1 + 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} \cdots + \frac{1}{2^{n-1}} \\ &\leq 1 + \frac{1}{1-\frac{1}{2}} = 3 \end{aligned}$$

puisque $k! \geq 2^{k-1}$ pour $k \geq 2$, ce qui implique que u est convergente.
Supposons qu'elle soit convergente vers un rationnel $r = \frac{p}{q}$ où p, q sont deux entiers strictement positifs premiers entre eux. Pour tout $n > q$, le nombre

$$p_n = n!\,(r - r_n) = n! \lim_{m \to +\infty} (r_m - r_n)$$

est un entier strictement positif avec :

$$0 < n!\,(r_m - r_n) \leq \frac{n+2}{(n+1)^2} \leq \frac{1}{2}$$

pour $m > n \geq 2$, ce qui implique $0 < p_n < 1$ dans $\mathbb{N}$ qui est impossible.

Exercice 18 *Montrer que si $(u_n)_{n \geq 1}$ est une suite de réels positifs qui vérifie :*

$$\forall n \geq 1,\ u_{n+1} \leq u_n + \frac{1}{n^2}$$

alors cette suite est convergente.

Solution. On a :

$$u_{n+1} \leq u_n + \frac{1}{n^2} \leq u_n + \frac{1}{n(n-1)} = u_n + \frac{1}{n-1} - \frac{1}{n}$$

soit :

$$0 < u_{n+1} + \frac{1}{n} \leq u_n + \frac{1}{n-1}$$

C'est-à-dire que la suite $\left(u_n + \frac{1}{n-1}\right)_{n \geq 2}$ est décroissante minorée. Elle est donc convergente. Ce qui entraîne la convergence de $(u_n)_{n \geq 1}$.

Exercice 19 *Montrer que de toute suite réelle on peut extraire une suite monotone.*

Solution. Soit A la partie de $\mathbb{N}$, éventuellement vide, définie par :

$$n \in A \Leftrightarrow \forall m > n,\ u_m \leq u_n.$$

Si A est finie, elle admet un majorant $n_0 \notin A$. Il existe alors un entier $n_1 > n_0$ tel que $u_{n_1} > u_{n_0}$. Comme $n_1 \notin A$, il existe $n_2 > n_1$ tel que $u_{n_2} > u_{n_1}$ et ainsi de suite, on construit par récurrence une suite strictement croissante d'entiers $(n_k)_{k \in \mathbb{N}}$ telle que $u_{n_{k+1}} > u_{n_k}$ pour tout $k \in \mathbb{N}$. La suite $(u_{n_k})_{n \in \mathbb{N}}$ est alors extraite de $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ et strictement croissante.
Si A est infini, on peut ranger ces éléments dans l'ordre croissant, soit $A = \{n_k \mid k \in \mathbb{N}\}$ avec $n_k < n_{k+1}$ pour tout $k \in \mathbb{N}$ et par construction, on a $u_{n_{k+1}} \leq u_{n_k}$ pour tout $k \in \mathbb{N}$. La suite $(u_{n_k})_{n \in \mathbb{N}}$ est alors extraite de $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ et décroissante.

Exercice 20 *Déduire de l'exercice précédent le théorème de Bolzano-Weierstrass : de toute suite bornée de nombres réels on peut extraire une sous-suite convergente.*

Solution. C'est clair.

Exercice 21 *Montrer qu'une suite réelle $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est convergente si, et seulement si, elle est bornée et n'a qu'une seule valeur d'adhérence.*

Solution. Supposons que $\lim\limits_{n\to+\infty}(u_n)=\ell$. Une suite convergente est bornée. Montrons qu'elle n'a qu'une seule valeur d'adhérence. On se donne une application $\varphi:\mathbb{N}\to\mathbb{N}$ strictement croissante et un réel ε strictement positif. On a alors :

$$\exists n_0\in\mathbb{N}\mid\forall n\geq n_0,\ |u_n-\ell|<\varepsilon$$

et :

$$\forall n\geq n_0,\ \varphi(n)\geq n\geq n_0$$

ce qui implique que :

$$\forall n\geq n_0,\ \left|u_{\varphi(n)}-\ell\right|<\varepsilon.$$

La suite $\left(u_{\varphi(n)}\right)_{n\in\mathbb{N}}$ est donc convergente vers ℓ.
Réciproquement, supposons que la suite bornée $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ admette ℓ pour seule valeur d'adhérence. Si cette suite ne converge pas vers ℓ, on peut alors trouver un réel $\varepsilon>0$ tel que pour tout entier n, il existe $p>n$ avec $|u_p-\ell|\geq\varepsilon$. Par récurrence on peut alors construire une suite strictement croissante d'entiers $(\varphi(n))_{n\in\mathbb{N}}$ telle que $\left|u_{\varphi(n)}-\ell\right|\geq\varepsilon$ pour tout n. De la suite bornée $\left(u_{\varphi(n)}\right)_{n\in\mathbb{N}}$ on peut extraire une sous suite $\left(u_{\psi(n)}\right)_{n\in\mathbb{N}}$ qui converge vers ℓ' et par passage à la limite dans l'inégalité $\left|u_{\psi(n)}-\ell\right|\geq\varepsilon$ on déduit que $|\ell'-\ell|\geq\varepsilon>0$, c'est-à-dire que ℓ' est une valeur d'adhérence de $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ distincte de ℓ, ce qui contredit l'hypothèse de départ.

Exercice 22 *Soit x un nombre irrationnel. Montrer que si $\left(\dfrac{p_n}{q_n}\right)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite de nombres rationnels qui converge vers x, où pour tout $n\in\mathbb{N}$, p_n est un entier relatif et q_n un entier naturel non nul, alors $\lim\limits_{n\to+\infty}q_n=+\infty$ et $\lim\limits_{n\to+\infty}p_n=+\infty$, si $x>0$, $\lim\limits_{n\to+\infty}p_n=-\infty$, si $x<0$.*

Solution. Dire que la suite $(q_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ne converge pas vers l'infini signifie qu'il existe une réel $\alpha>0$ tel que pour tout entier $n\in\mathbb{N}$, il existe un entier $k_n>n$ tel que $0<q_{k_n}\leq\alpha$. On peut alors extraire de $(q_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une sous-suite $\left(q_{\varphi(n)}\right)_{n\in\mathbb{N}}$ à valeurs dans $[0,\alpha]$ comme suit : pour $n=0$ il existe $\varphi(0)>0$ tel que $0<q_{\varphi(0)}\leq\alpha$ et en supposant construits les entiers $\varphi(0)<\varphi(1)<\cdots<\varphi(n)$ tels que $0<q_{\varphi(k)}\leq\alpha$ pour tout k compris entre 0 et n, on peut trouver $\varphi(n+1)>\varphi(n)$ tel que $0<q_{\varphi(n+1)}\leq\alpha$. De cette suite bornée on peut alors extraire une sous-suite $\left(q_{\psi(n)}\right)_{n\in\mathbb{N}}$ qui converge vers un entier $q\geq1$, mais alors avec $p_{\psi(n)}=\dfrac{p_{\psi(n)}}{q_{\psi(n)}}q_{\psi(n)}$, on déduit que la suite $\left(p_{\psi(n)}\right)_{n\in\mathbb{N}}$ est également convergente et sa limite $p=xq$ est également un entier, ce qui est en contradiction avec x irrationnel.
Avec $p_n=q_n\dfrac{p_n}{q_n}$ et $\lim\limits_{n\to+\infty}\dfrac{p_n}{q_n}=x\neq0$, on déduit que $\lim\limits_{n\to+\infty}p_n=\pm\infty$, le signe étant celui de x.

1.5 Suites adjacentes

Exercice 23 *Soient $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ deux suites adjacentes. Montrer que pour tous n,m dans $\mathbb{N}$ on a $u_n\leq v_m$.*

Solution. Supposons qu'il existe deux indices n,m tels que $u_n>v_m$. Comme u est croissante, et v décroissante, on a alors pour tout $k\geq\max(n,m)$, $u_k\geq u_n$ et $v_k\leq v_m$, ce qui entraîne $u_k-v_k\geq u_n-v_m>0$ et $0=\lim\limits_{k\to+\infty}(u_k-v_k)\geq u_n-v_m>0$, ce qui est impossible.

Exercice 24 *Montrer que deux suites adjacentes $u=(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $v=(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ convergent vers la même limite ℓ, avec :*

$$\forall n\in\mathbb{N},\ \forall m\in\mathbb{N},\ u_n\leq\ell\leq v_m.$$

Solution. En utilisant la monotonie des suites u et v, on a :

$$\forall n \in \mathbb{N},\ u_0 \leq u_n \leq u_{n+1} \leq v_n \leq v_{n+1} \leq v_0,$$

c'est-à-dire que u est croissante majorée par v_0 et v décroissante et minorée par u_0, ces deux suites sont donc convergentes avec :

$$\lim_{n\to+\infty} v_n - \lim_{n\to+\infty} u_n = \lim_{n\to+\infty} (v_n - u_n) = 0.$$

Elles convergent donc vers la même limite :

$$\ell = \sup_{n\in\mathbb{N}} (u_n) = \inf_{n\in\mathbb{N}} (v_n).$$

On peut remarquer qu'une majoration de l'erreur d'approximation deℓ par les u_n est donnée par :

$$\forall n \in \mathbb{N},\ 0 \leq \ell - u_n \leq v_n - u_n.$$

Exercice 25 *Montrer que les suites* $u = (u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *et* $v = (v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *définies par :*

$$u_n = \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!},\ v_n = u_n + \frac{1}{n!}$$

convergent vers la même limite irrationnelle e.

Solution. Il est clair que u est croissante et pour $n \geq 1$, on a :

$$v_{n+1} - v_n = \frac{1}{(n+1)!} + \frac{1}{(n+1)!} - \frac{1}{n!} = -\frac{n-1}{(n+1)!} \leq 0$$

donc $(v_n)_{n\geq1}$ est décroissante. De plus avec $\lim_{n\to+\infty} (v_n - u_n) = \lim_{n\to+\infty} \left(\frac{1}{n!}\right) = 0$, on déduit que ces suites sont adjacentes. Elles convergent donc vers la limite.
Les encadrements $u_n \leq e \leq v_m$, nous permettent de donner des valeurs approchées de e par défaut et par excès. Par exemple, pour $n = m = 10$, on obtient :

$$u_{10} \approx 2.7183 \leq e \leq v_{10} \approx 2.7183$$

avec une majoration de l'erreur d'approximation donnée par :

$$0 \leq e - u_{10} \leq v_{10} - u_{10} = \frac{1}{10!} \approx 2.755 \cdot 10^{-7}.$$

On peut aussi utiliser la suite $v = (v_n)_{n\geq1}$ définie par $v_n = u_n + \frac{1}{n \cdot n!}$ (les suites u et v sont encore adjacentes) et on a en fait :

$$0 \leq e - u_{10} \leq v_{10} - u_{10} = \frac{1}{10 \cdot 10!} \approx 2.755 \cdot 10^{-8}.$$

Exercice 26 *Montrer que les suites* $u = (u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *et* $v = (v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *définies par :*

$$u_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} - \ln(n),\ v_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} - \ln(n+1)$$

convergent vers une même limite γ *(la constante d'Euler).*

Solution. Pour $n \geq 1$, on a :

$$\begin{aligned} u_{n+1} - u_n &= \frac{1}{n+1} - \ln\left(\frac{n+1}{n}\right) = \int_n^{n+1} \left(\frac{1}{n+1} - \frac{1}{t}\right) dt \\ &= \int_n^{n+1} \frac{t-(n+1)}{(n+1)\,t} dt > 0, \end{aligned}$$

c'est-à-dire que u est décroissante.
La fonction $t \to \frac{1}{t}$ est décroissante sur $\mathbb{R}^{+*}$, donc :

$$\forall k \geq 1,\ \int_k^{k+1} \frac{dt}{t} \leq \int_k^{k+1} \frac{dt}{k} = \frac{1}{k}$$

et pour tout $n \geq 2$, on a :

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} \geq \sum_{k=1}^{n} \int_{k}^{k+1} \frac{dt}{t} = \int_{1}^{n+1} \frac{dt}{t} = \ln(n+1),$$

soit $u_n \geq \ln(n+1) - \ln(n) = \ln\left(1 + \frac{1}{n}\right) > 0$.
De manière analogue, pour $n \geq 1$, on a :

$$\begin{aligned} v_{n+1} - v_n &= \frac{1}{n+1} - \ln\left(\frac{n+2}{n+1}\right) = \int_{n+1}^{n+2} \left(\frac{1}{n+1} - \frac{1}{t}\right) dt \\ &= \int_{n+1}^{n+2} \frac{t-(n+1)}{(n+1)\,t} dt > 0, \end{aligned}$$

c'est-à-dire que v est croissante.
Et avec :

$$\lim_{n\to+\infty} (u_n - v_n) = \lim_{n\to+\infty} \left(\ln\left(\frac{n+1}{n}\right)\right) = \ln(1) = 0,$$

on conclut que ces deux suites sont adjacentes.
Les encadrements $v_n \leq \gamma \leq u_m$, nous permettent de donner des valeurs approchées de γ. Par exemple, pour $n = m = 10$, on obtient :

$$v_{10} \approx 0.53107 \leq \gamma \leq u_{10} \approx 0.62638$$

Exercice 27 *Montrer que les suites $u = (u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $v = (v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définies par :*

$$u_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{\sqrt{k}} - 2\sqrt{n+1},\ v_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{\sqrt{k}} - 2\sqrt{n}$$

convergent vers une même limite.

Solution. Pour $n \geq 1$, on a :

$$\begin{aligned} u_{n+1} - u_n &= \frac{1}{\sqrt{n+1}} + 2\left(\sqrt{n+1} - \sqrt{n+2}\right) = \frac{1}{\sqrt{n+1}} - \frac{2}{\sqrt{n+1} + \sqrt{n+2}} \\ &= \frac{\sqrt{n+2} - \sqrt{n+1}}{\sqrt{n+1}\left(\sqrt{n+1} + \sqrt{n+2}\right)} = \frac{1}{\sqrt{n+1}\left(\sqrt{n+1} + \sqrt{n+2}\right)^2} > 0, \end{aligned}$$

c'est-à-dire que u est croissante.
De même :

$$\begin{aligned} v_{n+1} - v_n &= \frac{1}{\sqrt{n+1}} + 2\left(\sqrt{n} - \sqrt{n+1}\right) = \frac{1}{\sqrt{n+1}} - \frac{2}{\sqrt{n} + \sqrt{n+1}} \\ &= \frac{\sqrt{n} - \sqrt{n+1}}{\sqrt{n+1}\left(\sqrt{n} + \sqrt{n+1}\right)} = -\frac{1}{\sqrt{n+1}\left(\sqrt{n} + \sqrt{n+1}\right)^2} < 0, \end{aligned}$$

c'est-à-dire que v est décroissante.
En fin avec :

$$\lim_{n\to+\infty} (u_n - v_n) = 2 \lim_{n\to+\infty} \left(\sqrt{n+1} - \sqrt{n}\right) = 2 \lim_{n\to+\infty} \left(\frac{1}{\sqrt{n+1} + \sqrt{n}}\right) = 0,$$

on conclut que ces deux suites sont adjacentes et donc convergentes vers ℓ.
Les encadrements $u_n \leq \ell \leq v_m$, nous permettent de donner des valeurs approchées de ℓ. Par exemple, pour $n = m = 20$, on obtient :

$$u_{20} \approx -1.569\,9 \leq \ell \leq v_{20} \approx -1.349$$

En fait, les deux exercices qui précèdent ne sont que des cas particulier du résultat suivant.

Exercice 28 *Soit $f : [1, +\infty[\to \mathbb{R}$ une fonction continue décroissante telle que $\lim_{x\to+\infty} f(x) = 0$ et F la primitive de f nulle en 1. Montrer que les suites $u = (u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $v = (v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définies par*

$$\forall n \geq 1, \begin{cases} u_n = \sum\limits_{k=1}^{n} f(k) - F(n+1) \\ v_n = \sum\limits_{k=1}^{n} f(k) - F(n) \end{cases}$$

convergent vers une même limite.

Solution. Comme f tend vers 0 en décroissant à l'infini, elle est nécessairement à valeurs positives.
On a déjà vu que u est croissante et v décroissante.
Avec :

$$v_n - u_n = F(n+1) - F(n) = \int_n^{n+1} f(t)\,dt$$

et f positive décroissante, on déduit que :

$$0 \leq v_n - u_n \leq f(n)$$

et $\lim\limits_{n\to+\infty} (v_n - u_n) = 0$ puisque $\lim\limits_{n\to+\infty} f(n) = 0$.

Exercice 29 *Soient* $0 < a < b$ *et* $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$, $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *définies par :*

$$\begin{cases} u_0 = a \\ v_0 = b \end{cases}$$

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad \begin{cases} u_{n+1} = \dfrac{2}{\frac{1}{u_n} + \frac{1}{v_n}} \text{ (moyenne harmonique)} \\ v_{n+1} = \dfrac{u_n + v_n}{2} \text{ (moyenne arithmétique)} \end{cases}$$

Montrer que ces suites sont adjacentes de limite $\sqrt{ab}$ *(moyenne géométrique). Pour* $b = 1$, *on a des approximations de* $\sqrt{a}$.

Solution. On vérifie facilement, par récurrence, que $u_n > 0$ et $v_n > 0$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.
Pour $n \in \mathbb{N}$, on a :

$$v_{n+1} - v_n = \frac{u_n - v_n}{2}$$

avec $u_0 - v_0 = a - b < 0$ et pour $n \geq 1$:

$$u_n - v_n = \frac{2u_{n-1}v_{n-1}}{u_{n-1} + v_{n-1}} - \frac{u_{n-1} + v_{n-1}}{2} = -\frac{(u_{n-1} - v_{n-1})^2}{2(u_{n-1} + v_{n-1})} \leq 0.$$

Il en résulte que $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est décroissante.
Avec :

$$u_{n+1} - u_n = \frac{2u_n v_n}{u_n + v_n} - u_n = \frac{u_n(v_n - u_n)}{u_n + v_n},$$

on déduit que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est croissante.
Enfin avec $u_n > 0$ on a :

$$0 \leq v_{n+1} - u_{n+1} = \frac{(u_n - v_n)^2}{2(u_n + v_n)} \leq \frac{v_n - u_n}{2}$$

et par récurrence :

$$0 \leq u_n - v_n \leq \frac{b-a}{2^n} \underset{n\to+\infty}{\to} 0.$$

Les suites $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sont donc adjacentes et en conséquence convergent vers une même limite $\lambda \geq 0$.
D'autre part avec $u_{n+1}v_{n+1} = u_n v_n$, on déduit que $u_n v_n = u_0 v_0$ pour tout n et $\lambda^2 = u_0 v_0$. Donc :

$$\lim_{n\to+\infty} u_n = \lim_{n\to+\infty} v_n = \sqrt{u_0 v_0} = \sqrt{ab}.$$

Exercice 30 *Soient* $0 < a < b$ *et* $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *et* $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *définies par :*

$$\begin{cases} u_0 = a \\ v_0 = b \end{cases}$$

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad \begin{cases} u_{n+1} = \sqrt{u_n v_n} \text{ (moyenne géométrique)} \\ v_{n+1} = \dfrac{u_n + v_n}{2} \text{ (moyenne arithmétique)} \end{cases}$$

Montrer que ces suites sont adjacentes de même limite. Cette limite est appelée moyenne arithmético-géométrique de a *et* b.

Solution. On vérifie facilement, par récurrence, que $u_n > 0$ et $v_n > 0$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.
On rappelle que pour tous réels u, v positifs, on a $\sqrt{uv} \leq \dfrac{u+v}{2}$ (conséquence de $(\sqrt{v} - \sqrt{u})^2 \geq 0$).
Avec l'inégalité précédente, on déduit que $u_n \leq v_n$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.
Avec $u \leq \sqrt{uv} \leq v$ et $u \leq \dfrac{u+v}{2} \leq v$ pour $u > 0$ et $v > 0$, on déduit que $u_n \leq u_{n+1} = \sqrt{u_n v_n}$ et $v_{n+1} = \dfrac{u_n + v_n}{2} \leq v_n$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.
La suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est donc croissante et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ décroissante.
Enfin avec :

$$0 \leq v_{n+1} - u_{n+1} \leq v_{n+1} - u_n = \frac{v_n - u_n}{2},$$

on déduit par récurrence sur $n \geq 0$ que $0 \leq v_n - u_n \leq \dfrac{b-a}{2^n}$ et $\lim\limits_{n\to+\infty} (v_n - u_n) = 0$.
Les suites $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sont donc adjacentes et en conséquence convergent vers une même limite $\ell > 0$.
On peut montrer que cette limite est $\ell = \dfrac{\pi}{2 \cdot E(a,b)}$, où $E(a,b)$ est l'intégrale elliptique définie par :

$$E(a,b) = \int_0^{+\infty} \frac{dt}{\sqrt{(t^2+a^2)(t^2+b^2)}}$$

(voir l'épreuve 1 du Capes Externe 1995).

Exercice 31 *Soient* $0 < a < b$ *et* $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *et* $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *définies par :*

$$\begin{cases} u_0 = a \\ v_0 = b \end{cases}, \ \forall n \in \mathbb{N}, \begin{cases} u_{n+1} = \dfrac{u_n + v_n}{2} \\ v_{n+1} = \sqrt{u_{n+1} v_n} \end{cases}$$

Montrer que ces suites sont adjacentes de limite $\ell = b\dfrac{\sin(\theta)}{\theta}$ *où* $\cos(\theta) = \dfrac{a}{b}$.

Solution. On vérifie par récurrence, que

$$\forall n \in \mathbb{N},\ 0 < u_n < u_{n+1} < v_{n+1} < v_n.$$

Pour $n = 0$, on a $0 < u_0 = a < b = v_0$ et :

$$u_1 = \frac{u_0 + v_0}{2} > u_0 > 0$$
$$v_1 = \sqrt{\frac{u_0 + v_0}{2} v_0} < \sqrt{v_0^2} = v_0$$

$$\begin{aligned} v_1 - u_1 &= \sqrt{u_1}\left(\sqrt{v_0} - \sqrt{u_1}\right) = \frac{\sqrt{u_1}}{\sqrt{v_0} + \sqrt{u_1}}(v_0 - u_1) \\ &= \frac{\sqrt{u_1}}{\sqrt{v_0} + \sqrt{u_1}}\left(v_0 - \frac{u_0 + v_0}{2}\right) = \frac{\sqrt{u_1}}{\sqrt{v_0} + \sqrt{u_1}}\left(\frac{v_0 - v_0}{2}\right) > 0. \end{aligned}$$

On a donc bien $0 < u_0 < u_1 < v_1 < v_0$.
En supposant le résultat acquis au rang $n \geq 0$, on a :

$$u_{n+2} = \frac{u_{n+1} + v_{n+1}}{2} > u_{n+1} > 0$$

$$v_{n+2} = \sqrt{\frac{u_{n+1} + v_{n+1}}{2} v_{n+1}} < \sqrt{v_{n+1}^2} = v_{n+1} > 0$$

$$\begin{aligned} v_{n+2} - u_{n+2} &= \sqrt{u_{n+2}}\left(\sqrt{v_{n+1}} - \sqrt{u_{n+2}}\right) = \frac{\sqrt{u_{n+2}}}{\sqrt{v_{n+1}} + \sqrt{u_{n+2}}}(v_{n+1} - u_{n+2}) \\ &= \frac{\sqrt{u_{n+2}}}{\sqrt{v_{n+1}} + \sqrt{u_{n+2}}}\left(v_{n+1} - \frac{u_{n+1} + v_{n+1}}{2}\right) \\ &= \frac{\sqrt{u_{n+2}}}{\sqrt{v_{n+1}} + \sqrt{u_{n+2}}}\left(\frac{v_{n+1} - v_{n+1}}{2}\right) > 0. \end{aligned}$$

La suite u est donc croissante et la suite v décroissante.
La dernière égalité donne pour $n \geq 0$:

$$0 < v_{n+1} - u_{n+1} = \frac{\sqrt{u_{n+1}}}{\sqrt{v_n} + \sqrt{u_{n+1}}}\left(\frac{v_n - v_n}{2}\right) < \frac{v_n - v_n}{2}$$

et par récurrence $0 < v_n - u_n \leq \dfrac{b-a}{2^n}$, ce qui entraîne $\lim\limits_{n\to+\infty} (v_n - u_n) = 0$.
Les suites $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sont donc adjacentes et en conséquence convergent vers une même limite $\ell > 0$.
Comme $0 < \dfrac{a}{b} < 1$, il existe un unique réel $\theta \in \left]0, \dfrac{\pi}{2}\right[$ tel que $a = b\cos(\theta)$.
On a donc $u_0 = b\cos(\theta)$ et $v_0 = b$.
Pour $n = 1$, on a ;

$$u_1 = \frac{u_0 + v_0}{2} = \frac{b(1+\cos(\theta))}{2} = b\cos^2\left(\frac{\theta}{2}\right)$$

et :

$$v_1 = \sqrt{u_1 v_0} = b\cos\left(\frac{\theta}{2}\right)$$

De même pour $n = 2$, on a :

$$u_2 = \frac{u_1 + v_1}{2} = b\cos\left(\frac{\theta}{2}\right)\frac{\left(1+\cos\left(\frac{\theta}{2}\right)\right)}{2} = b\cos\left(\frac{\theta}{2}\right)\cos^2\left(\frac{\theta}{2^2}\right)$$

et :

$$v_2 = \sqrt{u_2 v_1} = b\cos\left(\frac{\theta}{2}\right)\cos\left(\frac{\theta}{2^2}\right)$$

Par récurrence, on vérifie que pour tout $n \geq 1$, on a :

$$u_n = b\cos\left(\frac{\theta}{2}\right)\cos\left(\frac{\theta}{2^2}\right)\cdots\cos\left(\frac{\theta}{2^{n-1}}\right)\cos^2\left(\frac{\theta}{2^n}\right)$$

et :

$$v_n = b\cos\left(\frac{\theta}{2}\right)\cos\left(\frac{\theta}{2^2}\right)\cdots\cos\left(\frac{\theta}{2^{n-1}}\right)\cos\left(\frac{\theta}{2^n}\right)$$

En effet, c'est vrai pour $n = 1$ et le supposant vrai pour $n \geq 1$, on a :

$$\begin{aligned} u_{n+1} &= \frac{u_n + v_n}{2} \\ &= b\cos\left(\frac{\theta}{2}\right)\cos\left(\frac{\theta}{2^2}\right)\cdots\cos\left(\frac{\theta}{2^{n-1}}\right)\cos\left(\frac{\theta}{2^n}\right)\frac{\left(1+\cos\left(\frac{\theta}{2^n}\right)\right)}{2} \\ &= b\cos\left(\frac{\theta}{2}\right)\cos\left(\frac{\theta}{2^2}\right)\cdots\cos\left(\frac{\theta}{2^n}\right)\cos^2\left(\frac{\theta}{2^{n+1}}\right) \end{aligned}$$

et :

$$v_{n+1} = \sqrt{u_{n+1} v_n} = b\cos\left(\frac{\theta}{2}\right)\cos\left(\frac{\theta}{2^2}\right)\cdots\cos\left(\frac{\theta}{2^n}\right)\cos\left(\frac{\theta}{2^{n+1}}\right)$$

On a donc pour tout $n \geq 1$:

$$v_n = b\prod_{k=1}^{n}\cos\left(\frac{\theta}{2^k}\right)$$

En remarquant que :

$$\cos\left(\frac{\theta}{2}\right) = \sin(\theta)\frac{\cos\left(\frac{\theta}{2}\right)}{2\sin\left(\frac{\theta}{2}\right)\cos\left(\frac{\theta}{2}\right)} = \frac{\sin(\theta)}{2\sin\left(\frac{\theta}{2}\right)}$$

$$\begin{aligned} \cos\left(\frac{\theta}{2}\right)\cos\left(\frac{\theta}{2^2}\right) &= \frac{\sin(\theta)}{2\sin\left(\frac{\theta}{2}\right)}\cos\left(\frac{\theta}{2^2}\right) \\ &= \frac{\sin(\theta)}{2\sin\left(\frac{\theta}{2}\right)}\sin\left(\frac{\theta}{2}\right)\frac{\cos\left(\frac{\theta}{2^2}\right)}{2\sin\left(\frac{\theta}{2^2}\right)\cos\left(\frac{\theta}{2^2}\right)} \\ &= \frac{\sin(\theta)}{2^2\sin\left(\frac{\theta}{2^2}\right)} \end{aligned}$$

on vérifie facilement par récurrence que, pour tout $n \geq 1$, on a :

$$v_n = \frac{b\sin(\theta)}{2^n\sin\left(\frac{\theta}{2^n}\right)}.$$

Puis avec $\sin\left(\dfrac{\theta}{2^n}\right) \underset{n\to+\infty}{\backsim} \dfrac{\theta}{2^n}$, on déduit que $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = \lim\limits_{n\to+\infty} v_n = \dfrac{b\sin(\theta)}{\theta}$.
Pour $a = \dfrac{1}{\sqrt{2}}$, $b = 1$, on a $\theta = \dfrac{\pi}{4}$ et les suites u et v donnent des approximations de $\dfrac{4}{\pi}$.

Le théorème des suites adjacentes est équivalent au théorème des segments emboîtés qui suit.

Exercice 32 *Montrer que si* $([a_n, b_n])_{n\in\mathbb{N}}$ *est une suite de segments emboîtés (c'est-à-dire que* $a_n < b_n$ *et* $[a_{n+1}, b_{n+1}] \subset [a_n, b_n]$ *pour tout* $n \in \mathbb{N}$*) telle que* $\lim\limits_{n\to+\infty} (b_n - a_n) = 0$*, alors il existe un réel* ℓ *tel que* $\bigcap\limits_{n\in\mathbb{N}} [a_n, b_n] = \{\ell\}$.

Solution. Il est facile de vérifier que les suites $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sont adjacentes et :

$$\ell = \sup_{n\in\mathbb{N}} (a_n) = \lim_{n\in\mathbb{N}} (a_n) = \lim_{n\in\mathbb{N}} (b_n) = \inf_{n\in\mathbb{N}} (b_n) .$$

Le théorème des suites adjacentes nous permet de retrouver le théorème de Bolzano-Weierstrass en utilisant le principe de dichotomie.

Exercice 33 *Montrer, en utilisant le principe de dichotomie, que de toute suite bornée de nombres réels* $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *on peut extraire une sous-suite convergente.*

Solution. Si $[a_0, b_0]$ est un intervalle réel qui contient tous les éléments de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ on le coupe en deux parties égales et on garde une de ces parties qui contient des u_n pour une infinité d'indices n. En réitérant ce procédé on construit deux suites adjacentes $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et une application φ strictement croissante de $\mathbb{N}$ dans $\mathbb{N}$ telles que chaque intervalle $[a_n, b_n]$ contient un terme $u_{\varphi(n)}$. La suite $\left(u_{\varphi(n)}\right)_{n\in\mathbb{N}}$ est alors convergente.

Le théorème des suites adjacentes permet également de montrer que $\mathbb{R}$ n'est pas dénombrable en utilisant en utilisant le principe de trichotomie qui consiste à découper un segment en trois parties de même longueur.

Exercice 34 *Montrer, en utilisant le principe de trichotomie, que* $\mathbb{R}$ *n'est pas dénombrable.*

Solution. Il suffit pour cela de montrer que $[0, 1]$ n'est pas dénombrable.
Supposons qu'il existe une application bijective $\varphi : \mathbb{N} \to [0, 1]$. En coupant $I = [0, 1]$ en trois segments de même longueur, il en existe un que l'on note I_0 qui ne contient pas $f(0)$. On coupe ensuite I_0 en trois segments de même longueur en notant I_1 l'un de ces segments qui ne contient par $f(1)$. Par récurrence, on construit ainsi une suite de segments emboîtés $(I_n)_{n\in\mathbb{N}}$ telle que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, I_n ne contient pas $f(n)$ et I_n est de longueur $\frac{1}{3^n}$, on déduit alors du théorème des segments emboîtés que $\bigcap\limits_{n\in\mathbb{N}} I_n = \{x\}$ avec $x \in [0, 1]$ et $x \neq f(n)$ pour tout $n \in \mathbb{N}$, ce qui contredit la définition de f.

Une autre application importante du théorème des segments emboîtés (ou des suites adjacentes) est le théorème des valeurs intermédiaires qui fournit de plus une méthode d'approximation d'une solution d'une équation $f(x) = 0$.

Exercice 35 *Soit* $I = [a, b]$ *est un intervalle réel fermé borné et* f *une fonction continue de* I *dans* $\mathbb{R}$ *telle que* $f(a) f(b) < 0$. *Montrer que l'équation* $f(x) = 0$ *admet au moins une solution* $\alpha \in]a, b[$.

Solution. Supposons que $f(a) < 0 < f(b)$ (en remplaçant au besoin f par $-f$ on se ramène toujours à ce cas).
On construit, par récurrence, une suite $([a_n, b_n])_{n\in\mathbb{N}}$ d'intervalles emboîtés dans $[a, b]$ de la manière suivante :

- $[a_0, b_0] = [a, b]$;
- en supposant construit $[a_n, b_n] \subset [a, b]$ pour $n \geq 0$, on pose : $[a_{n+1}, b_{n+1}] = \begin{cases} \left[a_n, \dfrac{a_n + b_n}{2}\right] & \text{si } f\left(\dfrac{a_n + b_n}{2}\right) > 0, \\ \left[\dfrac{a_n + b_n}{2}, b_n\right] & \text{sinon.} \end{cases}$

On a alors $[a_{n+1}, b_{n+1}] \subset [a_n, b_n]$ avec $b_{n+1} - a_{n+1} = \dfrac{b_n - a_n}{2}$ pour tout $n \geq 0$, ce qui entraîne $b_n - a_n = \dfrac{b - a}{2^n}$ pour tout $n \geq 0$.
$([a_n, b_n])_{n\in\mathbb{N}}$ est alors une suite de segments emboîtés et $\bigcap\limits_{n\in\mathbb{N}} [a_n, b_n] = \{\alpha\}$ avec $\alpha \in [a, b]$.
De plus, par construction, on a $f(a_n) \leq 0 \leq f(b_n)$ pour tout $n \geq 0$. En effet, c'est vrai pour $n = 0$ et en supposant cet encadrement vérifié au rang $n \geq 0$, on a $f(a_{n+1}) = f(a_n) \leq 0$ si $f\left(\dfrac{a_n + b_n}{2}\right) > 0$ avec et $b_{n+1} = \dfrac{a_n + b_n}{2}$ et $f(b_{n+1}) = f(b_n) \geq 0$ si $f\left(\dfrac{a_n + b_n}{2}\right) \leq 0$ avec et $a_{n+1} = \dfrac{a_n + b_n}{2}$.
Avec $a = \lim\limits_{n\in\mathbb{N}} (a_n) = \lim\limits_{n\in\mathbb{N}} (b_n)$ et la continuité de f, on déduit alors que :

$$f(\alpha) = \lim_{n\in\mathbb{N}} (f(a_n)) \leq 0 \leq \lim_{n\in\mathbb{N}} (f(b_n)) = f(\alpha) ,$$

ce qui équivaut à $f(\alpha) = 0$. Comme de plus on a supposé que $f(a) f(b) < 0$, α est différent de a et de b.

1.6 Le théorème de Césaro

Exercice 36 *Soit* $(\alpha_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *une suite de réels strictement positifs telle que* $\lim\limits_{n\to+\infty}\left(\sum\limits_{k=0}^{n}\alpha_k\right)=+\infty.$
Si $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *est une suite réelle ou complexe convergente, on a alors :*

$$\lim_{n\to+\infty}\left(\frac{1}{\sum\limits_{k=0}^{n-1}\alpha_k}\sum_{k=0}^{n-1}\alpha_k u_k\right)=\lim_{n\to+\infty}(u_n).$$

Solution. Notons $\ell=\lim\limits_{n\to+\infty}(u_n)$ et, pour tout entier $n\geq 1$:

$$A_n=\sum_{k=0}^{n-1}\alpha_k,\ v_n=\frac{1}{A_n}\sum_{k=0}^{n-1}\alpha_k u_k.$$

On a :

$$\forall\varepsilon>0,\ \exists n_\varepsilon\in\mathbb{N}\mid\forall n\geq n_\varepsilon,\ |u_n-\ell|<\varepsilon$$

et donc pour $n>n_\varepsilon$:

$$\begin{aligned}|v_n-\ell|&=\frac{1}{A_n}\left|\sum_{k=0}^{n-1}\alpha_k(u_k-\ell)\right|\\&\leq\frac{1}{A_n}\left|\sum_{k=0}^{n_\varepsilon}\alpha_k(u_k-\ell)\right|+\frac{1}{A_n}\sum_{k=n_\varepsilon+1}^{n-1}\alpha_k|u_k-\ell|\\&\leq\frac{C_\varepsilon}{A_n}+\frac{\sum\limits_{k=n_\varepsilon+1}^{n-1}\alpha_k}{A_n}\varepsilon\leq\frac{C_\varepsilon}{A_n}+\varepsilon.\end{aligned}$$

Si de plus on $\lim\limits_{n\to+\infty}(A_n)=+\infty$, il en résulte que $\lim\limits_{n\to+\infty}\left(\frac{C_\varepsilon}{A_n}\right)=0$ (ε étant fixé) et on peut trouver un entier $n_1>n_\varepsilon$ tel que :

$$\forall n\geq n_1,\ |v_n-\ell|\leq 2\varepsilon$$

D'où le résultat annoncé.

On dit qu'une suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge au sens de Césaro vers un scalaire ℓ, si la suite $\left(\frac{1}{n}\sum\limits_{k=0}^{n-1}u_k\right)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est convergente vers ℓ.

Exercice 37 *Montrer que le théorème de Césaro est encore valable pour des suites réelles* $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *qui diverge vers* $-\infty$ *ou* $+\infty$.

Solution. Quitte à remplacer $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ par $(-u_n)_{n\in\mathbb{N}}$, on peut supposer que $\lim\limits_{n\to+\infty}(u_n)=+\infty$.
On a donc :

$$\forall\lambda>0,\ \exists n_0\in\mathbb{N}\mid\forall n\geq n_0,\ u_n>\lambda$$

et, en gardant les notations utilisées dans la démonstration du théorème, on a pour tout $n>n_0$:

$$\begin{aligned}v_n&=\frac{1}{A_n}\sum_{k=0}^{n-1}\alpha_k u_k\\&=\frac{1}{A_n}\sum_{k=0}^{n_0}\alpha_k u_k+\frac{1}{A_n}\sum_{k=n_0+1}^{n-1}\alpha_k u_k\\&>\frac{C_0}{A_n}+\frac{A_n-A_{n_0}}{A_n}\lambda=\lambda+\frac{C_0-A_{n_0}}{A_n}\lambda\end{aligned}$$

Si de plus on $\lim\limits_{n\to+\infty}(A_n)=+\infty$, il en résulte que $\lim\limits_{n\to+\infty}\left(\frac{C_0-A_{n_0}}{A_n}\right)=0$ (λ étant fixé) et on peut trouver un entier $n_1>n_0$ tel que :

$$\forall n\geq n_1,\ \frac{C_0-A_{n_0}}{A_n}>-\frac{1}{2}$$

ce qui donne :

$$\forall n\geq n_1,\ v_n>\frac{\lambda}{2}$$

et le résultat annoncé puisque λ est quelconque.

Exercice 38 *Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite numérique convergente au sens de Césaro vers ℓ. Si de plus on a $\lim\limits_{n\to+\infty} n\,(u_n - u_{n-1}) = 0$, alors la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers ℓ.*

Solution. On a :

$$\sum_{k=1}^{n} k\,(u_k - u_{k-1}) = \sum_{k=1}^{n} k u_k - \sum_{k=1}^{n} k u_{k-1} = \sum_{k=1}^{n} k u_k - \sum_{k=0}^{n-1} (k+1)\,u_k$$
$$= n u_n - \sum_{k=0}^{n-1} u_k$$

soit :

$$u_n - \frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1} u_k = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} k\,(u_k - u_{k-1}) \underset{n\to+\infty}{\to} 0$$

en appliquant le théorème de Césaro à la suite $(n\,(u_n - u_{n-1}))_{n\in\mathbb{N}}$, ce qui donne :

$$\lim_{n\to+\infty} u_n = \lim_{n\to+\infty} \frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1} u_k = \ell.$$

Le résultat précédent est un cas particulier du théorème de Hardy qui suit.

Exercice 39 *Soient $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite numérique et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite des moyennes de Césaro définie par :*

$$v_n = \frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1} u_k$$

1. Montrer que :
$$\forall m > n,\ u_m - v_m = \frac{n}{m-n}\,(v_m - v_n) + \frac{1}{m-n}\sum_{k=n}^{m-1} (u_m - u_k)\,.$$

2. On suppose que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge au sens de Césaro vers ℓ et que la suite $(n\,(u_n - u_{n-1}))_{n\in\mathbb{N}}$ est bornée. On désigne par M un majorant la suite $(n\,|u_n - u_{n-1}|)_{n\in\mathbb{N}}$.
   (a) Montrer que :
   $$\forall m > n,\ |u_m - v_m| \leq \frac{n}{m-n}\,|v_m - v_n| + M\frac{m-n}{n+1}.$$
   (b) Montrer que $\lim\limits_{m\to+\infty} (u_m - v_m) = 0$ et donc que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers ℓ.

Solution.

1. Pour $m > n$, on a :
$$v_m = \frac{1}{m}\sum_{k=0}^{n-1} u_k + \frac{1}{m}\sum_{k=n}^{m-1} u_k = \frac{n}{m} v_n + \frac{1}{m}\sum_{k=n}^{m-1} u_k$$
et :
$$u_m - v_m = u_m - \frac{n}{m} v_n - \frac{1}{m}\sum_{k=n}^{m-1} u_k$$
$$= u_m - \frac{n}{m} v_n - \frac{1}{m}\sum_{k=n}^{m-1} (u_k - u_m) - \frac{m-n}{m} u_m$$
$$= \frac{n}{m}\,(u_m - v_n) + \frac{1}{m}\sum_{k=n}^{m-1} (u_m - u_k)$$
soit :
$$u_m - v_m = \frac{n}{m}\,(u_m - v_m) + \frac{n}{m}\,(v_m - v_n) + \frac{1}{m}\sum_{k=n}^{m-1} (u_m - u_k)$$

ou encore :

$$\frac{m-n}{m}(u_m - v_m) = \frac{n}{m}(v_m - v_n) + \frac{1}{m}\sum_{k=n}^{m-1}(u_m - u_k)$$

c'est-à-dire :

$$u_m - v_m = \frac{n}{m-n}(v_m - v_n) + \frac{1}{m-n}\sum_{k=n}^{m-1}(u_m - u_k).$$

2.

(a) Pour $m > n$ et k compris entre n et $m-1$, on a :

$$|u_m - u_k| \leq \sum_{j=k+1}^{m} |u_j - u_{j-1}| \leq M \sum_{j=k+1}^{m} \frac{1}{j} \leq M\frac{m-k}{k+1} \leq M\frac{m-n}{n+1},$$

ce qui donne :

$$\begin{aligned}|u_m - v_m| &\leq \frac{n}{m-n}|v_m - v_n| + \frac{M}{m-n}\sum_{k=n}^{m-1}\frac{m-n}{n+1} \\ &\leq \frac{n}{m-n}|v_m - v_n| + M\frac{m-n}{n+1}.\end{aligned}$$

(b) D'autre part, la suite convergente $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ étant de Cauchy, on peut trouver, pour tout réel $\varepsilon > 0$, un entier $n_0 > \frac{1}{\varepsilon}$ (ce choix sera justifié plus loin) tel que :

$$\forall n \geq n_0,\ \forall m \geq n_0,\ |v_m - v_n| < \varepsilon^2,$$

ce qui donne :

$$\forall m > n \geq n_0,\ |u_m - v_m| \leq \frac{n}{m-n}\varepsilon^2 + M\frac{m-n}{n+1}$$

Pour $m > n_0$ assez grand, on cherche un entier n compris entre n_0 et m tel que :

$$\frac{n}{m-n} < \frac{1}{\varepsilon},\ \frac{m-n}{n+1} < \varepsilon$$

ou encore :

$$\frac{m-\varepsilon}{\varepsilon+1} < n < \frac{m}{\varepsilon+1}.$$

Pour ce faire, il suffit de prendre n tel que :

$$n = E\left(\frac{m-\varepsilon}{\varepsilon+1}\right) + 1$$

où m est choisi tel que :

$$m > n_0 + \varepsilon(n_0 + 1).$$

En effet, on a :

$$n - 1 \leq \frac{m-\varepsilon}{\varepsilon+1} < n$$

donc :

$$n \leq \frac{m-\varepsilon}{\varepsilon+1} + 1 = \frac{m+1}{\varepsilon+1} < m$$

puisque $m > n_0 > \frac{1}{\varepsilon}$ et :

$$n > \frac{m-\varepsilon}{\varepsilon+1} \geq n_0$$

si $m > \varepsilon(n_0+1) + n_0$.

On a donc pour $\varepsilon > 0$ donné et $m > n_0 + \varepsilon(n_0+1)$, en prenant $n = E\left(\frac{m-\varepsilon}{\varepsilon+1}\right) + 1$:

$$|u_m - v_m| \leq \frac{n}{m-n}\varepsilon^2 + M\frac{m-n}{n+1} < (M+1)\varepsilon.$$

On a donc ainsi prouvé que $\lim\limits_{m\to+\infty}(u_m - v_m) = 0$ et $\lim\limits_{m\to+\infty} u_m = \lim\limits_{m\to+\infty} v_m = \ell$.

Exercice 40 *Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de réels strictement positifs. Montrer que si la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers ℓ, alors la suite $\left(\left(\prod_{k=0}^{n-1} u_k\right)^{\frac{1}{n}}\right)_{n\in\mathbb{N}^*}$ des moyennes géométriques converge aussi vers ℓ.*

Solution. Si $\lim\limits_{n\to+\infty}(u_n)=\ell\geq 0$, alors $\lim\limits_{n\to+\infty}(\ln(u_n))=\ln(\ell)\in[-\infty,+\infty[$ et $\lim\limits_{n\to+\infty}\left(\frac{1}{n}\sum\limits_{k=0}^{n-1}\ln(u_k)\right)=\mu$ avec $\mu=\ln(\ell)$ pour ℓ réel et $\mu=-\infty$ pour $\ell=0$. On a donc $\lim\limits_{n\to+\infty}\left(\ln\left(\left(\prod\limits_{k=0}^{n-1}u_k\right)^{\frac{1}{n}}\right)\right)=\mu$ et $\lim\limits_{n\to+\infty}\left(\left(\prod\limits_{k=0}^{n-1}u_k\right)^{\frac{1}{n}}\right)=e^{\mu}=\ell$.

Exercice 41 *Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de réels strictement positifs. Montrer que si la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers ℓ, alors la suite $\left(\dfrac{n}{\sum\limits_{k=0}^{n-1}\dfrac{1}{u_k}}\right)_{n\in\mathbb{N}^*}$ des moyennes harmoniques converge aussi vers ℓ.*

Solution. On a $\lim\limits_{n\to+\infty}\dfrac{1}{u_n}=\dfrac{1}{\ell}\in[0,+\infty]$ et le théorème de Césaro nous dit que $\lim\limits_{n\to+\infty}\dfrac{1}{n}\sum\limits_{k=0}^{n-1}\dfrac{1}{u_k}=\dfrac{1}{\ell}$, encore équivalent à $\lim\limits_{n\to+\infty}\dfrac{n}{\sum\limits_{k=0}^{n-1}\dfrac{1}{u_k}}=\ell$.

En utilisant l'encadrement $H_n(u)\leq G_n(u)\leq A_n(u)$, où $H_n(u)$, $G_n(u)$ et $A_n(u)$ désigne respectivement les moyennes harmonique, géométrique et arithmétique de la suite u, la convergence de $(G_n(u))_{n\in\mathbb{N}^*}$ vers ℓ se déduit de celle des suites $(H_n(u))_{n\in\mathbb{N}^*}$ et $(A_n(u))_{n\in\mathbb{N}^*}$.

Exercice 42 *Montrer que si $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite réelle ou complexe telle que $\lim\limits_{n\to+\infty}(u_{n+1}-u_n)=\ell$ (avec ℓ éventuellement infini pour une suite réelle), alors $\lim\limits_{n\to+\infty}\dfrac{u_n}{n}=\ell$ (soit $u_n=o(n)$).*

Solution. Il suffit d'écrire que :

$$\frac{u_n}{n}=\frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1}(u_{k+1}-u_k)+\frac{u_0}{n}$$

et d'utiliser le théorème de Césaro.

Exercice 43 *Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite réelle ou complexe telle que u_n soit non nul à partir d'un certain rang. Montrer que si $\lim\limits_{n\to+\infty}\left(\left|\dfrac{u_{n+1}}{u_n}\right|\right)=\lambda$, alors $\lim\limits_{n\to+\infty}\left(\sqrt[n]{|u_n|}\right)=\lambda$.*
La réciproque est-elle vrai ?

Solution. On peut supposer, quitte à réindéxer la suite, que tous les u_n sont non nuls.
Si $\lim\limits_{n\to+\infty}\left(\left|\dfrac{u_{n+1}}{u_n}\right|\right)=\lambda\geq 0$, alors $\lim\limits_{n\to+\infty}\left(\ln\left|\dfrac{u_{n+1}}{u_n}\right|\right)=\mu$ avec $\mu=\ln(\lambda)$ pour λ réel et $\mu=-\infty$ pour $\lambda=0$, soit $\lim\limits_{n\to+\infty}(\ln|u_{n+1}|-\ln|u_n|)=\mu$ et en utilisant le théorème de Césaro :

$$\lim_{n\to+\infty}\left(\frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1}(\ln|u_{k+1}|-\ln|u_k|)\right)=\mu$$

soit :

$$\lim_{n\to+\infty}\left(\frac{1}{n}(\ln|u_n|-\ln|u_0|)\right)=\mu$$

encore équivalent à $\lim\limits_{n\to+\infty}\left(\ln\left(\sqrt[n]{|u_n|}\right)\right)=\mu$ (c'est l'exercice précédent avec la suite $(\ln|u_n|)_{n\in\mathbb{N}}$), ce qui donne $\lim\limits_{n\to+\infty}\left(\sqrt[n]{|u_n|}\right)=e^{\mu}=\lambda$.
La réciproque est fausse comme le montre l'exemple de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par :

$$u_n=\begin{cases}a^{\frac{n}{2}}b^{\frac{n}{2}} \text{ si } n \text{ est pair}\\ a^{\frac{n+1}{2}}b^{\frac{n-1}{2}} \text{ si } n \text{ est impair}\end{cases}$$

avec $0<a<b$. On a :

$$\sqrt[n]{u_n}=\begin{cases}\left(a^{\frac{n}{2}}b^{\frac{n}{2}}\right)^{\frac{1}{n}}=\sqrt{ab} \text{ si } n \text{ est pair}\\ \left(a^{\frac{n+1}{2}}b^{\frac{n-1}{2}}\right)^{\frac{1}{n}}=\sqrt{ab}\left(\frac{a}{b}\right)^{\frac{1}{2n}} \text{ si } n \text{ est impair}\end{cases}$$

$$\underset{n\to+\infty}{\to}\sqrt{ab}$$

et :

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} = \begin{cases} \dfrac{a^{\frac{n+2}{2}} b^{\frac{n}{2}}}{a^{\frac{n}{2}} b^{\frac{n}{2}}} = a \text{ si } n \text{ est pair} \\ \dfrac{a^{\frac{n+1}{2}} b^{\frac{n+1}{2}}}{a^{\frac{n+1}{2}} b^{\frac{n-1}{2}}} = b \text{ si } n \text{ est impair} \end{cases}$$

donc $\left(\dfrac{u_{n+1}}{u_n}\right)_{n\in\mathbb{N}}$ n'a pas de limite.

Exercice 44 *Déterminer les limites des suites* $\left(\sqrt[n]{C_{2n}^n}\right)_{n\in\mathbb{N}^*}$, $\left(\sqrt[n]{\prod_{k=0}^{n}(n+k)}\right)_{n\in\mathbb{N}^*}$ *et* $\left(\dfrac{1}{n^2}\sqrt[n]{\dfrac{(3n)!}{n!}}\right)_{n\in\mathbb{N}^*}$.

Solution. Notons $v_n = \sqrt[n]{u_n}$ chacune de ces suites. Dans l'ordre d'apparition, on a :

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{(2n+2)(2n+1)}{(n+1)^2} \underset{n\to+\infty}{\to} 4,$$

donc $\lim\limits_{n\to+\infty} v_n = 4$;

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{(2n+2)(2n+1)}{n} \underset{n\to+\infty}{\to} +\infty,$$

donc $\lim\limits_{n\to+\infty} v_n = +\infty$.

$v_n = \sqrt[n]{\dfrac{(3n)!}{n^{2n}n!}}$ et :

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} = \left(\frac{n}{n+1}\right)^{2n} \frac{(3n+3)(3n+2)(3n+1)}{(n+1)^3} \underset{n\to+\infty}{\to} \frac{27}{e^2},$$

donc $\lim\limits_{n\to+\infty} v_n = \dfrac{27}{e^2}$.

Exercice 45 *Soit* $\alpha > -1$ *et* $(u_n)_{n\geq 1}$ *la suite de réels définie par*

$$u_0 > 0, \quad u_{n+1} = u_n + \frac{1}{u_n^\alpha} \quad (n \geq 0)$$

1. *Montrer que* $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = +\infty$.
2. *Montrer que pour tout* $\beta > 0$ *on a* $u_{n+1}^\beta = u_n^\beta \left(1 + \dfrac{\beta}{u_n^{\alpha+1}} + o\left(\dfrac{1}{u_n^{\alpha+1}}\right)\right)$.
3. *Donner un équivalent de* u_n *à l'infini.*

Solution.

1. La suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est strictement croissante (par récurrence). Si elle était bornée, alors elle serait convergente de limite ℓ vérifiant $\ell = \ell + \dfrac{1}{\ell^\alpha}$, ce qui est impossible. Donc $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = +\infty$.
2. Pour tout réel, on a
$$u_{n+1}^\beta = u_n^\beta \left(1 + \frac{\beta}{u_n^{\alpha+1}} + o\left(\frac{1}{u_n^{\alpha+1}}\right)\right).$$
3. Pour $\beta = \alpha + 1$:
$$\lim_{n\to+\infty} \left(u_{n+1}^{\alpha+1} - u_n^{\alpha+1}\right) = \alpha + 1.$$
Le théorème de Césaro entraîne alors que :
$$\lim_{n\to+\infty} \frac{u_n^{\alpha+1}}{n} = \alpha + 1$$
c'est-à-dire que :
$$u_n \backsim \left((\alpha+1)\,n\right)^{\frac{1}{\alpha+1}}.$$

1.7 Séries convergentes ou divergentes

Exercice 46 *Soit α un réel. Montrer que la série de Riemann $\sum \frac{1}{n^\alpha}$ est convergente si, et seulement si $\alpha > 1$.*

Solution. Rappelons la démonstration de ce résultat. Pour $\alpha \leq 1$, on utilise le fait que si la suite $(S_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge alors $\lim\limits_{n\to+\infty}(S_{2n} - S_n) = 0$ et pour $\alpha > 1$, on montrer que la suite croissante $(S_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est majorée.
Pour $\alpha \leq 1$, on a $x\frac{1}{x^\alpha} = x^{1-\alpha} \geq 1$ pour $x \geq 1$ et :

$$S_{2n} - S_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{(n+k)^\alpha} \geq \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{n+k} \geq \frac{n}{2n} = \frac{1}{2}$$

et la suite $(S_n)_{n\geq 1}$ diverge.
Pour $\alpha > 1$, la fonction $t \to \frac{1}{t^\alpha}$ étant décroissante sur $\mathbb{R}^{+*}$, on a :

$$\forall k \geq 2,\ \int_{k-1}^{k} \frac{dt}{t^\alpha} \geq \int_{k-1}^{k} \frac{dt}{k^\alpha} = \frac{1}{k^\alpha}$$

et pour tout $n \geq 2$, on a :

$$\begin{aligned} S_n &= 1 + \sum_{k=2}^{n} \frac{1}{k^\alpha} \leq 1 + \sum_{k=2}^{n} \int_{k-1}^{k} \frac{dt}{t^\alpha} = 1 + \int_{1}^{n} \frac{dt}{t^\alpha} = 1 + \frac{1}{\alpha-1}\left(1 - \frac{1}{n^{\alpha-1}}\right) \\ &\leq \frac{\alpha}{\alpha-1}. \end{aligned}$$

La suite $(S_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est donc croissante majorée et en conséquence convergente.

Exercice 47 *Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de réels positifs décroissante. Montrer que si la série $\sum u_n$ est convergente, alors la suite $(nu_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers 0, c'est-à-dire que $u_n = o\left(\frac{1}{n}\right)$.*

Solution. Pour $n > m \geq 1$, on a :

$$\sum_{k=m}^{n} u_k \geq (n - m + 1)\, u_n$$

soit :

$$0 \leq nu_n \leq \sum_{k=m}^{n} u_k + (m-1)\, u_n \leq \sum_{k=m}^{+\infty} u_k + mu_n.$$

Comme $\lim\limits_{n\to+\infty}\left(\sum\limits_{k=m}^{+\infty} u_k\right) = 0$, pour $\varepsilon > 0$ donné, on peut trouver entier $m_0 \geq 1$ tel que $\sum\limits_{k=m_0}^{+\infty} u_k \leq \varepsilon$ et on a :

$$\forall n > m_0,\ 0 \leq nu_n \leq \varepsilon + m_0 u_n.$$

Pour m_0 ainsi fixé, tenant compte de $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = 0$, on peut trouver un entier $n_0 > m_0$ tel que $m_0 u_n < \varepsilon$ pour $n \geq n_0$. On a donc $nu_n < 2\varepsilon$ pour $n \geq n_0$. Le réel ε étant quelconque, on a bien montré que $\lim\limits_{n\to+\infty} nu_n = 0$.

Exercice 48 *Soit $f : [1, +\infty[\to \mathbb{R}^+$ une fonction continue décroissante et F la primitive de f nulle en 1. Montrer que la suite $u = (u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ définie par $u_n = \sum\limits_{k=1}^{n} f(k) - F(n)$ pour tout $n \geq 1$ est convergente et la série $\sum f(n)$ de même nature que la suite $(F(n))_{n\in\mathbb{N}^*}$. On a donc, en notant ℓ la limite de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$:*

$$\sum_{k=1}^{n} f(k) \underset{n\to+\infty}{\sim} F(n) + \ell.$$

Solution. La fonction F est définie par :

$$\forall x \geq 1,\ F(x) = \int_{1}^{x} f(t)\, dt.$$

Pour $n \geq 1$, on a :

$$\begin{aligned} u_{n+1} - u_n &= f(n+1) - (F(n+1) - F(n)) \\ &= f(n+1) - \int_n^{n+1} f(t)\,dt = \int_n^{n+1} (f(n+1) - f(t))\,dt \end{aligned}$$

avec f continue et $f(n+1) \leq f(t)$ pour tout $t \in]n, n+1[$. On a donc $u_{n+1} - u_n \leq 0$ et u est décroissante.
La fonction f est continue décroissante sur $[1, +\infty[$, donc :

$$\forall k \geq 1, \ \int_k^{k+1} f(t)\,dt \leq \int_k^{k+1} f(k)\,dt = f(k)$$

et pour tout $n \geq 2$, on a :

$$\sum_{k=1}^{n} f(k) \geq \sum_{k=1}^{n} \int_k^{k+1} f(t)\,dt = \int_1^{n+1} f(t)\,dt = F(n+1),$$

et $u_n \geq F(n+1) - F(n) = \displaystyle\int_n^{n+1} f(t)\,dt \geq 0$ puisque f est à valeurs positives. La suite u est donc décroissante minorée et en conséquence convergente vers un réel $\ell \geq 0$.
Comme f est à valeurs positives, la suite $(F(n))_{n\in\mathbb{N}^*}$ est croissante à valeurs positives et on a deux possibilités. Soit cette suite est majorée et elle converge alors vers un réel $\ell' \geq 0$. Il en résulte alors que $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} f(n) = \ell + \ell'$. Dans le cas contraire, on a $\lim\limits_{n\to+\infty} F(n) = +\infty$ et $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} f(n) = +\infty$.
Dans tous les cas, on a, pour $n \geq 2$:

$$\begin{aligned} \left| \frac{\sum\limits_{k=1}^{n} f(k)}{F(n) + \ell} - 1 \right| &= \frac{\left| \sum\limits_{k=1}^{n} f(k) - F(n) - \ell \right|}{F(n) + \ell} \\ &\leq \frac{\left| \sum\limits_{k=1}^{n} f(k) - F(n) - \ell \right|}{F(2) + \ell} \underset{n\to+\infty}{\to} 0 \end{aligned}$$

c'est-à-dire que $\sum\limits_{k=1}^{n} f(k) \underset{n\to+\infty}{\sim} F(n) + \ell$.

Dans le cas où $\lim\limits_{n\to+\infty} F(n) = +\infty$, on a $F(n) + \ell \underset{n\to+\infty}{\sim} F(n)$ et $\sum\limits_{k=1}^{n} f(k) \underset{n\to+\infty}{\sim} F(n)$.

En utilisant la fonction $f(t) = \dfrac{1}{t^\alpha}$ avec $\alpha > 0$ on retrouve, en les précisant, les résultats sur les séries de Riemann.

Pour $\alpha = 1$, on a $F(x) = \ln(x)$, $\lim\limits_{n\to+\infty} \left(\sum\limits_{k=1}^{n} \dfrac{1}{k} - \ln(n) \right) = \gamma$ (la constante d'Euler), $\sum\limits_{k=1}^{n} \dfrac{1}{k} \underset{+\infty}{\backsim} \ln(n)$ et $\lim\limits_{n\to+\infty} \sum\limits_{k=1}^{n} \dfrac{1}{k} = +\infty$, soit $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} \dfrac{1}{n} = +\infty$.

Pour $\alpha \neq 1$, on a $F(x) = \dfrac{1}{1-\alpha} \left(\dfrac{1}{x^{\alpha-1}} - 1 \right)$.

Pour $\alpha > 1$, on a $F(n) = \dfrac{1}{\alpha - 1} \left(1 - \dfrac{1}{n^{\alpha-1}} \right) \underset{n\to+\infty}{\to} \dfrac{1}{\alpha-1}$ et donc $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} \dfrac{1}{n^\alpha} = \dfrac{1}{\alpha-1} + \ell$.

Pour $\alpha < 1$, on a $F(n) = \dfrac{1}{1-\alpha} \left(n^{1-\alpha} - 1 \right) \underset{n\to+\infty}{\to} +\infty$ et $\sum\limits_{k=1}^{n} \dfrac{1}{k^\alpha} \underset{+\infty}{\backsim} F(n) \underset{+\infty}{\backsim} \dfrac{n^{1-\alpha}}{1-\alpha}$, soit $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} \dfrac{1}{n^\alpha} = +\infty$.

Exercice 49 *On se propose de montrer de façon élémentaire que* $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} \dfrac{(-1)^{n+1}}{n} = \ln(2)$.
On note, pour tout entier $n \geq 1$ *et tout réel* $x \in [0, 1]$ *:*

$$f_n(x) = \sum_{k=0}^{n} (-1)^k x^k.$$

1. *Montrer que :*
$$f_n(x) = \frac{1 - (-1)^{n+1} x^{n+1}}{1+x}$$
pour tout $x \in [0,1]$.
2. *En déduire que, pour tout entier* $n \geq 1$, *on a :*
$$\sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k}{k+1} = \ln(2) - (-1)^{n+1} \int_0^1 \frac{x^{n+1}}{1+x} dx.$$
3. *En déduire le résultat annoncé.*

Solution.

1. Pour $x \in]-1,1[$, on a :
$$\sum_{k=0}^{n} x^k = \frac{1 - x^{n+1}}{1-x}$$
et pour $x \in [0,1[$:
$$f_n(x) = \sum_{k=0}^{n} (-1)^k x^k = \frac{1 - (-1)^{n+1} x^{n+1}}{1+x}.$$
Pour $x = 1$, on a :
$$f_n(1) = \begin{cases} \sum\limits_{j=0}^{p} 1^{2j} - \sum\limits_{j=0}^{p-1} 1^{2j+1} = 1 = \dfrac{1 - (-1)^{2p+1} 1^{2p+1}}{1+1} & \text{si } n = 2p \\ \sum\limits_{j=0}^{p} 1^{2j} - \sum\limits_{j=0}^{p} 1^{2j+1} = 0 = \dfrac{1 - (-1)^{2p+2} 1^{2p+2}}{1+1} & \text{si } n = 2p+1 \end{cases}$$
On a donc $f_n(x) = \dfrac{1 - (-1)^{n+1} x^{n+1}}{1+x}$ pour tout $x \in [0,1]$.
2. En intégrant sur $[0,1]$, on a :
$$\begin{aligned} \int_0^1 f_n(x)\,dx = \sum_{k=0}^{n} (-1)^k \int_0^1 x^k dx &= \sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k}{k+1} \\ &= \int_0^1 \frac{1 - (-1)^{n+1} x^{n+1}}{1+x} dx \\ &= \int_0^1 \frac{1}{1+x} dx - (-1)^{n+1} \int_0^1 \frac{x^{n+1}}{1+x} dx \\ &= \ln(2) - (-1)^{n+1} \int_0^1 \frac{x^{n+1}}{1+x} dx. \end{aligned}$$
3. Avec :
$$0 \leq \int_0^1 \frac{x^{n+1}}{1+x} dx \leq \int_0^1 x^{n+1} dx = \frac{1}{n+2} \underset{n\to+\infty}{\to} 0,$$
on déduit que $\lim\limits_{n\to+\infty} \sum\limits_{k=0}^{n} \dfrac{(-1)^k}{k+1} = \ln(2)$, soit $\sum\limits_{n=0}^{+\infty} \dfrac{(-1)^n}{n+1} = \ln(2)$ ou encore $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} \dfrac{(-1)^{n-1}}{n} = \ln(2)$.

Exercice 50 *En s'inspirant de la méthode utilisée à l'exercice précédent, montrer que* $\sum\limits_{n=0}^{+\infty} \dfrac{(-1)^n}{2n+1} = \dfrac{\pi}{4}$.

Solution.

1. Pour $x \in [0,1[$:
$$f_n(x) = \sum_{k=0}^{n} (-1)^k x^{2k} = \frac{1 - (-1)^{n+1} x^{2n+2}}{1+x^2}.$$
Pour $x = 1$, on a :
$$f_n(1) = \begin{cases} \sum\limits_{j=0}^{p} 1^{4j} - \sum\limits_{j=0}^{p-1} 1^{4j+2} = 1 = \dfrac{1 - (-1)^{2p+1} 1^{4p+2}}{1+1} & \text{si } n = 2p \\ \sum\limits_{j=0}^{p} 1^{4j} - \sum\limits_{j=0}^{p} 1^{4j+2} = 0 = \dfrac{1 - (-1)^{2p+2} 1^{4p+4}}{1+1} & \text{si } n = 2p+1 \end{cases}$$
On a donc $f_n(x) = \dfrac{1 - (-1)^{n+1} x^{2n+2}}{1+x^2}$ pour tout $x \in [0,1]$.

2. En intégrant sur $[0,1]$, on a :

$$\int_0^1 f_n(x)\,dx = \sum_{k=0}^{n} (-1)^k \int_0^1 x^{2k} dx = \sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k}{2k+1}$$
$$= \int_0^1 \frac{1-(-1)^{n+1} x^{2n+2}}{1+x^2} dx$$
$$= \int_0^1 \frac{1}{1+x^2} dx - (-1)^{n+1} \int_0^1 \frac{x^{2n+2}}{1+x^2} dx$$
$$= \frac{\pi}{4} - (-1)^{n+1} \int_0^1 \frac{x^{2n+2}}{1+x^2} dx.$$

3. Avec :

$$0 \leq \int_0^1 \frac{x^{2n+2}}{1+x^2} dx \leq \int_0^1 x^{2n+2} dx = \frac{1}{2n+3} \underset{n\to+\infty}{\to} 0,$$

on déduit que $\lim\limits_{n\to+\infty} \sum\limits_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k}{2k+1} = \frac{\pi}{4}$, soit $\sum\limits_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{2n+1} = \frac{\pi}{4}$.

Exercice 51 *On se propose d'étudier les séries de termes généraux* $u_n = a^n e^{in\theta}$, $s_n = a^n \sin(n\theta)$ *et* $c_n = a^n \cos(n\theta)$ *où* a *et* θ *sont deux réels quelconques.*

1. *Montrer que pour* $\theta \in \mathbb{R}$ *et* $|a| < 1$, *les trois séries convergent et calculer la somme de chacune ces séries.*
2. *Que dire des séries* $\sum c_n$ *et* $\sum s_n$ *pour* $\theta \in \pi\mathbb{Z}$ *et* $a \in \mathbb{R}$ *?*
3. *On suppose que* $\theta \in \mathbb{R} \setminus \pi\mathbb{Z}$ *et* $|a| \geq 1$.
   (a) *Montrer que la suite* $(\sin(n\theta))_{n\in\mathbb{N}}$ *est divergente.*
   (b) *Montrer la série* $\sum s_n$ *est divergente.*
   (c) *Montrer la série* $\sum c_n$ *est divergente.*

Solution.

1. On a $u_n = \lambda^n$ avec $\lambda = ae^{i\theta}$ et la série $\sum u_n$ converge si, et seulement si, $|\lambda| < 1$, ce qui équivaut à $|a| < 1$ et $\theta \in \mathbb{R}$.
   Pour $|a| < 1$ et $\theta \in \mathbb{R}$, on a ;

$$\sum_{n\geq 0} u_n = \frac{1}{1-ae^{i\theta}} = \frac{1}{1-a\cos(\theta) - ia\sin(\theta)}$$
$$= \frac{1-a\cos(\theta)+ia\sin(\theta)}{(1-a\cos(\theta))^2 + a^2\sin^2(\theta)} = \frac{1-a\cos(\theta)+ia\sin(\theta)}{1-2a\cos\theta + a^2}$$

et :

$$\sum_{n\geq 0} \overline{u_n} = \frac{1-a\cos(\theta)-ia\sin(\theta)}{1-2a\cos\theta+a^2}$$

puis :

$$\sum_{n\geq 0} c_n = \frac{1}{2}\left(\sum_{n\geq 0} u_n + \sum_{n\geq 0} \overline{u_n}\right) = \frac{1}{2}\left(\sum_{n\geq 0} u_n + \overline{\sum_{n\geq 0} u_n}\right)$$
$$= \Re\left(\sum_{n\geq 0} u_n\right) = \frac{1-a\cos((\theta))}{1-2a\cos((\theta))+a^2}$$

et :

$$\sum_{n\geq 0} s_n = \Im\left(\sum_{n\geq 0} u_n\right) = \frac{a\sin((\theta))}{1-2a\cos((\theta))+a^2}.$$

2. Si $\theta = p\pi$ avec $p \in \mathbb{Z}$, on a $s_n = 0$ pour tout $n \in \mathbb{N}$ et tout $a \in \mathbb{R}$, de sorte que $\sum\limits_{n\geq 0} s_n = 0$. On a aussi $c_n = a^n(-1)^{np} = ((-1)^p a)^n$ et $\sum c_n$ converge si, et seulement si, $|a| < 1$.
3. On remarque que la condition $\theta \notin \pi\mathbb{Z}$ équivaut à $\sin(\theta) \neq 0$.

(a) Supposons que $\lim\limits_{n \to +\infty} (\sin(n\theta)) = \ell$. Avec :

$$\sin((n+1)\theta) + \sin((n-1)\theta) = 2\sin(n\theta)\cos(\theta),$$

on déduit que $2\ell = 2\ell\cos(\theta)$, ce qui impose $\ell = 0$ puisque $\cos(\theta) \neq 1$ si $\sin(\theta) \neq 0$.
Avec :

$$\sin((n+1)\theta) = \cos(n\theta)\sin(\theta) + \sin(n\theta)\cos(\theta),$$

on déduit que $\lim\limits_{n \to +\infty} (\cos(n\theta)\sin(\theta)) = 0$, ce qui entraîne $\lim\limits_{n \to +\infty} (\cos(n\theta)) = 0$ puisque $\sin(\theta) \neq 0$, mais ce dernier résultat est incompatible avec $\cos^2(n\theta) + \sin^2(n\theta) = 1$.

(b) Supposons que la série $\sum s_n$ soit convergente. On a alors $\lim\limits_{n \to +\infty} (s_n) = 0$ et comme $|\sin(n\theta)| = \left|\frac{s_n}{a^n}\right| \leq |s_n|$ pour $|a| \geq 1$, on en déduit que $\lim\limits_{n \to +\infty} (\sin(n\theta)) = 0$ ce qui est faux.

(c) Supposons que la série $\sum c_n$ soit convergente. On a alors $\lim\limits_{n \to +\infty} (c_n) = 0$ et comme $|\cos(n\theta)| = \left|\frac{c_n}{a^n}\right| \leq |c_n|$ pour $|a| \geq 1$, on en déduit que $\lim\limits_{n \to +\infty} (\cos(n\theta)) = 0$ et avec :

$$\cos((n+1)\theta) = \cos(n\theta)\cos(\theta) - \sin(n\theta)\sin(\theta)$$

on en déduit que $\lim\limits_{n \to +\infty} (\sin(n\theta)\sin(\theta)) = 0$ et $\lim\limits_{n \to +\infty} (\sin(n\theta)) = 0$ (puisque $\sin(\theta) \neq 0$) ce qui est faux.

1.8 Séries alternées

On dit qu'une série est alternée si son terme général est de la forme $u_n = (-1)^n \alpha_n$, où $(\alpha_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite réelle de signe constant.

Le théorème relatif aux suites adjacentes nous permet de montrer le résultat fondamental suivant.

Exercice 52 *Soit $\sum (-1)^n \alpha_n$ est une série alternée. Montrer que si la suite $(\alpha_n)_{n\in\mathbb{N}}$ tend vers 0 en décroissant, alors la série $\sum (-1)^n \alpha_n$ est convergente et une majoration des restes est donnée par :*

$$\forall n \in \mathbb{N},\ |R_n| = \left|\sum_{k=n+1}^{+\infty} (-1)^k \alpha_k\right| \leq \alpha_{n+1}.$$

Solution. On vérifie que si $(S_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est la suite des sommes partielles de cette série, alors les suites $(S_{2n})_{n\in\mathbb{N}}$ et $(S_{2n+1})_{n\in\mathbb{N}}$ sont adjacentes et en conséquence convergente vers la même limite, ce qui équivaut à la convergence de $(S_n)_{n\in\mathbb{N}}$.
En utilisant la décroissance de la suite $(\alpha_n)_{n\in\mathbb{N}}$, on déduit que pour tout entier n, on a :

$$\begin{cases} S_{2n+2} - S_{2n} = \alpha_{2n+2} - \alpha_{2n+1} \leq 0, \\ S_{2n+3} - S_{2n+1} = a_{2n+2} - a_{2n+3} \geq 0, \end{cases}$$

ce qui signifie que $(S_{2n})_{n\in\mathbb{N}}$ est décroissante et $(S_{2n+1})_{n\in\mathbb{N}}$ croissante. De plus avec :

$$S_{2n+1} - S_{2n} = \alpha_{2n+1} \underset{n\to+\infty}{\to} 0,$$

on déduit que ces suites sont convergentes et la convergence de la série $\sum (-1)^n \alpha_n$ en découle. En notant S la somme de cette séries, on a :

$$\forall n \in \mathbb{N},\ S_{2n+1} \leq S \leq S_{2n+2} \leq S_{2n},$$

ce qui entraîne :

$$\forall n \in \mathbb{N},\ \begin{cases} -\alpha_{2n+1} \leq R_{2n} = S - S_{2n} \leq 0, \\ 0 \leq R_{2n+1} = S - S_{2n+1} \leq \alpha_{2n+2} \end{cases}$$

ou encore :

$$\forall n \in \mathbb{N},\ |R_n| \leq \alpha_{n+1}.$$

Exercice 53

1. *Montrer que la suite $(I_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par :*

$$\forall n \in \mathbb{N},\ I_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^n(x)\,dx$$

tend vers 0 en décroissant.

2. *Montrer que la série de terme général :*

$$u_n = (-1)^n \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^n(x)\, dx$$

est convergente et calculer sa somme.

Solution.

1. Pour $n \geq 0$, on a :

$$0 \leq I_{n+1} = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^n(x)\cos(x)\, dx \leq \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^n(x)\, dx = I_n,$$

donc $(I_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est décroissante.
Pour $n \geq 1$ et $\varepsilon \in \left]0, \frac{\pi}{2}\right[$, on a :

$$0 \leq I_n = \int_0^{\varepsilon} \cos^n(x)\, dx + \int_{\varepsilon}^{\frac{\pi}{2}} \cos^n(x)\, dx \leq \varepsilon + \cos^n(\varepsilon).$$

Comme $0 < \cos^n(\varepsilon) < 1$, on a $\lim\limits_{n\to+\infty} \cos^n(\varepsilon) = 0$ et il existe un entier n_ε tel que $\cos^n(\varepsilon) < \varepsilon$ pour tout $n \geq n_\varepsilon$, ce qui donne $0 \leq I_n < \varepsilon$ pour tout $n \geq n_\varepsilon$. On a donc ainsi montré que la suite $(I_n)_{n\in\mathbb{N}}$ tend vers 0 (en fait, on peut montrer que $I_n \sim \sqrt{\frac{\pi}{2n}}$).

2. Le théorème des séries alternées nous dit que cette série converge.
Pour tout $x \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$, on a :

$$S_n(x) = \sum_{k=0}^{n} (-1)^k \cos^k(x) = \frac{1}{1+\cos(x)} + (-1)^n \frac{\cos^{n+1}(x)}{1+\cos(x)}$$

et :

$$S_n = \sum_{k=0}^{n} u_k = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{dx}{1+\cos(x)} + (-1)^n \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos^{n+1}(x)}{1+\cos(x)} dx,$$

avec :

$$0 \leq \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos^{n+1}(x)}{1+\cos(x)} dx \leq \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^{n+1}(x)\, dx = I_{n+1} \underset{n\to+\infty}{\to} 0,$$

ce qui donne :

$$\sum_{n=0}^{+\infty} u_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{dx}{1+\cos(x)} = 2\int_0^1 \frac{dt}{(1+t^2)\left(1+\frac{1-t^2}{1+t^2}\right)} = 1$$

en effectuant le changement de variable $t = \tan\left(\frac{x}{2}\right)$.

1.9 Séries absolument convergentes

On dit que la série $\sum u_n$ est absolument convergente si la série $\sum |u_n|$ est convergente.
Solution. Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite numérique. Si la série $\sum |u_n|$ est convergente, alors la série $\sum u_n$ est convergente et :

$$\left|\sum_{n=0}^{+\infty} u_n\right| \leq \sum_{n=0}^{+\infty} |u_n|.$$

Solution. Soit $\sum u_n$ une série numérique absolument convergente.
La suite des sommes partielles $\left(\sum\limits_{k=0}^{n} |u_k|\right)_{n\in\mathbb{N}}$ étant convergente, elle vérifie le critère de Cauchy et pour tout réel$\varepsilon > 0$, on peut trouver un entier n_0 tel que :

$$\forall m > n \geq n_0, \quad \sum_{k=p+1}^{q} |u_k| < \varepsilon,$$

ce qui entraîne que :

$$\forall m > n \geq n_0, \quad \left|\sum_{k=p+1}^{q} u_k\right| \leq \sum_{k=p+1}^{q} |u_k| < \varepsilon$$

et signifie que la suite des sommes partielles $\left(\sum\limits_{k=0}^{n} u_k\right)_{n\in\mathbb{N}}$ est de Cauchy et en conséquence convergente, encore équivalent à dire que la série $\sum u_n$ est convergente.
En utilisant l'inégalité triangulaire, pour tout entier n :

$$\left|\sum_{k=0}^{n} u_k\right| \leq \sum_{k=0}^{n} |u_k|$$

et faisant tendre n vers l'infini, on déduit que $\left|\sum\limits_{n=0}^{+\infty} u_n\right| \leq \sum\limits_{n=0}^{+\infty} |u_n|$.

Une série numérique convergente, mais non absolument convergente est dite semi-convergente.

1.10 Séries à termes positifs

L'étude des séries à termes positifs permet de retrouver le fait qu'une série absolument convergente est convergente sans recours au critère de Cauchy.

Exercice 54 *Pour tout réel x, on note :*

$$\begin{cases} x^+ = \max(x, 0) \\ x^- = \max(-x, 0) \end{cases}$$

1. *Montrer que pour tout réel x, on a :*
$$\begin{cases} x = x^+ - x^- \\ |x| = x^+ + x^- \end{cases}$$
2. *Soit $\sum u_n$ une série réelle absolument convergente.*
   (a) *Montrer que les séries $\sum u_n^+$ et $\sum u_n^-$ sont convergentes.*
   (b) *En déduire que la série $\sum u_n$ est convergente.*
3. *Montrer qu'une série complexe $\sum u_n$ absolument convergente est convergente.*

Solution.

1. Pour $x \geq 0$ [resp. $x < 0$] on a $x^+ = x$, $x^- = 0$ [resp. $x^+ = 0$, $x^- = -x$] et $|x| = x$ [resp. $|x| = -x$], ce qui donne le résultat.
2.
   (a) Résulte de $0 \leq u_n^+ \leq |u_n|$, $0 \leq u_n^- \leq |u_n|$ et $\sum |u_n| < +\infty$.
   (b) Résulte de $u_n = u_n^+ - u_n^-$ et de la convergence des séries $\sum u_n^+$ et $\sum u_n^-$.
3. On écrit que $u_n = x_n + iy_n$, où $x_n = \Re(u_n)$ et $y_n = \Im(u_n)$. Avec $|x_n| \leq |u_n|$ et $|y_n| \leq |u_n|$, on déduit que les séries réelles $\sum x_n$ et $\sum y_n$ sont absolument convergentes, donc convergentes et la convergence de $\sum u_n$ suit.

Exercice 55 *On s'intéresse à la série de Bertrand de terme général $u_n = \dfrac{1}{n^\alpha (\ln(n))^\beta}$, où α et β sont deux réels donnés.*

1. *Montrer que cette série converge pour $\alpha > 1$ et $\beta \in \mathbb{R}$.*
2. *Montrer que cette série diverge pour $\alpha < 1$ et $\beta \in \mathbb{R}$.*
3. *On suppose que $\alpha = 1$. Montrer que $\sum u_n$ converge si, et seulement si, $\beta > 1$.*

Solution.

1. Si $\alpha > 1$, on peut trouver un réel γ tel que $1 < \gamma < \alpha$ et avec :
$$\lim_{n\to+\infty} n^\gamma u_n = \lim_{n\to+\infty} \frac{1}{n^{\alpha-\gamma} (\ln(n))^\beta} = 0$$
pour tout réel β, on déduit que $\sum u_n$ converge puisque $\gamma > 1$.

2. Si $\alpha < 1$, on peut trouver un réel γ tel que $\alpha < \gamma < 1$ et avec :

$$\lim_{n\to+\infty} n^{\gamma} u_n = \lim_{n\to+\infty} \frac{n^{\gamma-\alpha}}{(\ln(n))^{\beta}} = +\infty$$

pour tout réel β, on déduit que $\sum u_n$ diverge puisque $\gamma < 1$.

3. Pour $\beta \geq 0$, la fonction f définie sur$[2, +\infty[$ par $f(x) = \dfrac{1}{x(\ln(x))^{\beta}}$ est continue et strictement décroissante (produit de deux fonctions strictement décroissantes à valeurs strictement positives), donc $\sum u_n$ est de même nature que la suite $(F(n))_{n\geq 2}$, où F est la primitive de f nulle en 2, soit :

$$\begin{aligned} F(x) &= \int_2^x \frac{dt}{t(\ln(t))^{\beta}} = \int_{\ln(2)}^{\ln(x)} \frac{du}{u^{\beta}} \\ &= \begin{cases} \frac{1}{1-\beta}\left((\ln(x))^{1-\beta} - (\ln(2))^{1-\beta}\right) & \text{si } \beta \neq 1 \\ \ln(\ln(x)) - \ln(\ln(2)) & \text{si } \beta = 1 \end{cases} \end{aligned}$$

(théorème **??**).
Pour $0 \leq \beta \leq 1$, on a $\lim\limits_{n\to+\infty} F(n) = +\infty$ et $\sum u_n$ diverge.
Pour $\beta > 1$, on a $\lim\limits_{n\to+\infty} F(n) = \dfrac{(\ln(2))^{1-\beta}}{\beta - 1}$ et $\sum u_n$ converge.
Pour $\beta < 0$, on a $u_n = \dfrac{(\ln(n))^{-\beta}}{n} \geq \dfrac{(\ln(2))^{-\beta}}{n} > 0$ pour tout $n \geq 2$ et $\sum u_n$ diverge.

Exercice 56 *Soient $\sum u_n$ et $\sum v_n$ des séries à termes positifs telles que $v_n = o(u_n)$ [resp. $v_n = O(u_n)$] On désigne respectivement par $(S_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(T_n)_{n\in\mathbb{N}}$ les suites des sommes partielles de ces séries et, en cas de convergence, par $(R_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(R'_n)_{n\in\mathbb{N}}$ les suites des restes correspondants.*

1. *Montrer que si $\sum u_n$ converge, il en est alors de même de $\sum v_n$ et $R'_n = o(R_n)$ [resp. $R'_n = O(R_n)$].*
2. *Montrer que si $\sum v_n$ diverge, il en est alors de même de $\sum u_n$ et $T_n = o(S_n)$ [resp. $T_n = O(S_n)$].*

Solution. La condition $v_n = o(u_n)$ [resp. $v_n = O(u_n)$] signifie qu'il existe une suite $(\varepsilon_n)_{n\in\mathbb{N}}$ qui tend vers 0 [resp. bornée] telle que $v_n = \varepsilon_n u_n$. Comme les suites $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sont à valeurs positives, on peut trouver une telle suite $(\varepsilon_n)_{n\in\mathbb{N}}$ à valeurs positives. Dans les deux cas de figure, la suite $(\varepsilon_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est bornée et il existe un constante réelle $\lambda > 0$ telle que $v_n \leq \lambda u_n$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. Le corollaire précédent nous dit alors que $\sum v_n$ converge si $\sum u_n$ converge et $\sum u_n$ diverge si $\sum v_n$ diverge.

1. Si les u_n sont tous nuls à partir d'un rang n_0, il en est alors de même des v_n et $R'_n = R_n = 0$ pour tout $n \geq n_0$. Dans ce cas, on a bien $R'_n = o(R_n)$ [resp. $R'_n = O(R_n)$].
Dans le cas contraire, les suites $(R_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(R'_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sont à valeurs strictement positives. Si $\lim\limits_{n\to+\infty} \varepsilon_n = 0$, pour tout réel $\varepsilon > 0$, on peut trouver un entier n_ε tel que $0 \leq \varepsilon_n \leq \varepsilon$ pour tout $n \geq n_\varepsilon$ et :
$$\forall n \geq n_\varepsilon,\ 0 < R'_n \leq \varepsilon R_n.$$
On a donc $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{R'_n}{R_n} = 0$, ce qui signifie que $R'_n = o(R_n)$.
Dans le as où $v_n = O(u_n)$, la suite $(\varepsilon_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est bornée, soit $\varepsilon_n \leq \lambda$ où $\lambda > 0$ et $0 < R'_n \leq \lambda R_n$ pour tout n. La suite $\left(\dfrac{R'_n}{R_n}\right)_{n\in\mathbb{N}}$ est donc bornée, ce qui signifie que $R'_n = O(R_n)$.
2. Si $\sum v_n = +\infty$, on a alors $\sum u_n = +\infty$ et les suites $(S_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(T_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sont croissantes non majorées, donc strictement positives à partir d'un certain rang.
Si $\lim\limits_{n\to+\infty} \varepsilon_n = 0$, pour tout réel $\varepsilon > 0$, on peut trouver un entier n_ε tel que $0 < \varepsilon_n \leq \varepsilon$ pour tout $n \geq n_\varepsilon$ et comme $(S_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est croissante non majorée, il existe un entier $n_1 \geq n_\varepsilon$ tel que $S_n \geq \dfrac{1}{\varepsilon} \sum\limits_{k=0}^{n_\varepsilon} v_k$, de sorte que :
$$\forall n \geq n_1,\ T_n = \sum_{k=0}^{n_\varepsilon} v_k + \sum_{k=n_\varepsilon+1}^{n} v_k \leq \varepsilon S_n + \varepsilon \sum_{k=n_\varepsilon+1}^{n} u_k \leq 2\varepsilon S_n.$$
On a donc $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{T_n}{S_n} = 0$, ce qui signifie que $T_n = o(S_n)$.
Dans le as où $v_n = O(u_n)$, la suite $(\varepsilon_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est bornée, soit $\varepsilon_n \leq \lambda$ où $\lambda > 0$ et $0 < T_n \leq \lambda S_n$ pour tout n. La suite $\left(\dfrac{T_n}{S_n}\right)_{n\in\mathbb{N}}$ est donc bornée, ce qui signifie que $T_n = O(S_n)$.

Les résultats de l'exercice précédent peuvent être utilisés en relation avec des développements limités.

Exercice 57 *Étudier la série de terme général* $u_n = \left(\cos\left(\frac{1}{n}\right)\right)^{n^\gamma}$ *où γ est un réel.*

Solution. Un développement limité nous donne :

$$\begin{aligned}\ln(u_n) &= n^\gamma \ln\left(\cos\left(\frac{1}{n}\right)\right)\\ &= n^\gamma \ln\left(1-\frac{1}{2n^2}+o\left(\frac{1}{n^2}\right)\right)\\ &= -\frac{1}{2n^{2-\gamma}}+o\left(\frac{1}{n^{2-\gamma}}\right).\end{aligned}$$

Pour $\gamma < 2$, on a $\lim\limits_{n\to+\infty} \ln(u_n) = 0$, donc $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = 1$ et la série diverge.
Pour $\gamma = 2$, on a $\lim\limits_{n\to+\infty} \ln(u_n) = -\frac{1}{2}$, donc $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = \frac{1}{\sqrt{e}}$ et la série diverge.
On suppose donc que $\gamma > 2$ (dans ce cas, on a $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = 0$). Pour α réel à préciser, on a :

$$\begin{aligned}\ln(n^\alpha u_n) &= \alpha\ln(n) - \frac{1}{2n^{2-\gamma}} + o\left(\frac{1}{n^{2-\gamma}}\right)\\ &= -\frac{2^{\gamma-2}}{2}\left(1-2\alpha\frac{\ln(n)}{2^{\gamma-2}}+o(1)\right)\\ &\backsim -\frac{2^{\gamma-2}}{2} \underset{n\to+\infty}{\to} -\infty\end{aligned}$$

et $\lim\limits_{n\to+\infty}(n^\alpha u_n) = 0$. Choisissant $\alpha = 2$, on en déduit que la série $\sum u_n$ converge.

Exercice 58 *Soient $\sum u_n$ et $\sum v_n$ deux séries à termes réels positifs telles que $u_n \backsim v_n$. Montrer que :*

1. *Si $\sum u_n$ est convergente il en est alors de même de $\sum v_n$ et les restes de ces séries sont équivalents, soit :*

$$R_n = \sum_{k=n}^{+\infty} u_k \backsim R'_n = \sum_{k=n}^{+\infty} v_k.$$

2. *Si $\sum u_n$ est divergente il en est alors de même de $\sum v_n$ et les sommes partielles de ces séries sont équivalents, soit :*

$$S_n = \sum_{k=0}^{n} u_k \backsim T_n = \sum_{k=0}^{n} v_k.$$

Solution. Dire que les suites à termes positifs $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sont équivalentes signifie qu'il existe une suite $(\varepsilon_n)_{n\in\mathbb{N}}$ qui tend vers 1 telle que $v_n = \varepsilon_n u_n$, ce qui équivaut encore à dire que pour tout réel $\varepsilon \in]0,1[$ il existe un entier n_0 tel que :

$$\forall n \geq n_0,\ (1-\varepsilon)\,u_n \leq v_n \leq (1+\varepsilon)\,u_n.$$

Dans ce qui suit on se donne un tel couple (ε, n_0).

1. Si la série de terme général u_n est convergente, des inégalités $0 \leq v_n \leq (1+\varepsilon)\,u_n$ pour tout $n \geq n_0$, on déduit qu'il en est de même de la série de terme général v_n. On peut donc définir les restes d'ordre n de ces séries, $R_n = \sum\limits_{k=n}^{+\infty} u_k$ et $S_n = \sum\limits_{k=n}^{+\infty} v_k$ et on a :

$$\forall n \geq n_0,\ (1-\varepsilon)\,R_n \leq S_n \leq (1+\varepsilon)\,R_n,$$

ce qui traduit l'équivalence de R_n et S_n quand n tend vers l'infini.

2. Si la série de terme général u_n est divergente, des inégalités $v_n \geq (1-\varepsilon)\,u_n$ pour tout $n \geq n_0$ avec $1-\varepsilon > 0$ et $u_n \geq 0$, on déduit qu'il en est de même de la série de terme général v_n. De plus, on a $S_n > 0$ à partir d'un certain rang $n_1 > n_0$ et :

$$\forall n > n_1,\ (1-\varepsilon)\,(S_n - S_{n_0-1}) \leq T_n - T_{n_0-1} \leq (1+\varepsilon)\,(S_n - S_{n_0-1})$$

ce qui entraîne que, pour tout $n > n_1$, on a :

$$(1-\varepsilon)\left(1-\frac{S_{n_0-1}}{S_n}\right)+\frac{T_{n_0-1}}{S_n}\leq\frac{T_n}{S_n}\leq(1+\varepsilon)\left(1-\frac{S_{n_0-1}}{S_n}\right)+\frac{T_{n_0-1}}{S_n}.$$

Avec $\lim\limits_{n\to+\infty}\dfrac{1}{S_n}=0$, on en déduit alors qu'il existe $n_2 \geq n_1$ tel que :

$$\forall n\geq n_0,\ 1-2\varepsilon\leq\frac{T_n}{S_n}\leq 1+2\varepsilon,$$

ce qui traduit l'équivalence de S_n et T_n quand n tend vers l'infini.

Exercice 59 *Montrer que l'hypothèse u_n et v_n de mêmes signes (au moins à partir d'un certain rang) est essentielle dans le résultat précédent.*

Solution. Considérons par exemple la série de terme général $u_n = \dfrac{(-1)^n}{\sqrt{n}+(-1)^n}$. Un développement limité nous donne :

$$\begin{aligned}u_n&=\frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}\frac{1}{1+\frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}}=\frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}-\frac{1}{n}+O\left(\frac{1}{n^{\frac{3}{2}}}\right)\\&=\frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}-\frac{1}{n}+v_n\end{aligned}$$

avec $|v_n|\leq\lambda\dfrac{1}{n^{\frac{3}{2}}}$, ce qui implique que la série de terme général u_n est divergente comme somme d'une série divergente (la série $\sum\dfrac{1}{n}$) avec des séries convergentes (les séries $\sum\dfrac{(-1)^n}{\sqrt{n}}$ et $\sum v_n$). Et pourtant u_n est équivalent $\dfrac{(-1)^n}{\sqrt{n}}$ qui est le terme général d'une série alternée convergente.

Si $\sum u_n$ et $\sum v_n$ deux séries à termes réels positifs telles que $u_n \backsim v_n$ et convergentes, on a seulement l'équivalence des restes, mais pas celle des sommes partielles. Par exemple $\dfrac{1}{n(n+1)}\backsim\dfrac{1}{n^2}$ avec :

$$S_n=\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k(k+1)}=\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k}-\frac{1}{k+1}=1-\frac{1}{n+1}\backsim 1$$

et :

$$T_n=\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k^2}>1+\frac{1}{4}$$

ne peut être équivalent à 1 (en fait $T_n\backsim\dfrac{\pi^2}{6}$).

Les précisions sur les sommes partielles des séries divergentes ou les restes des séries convergentes dans le théorème précédent peuvent être utilisées pour obtenir des développements asymptotiques de certaines suites.

Considérons par exemple le cas de la série harmonique $(H_n)_{n\geq1}$ définie par :

$$\forall n\geq 1,\ H_n=\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k}.$$

Cette série est divergente et à termes positifs avec $\dfrac{1}{n}\backsim\ln\left(1+\dfrac{1}{n}\right)$, ce qui entraîne que :

$$H_n\backsim\sum_{k=1}^{n}\ln\left(1+\frac{1}{k}\right)=\ln\left(\prod_{k=1}^{n}\left(\frac{k+1}{k}\right)\right)=\ln(n+1),$$

ou encore $H_n\backsim\ln(n)$.

La suite $(K_n)_{n\geq1}$ définie par $K_n=H_n-\ln(n)$ est de même nature que la série de terme général :

$$K_{n+1}-K_n=\frac{1}{n+1}+\ln\left(1-\frac{1}{n+1}\right)=O\left(\frac{1}{n^2}\right),$$

elle est donc convergente. Sa limite est la constante d'Euler :

$$\gamma = \lim_{n\to+\infty}\left(\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k} - \ln(n)\right).$$

On considère ensuite la suite $(L_n)_{n\geq 1}$ définie par $L_n = H_n - \ln(n) - \gamma$. Cette suite est convergente vers 0 de même nature que la série de terme général :

$$L_{n+1} - L_n = K_{n+1} - K_n = \frac{1}{n+1} + \ln\left(1 - \frac{1}{n+1}\right) \backsim -\frac{1}{2n^2}.$$

Cette série est donc convergente à termes négatifs à partir d'un certain rang, ce qui entraîne l'équivalence des restes :

$$\sum_{k=n}^{+\infty}(L_{k+1} - L_k) \backsim -\frac{1}{2}\sum_{k=n}^{+\infty}\frac{1}{k^2}$$

avec :

$$\sum_{k=n}^{+\infty}(L_{k+1} - L_k) = \lim_{m\to+\infty}\sum_{k=n}^{m}(L_{k+1} - L_k) = \lim_{m\to+\infty} L_{m+1} - L_n = -L_n.$$

On a donc :

$$L_n \backsim \frac{1}{2}\sum_{k=n}^{+\infty}\frac{1}{k^2}.$$

Enfin avec :

$$\forall k \geq 2,\ \int_k^{k+1}\frac{dt}{t^2} \leq \frac{1}{k^2} \leq \int_{k-1}^{k}\frac{dt}{t^2},$$

on déduit que pour $m > n \geq 2$, on a :

$$\begin{aligned}\sum_{k=n}^{m}\int_k^{k+1}\frac{dt}{t^2} &= \int_n^{m+1}\frac{dt}{t^2} = \frac{1}{n} - \frac{1}{m+1} \leq \sum_{k=n}^{m}\frac{1}{k^2}\\ &\leq \sum_{k=n}^{m}\int_{k-1}^{k}\frac{dt}{t^2} = \int_{n-1}^{m}\frac{dt}{t^2} = \frac{1}{n-1} - \frac{1}{m}\end{aligned}$$

et faisant tendre m vers l'infini (à n fixé), on déduit que :

$$\forall n \geq 2,\ \frac{1}{n} \leq \sum_{k=n}^{+\infty}\frac{1}{k^2} \leq \frac{1}{n-1},$$

ce qui implique que :

$$L_n \backsim \frac{1}{2}\sum_{k=n}^{+\infty}\frac{1}{k^2} \backsim \frac{1}{2n}.$$

On a donc en définitive le développement asymptotique :

$$H_n = \ln(n) + \gamma + \frac{1}{2n} + o\left(\frac{1}{n}\right).$$

En itérant ce procédé on peut obtenir des termes supplémentaires du développement asymptotique.

1.11 Théorèmes de Cauchy et de d'Alembert

Exercice 60 *On considère les suites* $(u_n)_{n\geq 1}$ *et* $(v_n)_{n\geq 1}$ *définies par* $u_n = \dfrac{n^n\sqrt{n}}{e^n n!}$ *et* $v_n = \ln\left(\dfrac{u_{n+1}}{u_n}\right)$.

1. *Montrer que la série* $\sum v_n$ *converge.*
2. *En déduire que la suite* $(u_n)_{n\geq 1}$ *converge vers un réel* $\lambda > 0$.
3. *Montrer que* $n! \backsim \lambda\dfrac{\sqrt{n}n^n}{e^n}$ *(formule de Stirling). On peut montrer, mais c'est plus difficile, que*$\lambda = \sqrt{2\pi}$.

4. Étudier les série de termes généraux $\dfrac{e^n n!}{n^n}$, *et* $\dfrac{n^n}{e^n n^\alpha n!}$ *(cas* $a = e$ *et* $a = \dfrac{1}{e}$ *dans l'exercice précédent).*

Solution.

1. On a :
$$v_n = \ln\left(\frac{1}{e}\left(\frac{n+1}{n}\right)^{n+\frac{1}{2}}\right) = -1 + \left(n + \frac{1}{2}\right)\ln\left(1 + \frac{1}{n}\right)$$
et un développement limité donne :
$$v_n = -1 + \left(n + \frac{1}{2}\right)\left(\frac{1}{n} - \frac{1}{2n^2} + O\left(\frac{1}{n^3}\right)\right) = O\left(\frac{1}{n^2}\right)$$
donc la série $\sum v_n$ converge absolument (puisqu'on a aussi $|v_n| = O\left(\dfrac{1}{n^2}\right)$).
2. Comme $v_n = \ln(u_{n+1}) - \ln(u_n)$, la série $\sum v_n$ est de même nature que la suite $(\ln(u_n))_{n\geq 1}$ et cette dernière converge. En notant ℓ sa limite, on a $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = \alpha = e^\ell > 0$.
3. Il en résulte que $n! \backsim \lambda \dfrac{\sqrt{n} n^n}{e^n}$.
4. Pour $u_n = \dfrac{e^n n!}{n^n}$ on a :
$$\frac{u_{n+1}}{u_n} = e\left(\frac{n}{n+1}\right)^n \underset{n\to+\infty}{\to} 1$$
et le théorème de d'Alembert ne permet pas de conclure. En utilisant la formule de Stirling, on a :
$$u_n \backsim \lambda \frac{e^n}{n^n}\frac{\sqrt{n}n^n}{e^n} = \lambda\sqrt{n}$$
et $\sum u_n$ diverge.
Pour $u_n = \dfrac{n^n}{e^n n^\alpha n!}$, on a :
$$\frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{1}{e}\left(\frac{n}{n+1}\right)^\alpha\left(\frac{n+1}{n}\right)^n \underset{n\to+\infty}{\to} 1$$
et le théorème de d'Alembert ne permet pas de conclure. En utilisant la formule de Stirling, on a :
$$u_n \backsim \frac{1}{\lambda}\frac{n^n}{e^n n^\alpha}\frac{e^n}{\sqrt{n}n^n} = \frac{1}{\lambda}\frac{1}{n^{\alpha+\frac{1}{2}}}$$
et $\sum u_n$ diverge pour $\alpha \leq \dfrac{1}{2}$, converge pour $\alpha > \dfrac{1}{2}$.

Dans le cas où $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{u_{n+1}}{u_n} = 1$ (avec $u_n > 0$), on peut utiliser le théorème de Raabe-Duhamel qui suit. La démonstration de ce théorème repose sur la comparaison de la série étudiée à une série de Riemann.

Exercice 61 *Soit* $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *une suite à valeurs réelles strictement positives telle que :*
$$\frac{u_{n+1}}{u_n} = 1 - \frac{\alpha}{n} + O\left(\frac{1}{n^2}\right)$$
où α *est un réel (on a donc en particulier* $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{u_{n+1}}{u_n} = 1$*). Montrer que la série* $\sum u_n$ *converge si, et seulement si,* $\alpha > 1$.

Solution. La suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par $v_n = \ln(n^\alpha u_n)$ est de même nature que la série de terme général :
$$\begin{aligned} v_{n+1} - v_n &= \ln\left(\left(\frac{n+1}{n}\right)^\alpha\right) + \ln\left(\frac{u_{n+1}}{u_n}\right) \\ &= \alpha\ln\left(1 + \frac{1}{n}\right) + \ln\left(1 - \frac{\alpha}{n} + O\left(\frac{1}{n^2}\right)\right) \\ &= \alpha\left(\frac{1}{n} + O\left(\frac{1}{n^2}\right)\right) + \left(-\frac{\alpha}{n} + O\left(\frac{1}{n^2}\right)\right) \\ &= O\left(\frac{1}{n^2}\right) \end{aligned}$$
donc convergente. En notant $\ell = \lim\limits_{n\to+\infty} v_n$, on a $\lim\limits_{n\to+\infty} n^a u_n = \lambda = e^\ell > 0$, ce qui signifie que $u_n \backsim \dfrac{\lambda}{n^a}$. Il en résulte que $\sum u_n$ converge si, et seulement si, $a > 1$.

Exercice 62 *Étudier la série de terme général* $u_n = \sqrt{n!} \prod_{k=1}^{n} \sin\left(\frac{1}{\sqrt{k}}\right)$

1.12 La transformation d'Abel

Cette transformation que l'on peut considérer comme une intégration par parties discrète sera surtout utile lors de l'étude des séries trigonométriques.

Exercice 63 *Soient* $(\alpha_n)_{n\in\mathbb{N}}$, $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *deux suites numériques et* $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *la suite définie par :*

$$\forall n \in \mathbb{N},\ A_n = \sum_{k=0}^{n} \alpha_k.$$

Montrer que pour tout entier $n \geq 1$, *on a :*

$$\sum_{k=0}^{n} \alpha_k u_k = A_n u_n - \sum_{k=0}^{n-1} A_k \left(u_{k+1} - u_k\right).$$

Solution. On a $\alpha_0 = A_0$ et pour tout entier $k \geq 1$, $\alpha_k = A_k - A_{k-1}$, de sorte que pour $n \geq 1$, on a :

$$\begin{aligned}\sum_{k=0}^{n} \alpha_k u_k &= \alpha_0 u_0 + \sum_{k=1}^{n} \left(A_k - A_{k-1}\right) u_k = \alpha_0 u_0 + \sum_{k=1}^{n} A_k u_k - \sum_{k=1}^{n} A_{k-1} u_k \\ &= \sum_{k=0}^{n} A_k u_k - \sum_{k=0}^{n-1} A_k u_{k+1} = A_n u_n + \sum_{k=0}^{n-1} A_k \left(u_k - u_{k+1}\right) \\ &= A_n u_n - \sum_{k=0}^{n-1} A_k \left(u_{k+1} - u_k\right).\end{aligned}$$

En utilisant cette transformation, on en déduit le résultat suivant.

Exercice 64 *Soient* $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *une suite réelle qui tend vers* 0 *en décroissant et* $(\alpha_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *une suite de nombres complexes telle que la suite* $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *définie par :*

$$\forall n \in \mathbb{N},\ A_n = \sum_{k=0}^{n} \alpha_k.$$

soit bornée. Dans ces conditions la série de terme général $u_n \alpha_n$ *est convergente.*

Solution. Il s'agit de montrer que la suite $(S_n)_{n\in\mathbb{N}}$ des sommes partielles de la série $\sum u_n \alpha_n$ est convergente. En utilisant la transformation d'Abel cela revient à montrer que la série $\sum A_n \left(u_{n+1} - u_n\right)$ est convergente. Pour ce faire nous allons montrer qu'elle est absolument convergente.
En désignant par $M > 0$ un majorant de la suite $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$, on a :

$$\forall k \in \mathbb{N},\ \left|A_k \left(u_{k+1} - u_k\right)\right| \leq M \left(u_k - u_{k+1}\right)$$

(la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est décroissante) avec :

$$\sum_{k=0}^{n} \left(u_k - u_{k+1}\right) = u_0 - u_{n+1} \underset{n\to+\infty}{\to} u_0,$$

c'est-à-dire que la série $\sum M \left(u_{k+1} - u_k\right)$ est convergente et en conséquence, la série $\sum A_n \left(u_{n+1} - u_n\right)$ est absolument convergente. D'où la convergence de la série $\sum u_n \alpha_n$.

Comme dans le cas des séries alternées, le théorème d'Abel nous fournit une majoration du reste. En effet, en reprenant la démonstration, on a pour $m > n \geq 1$:

$$\begin{aligned}\sum_{k=n}^{m} \alpha_k u_k &= \sum_{k=n}^{m} (A_k - A_{k-1}) u_k = \sum_{k=n}^{m} A_k u_k - \sum_{k=n}^{m} A_{k-1} u_k \\ &= \sum_{k=n}^{m} A_k u_k - \sum_{k=n-1}^{m-1} A_k u_{k+1} = A_m u_m - A_{n-1} u_n + \sum_{k=n}^{m-1} A_k (u_k - u_{k+1})\end{aligned}$$

et :

$$\begin{aligned}\left|\sum_{k=n}^{m} \alpha_k u_k\right| &\leq |A_m u_m - A_{n-1} u_n| + \sum_{k=n}^{m-1} |A_k| (u_k - u_{k+1}) \\ &\leq M \left(u_m + u_n + \sum_{k=n}^{m-1} (u_k - u_{k+1}) \right) = 2M u_n\end{aligned}$$

et faisant tendre m vers l'infini, on aboutit à :

$$|R_{n-1}| = \left|\sum_{k=n}^{+\infty} \alpha_k u_k\right| \leq 2M u_n$$

Une utilisation classique du théorème d'Abel est l'étude des séries trigonométriques.

Exercice 65 *Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de réels positifs.*

1. *Si la série $\sum u_n$ est convergente, alors la série $\sum u_n e^{int}$ est absolument convergente pour tout réel t.*
2. *Si la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ tend vers 0 en décroissant, alors la série $\sum u_n e^{int}$ est convergente pour tout réel $t \in \mathbb{R} - 2\pi\mathbb{Z}$.*

Solution.

1. Résulte immédiatement de $\left|u_n e^{it}\right| = u_n$ pour tout réel t.
2. Pour tout réel $t \in \mathbb{R} - 2\pi\mathbb{Z}$, on a :

$$\begin{aligned}A_n &= \sum_{k=0}^{n} e^{ikt} = \frac{1 - e^{i(n+1)t}}{1 - e^{it}} = \frac{e^{i\frac{n+1}{2}t}}{e^{i\frac{t}{2}}} \frac{e^{-i\frac{n+1}{2}t} - e^{i\frac{n+1}{2}t}}{e^{-i\frac{t}{2}} - e^{i\frac{t}{2}}} \\ &= e^{in\frac{t}{2}} \frac{\sin\left(\frac{n+1}{2}t\right)}{\sin\left(\frac{t}{2}\right)}\end{aligned}$$

et :

$$|A_n| \leq \frac{1}{\left|\sin\left(\frac{t}{2}\right)\right|}.$$

Le résultat découle alors du théorème d'Abel.