Agrégation interne

Séries entières de matrices

Ce problème est l'occasion de revoir quelques points de cours :
- espaces normés, suites, séries, ouverts, fermés, applications linéaires continues, compacité, espaces de Banach ;
- polynôme d'interpolation de Lagrange ;
- matrices nilpotentes, valeurs propres, rayon spectral, normes matricielles, diagonalisation, trigonalisation, décomposition de Dunford, réduction de Jordan ;
- calcul différentiel.

$\mathbb{C}$ désigne le corps des nombres complexes et les espaces vectoriels considérés sont sur le corps $\mathbb{C}$.

– I – Algèbres de Banach

Une algèbre de Banach unitaire E est un espace vectoriel normé $(E, \|\cdot\|)$ complet muni d'une structure d'anneau unitaire et tel que $\|xy\| \leq \|x\| \|y\|$ pour tous x, y dans E (on dit que la norme est sous-multiplicative) et $\|1_E\| = 1$, en désignant par 1_E l'élément neutre pour la multiplication interne de E.

On rappelle qu'une série de terme général x_n est dite normalement convergente dans un espace normé $(E, \|\cdot\|)$ si la série réelle de terme général $\|x_n\|$ est convergente.

1. Soit $(E, \|\cdot\|)$ un espace vectoriel normé.

   (a) Montrer qu'une suite de Cauchy dans $(E, \|\cdot\|)$ qui admet une sous-suite convergente est convergente.

   (b) Soit $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de Cauchy dans E.

   i. Montrer qu'on peut en extraire une sous-suite $\left(x_{\varphi(n)}\right)_{n\in\mathbb{N}}$ telle que :

$$\forall m \geq \varphi(n), \; \left\|x_m - x_{\varphi(n)}\right\| \leq \frac{1}{2^n}$$

   ii. En déduire que la série $\sum \left\|x_{\varphi(n+1)} - x_{\varphi(n)}\right\|$ est convergente.

   (c) Montrer que $(E, \|\cdot\|)$ est complet si, et seulement si, toute série normalement convergente dans $(E, \|\cdot\|)$ est convergente.

Solution

(a) Soit $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de Cauchy dans E admettant une sous-suite $\left(x_{\varphi(n)}\right)_{n\geq 1}$ qui converge vers $x \in E$.

Pour tout réel $\varepsilon > 0$, on peut trouver un entier naturel n_ε tel :

$$\forall m \geq n_\varepsilon, \; \forall n \geq n_\varepsilon, \; \|x_m - x_n\| < \varepsilon$$

La fonction φ étant strictement croissante de $\mathbb{N}$ dans $\mathbb{N}$, on en déduit que :

$$\forall m \geq n_\varepsilon, \; \forall n \geq n_\varepsilon, \; \left\|x_m - x_{\varphi(n)}\right\| < \varepsilon$$

et faisant tendre n vers l'infini, à chaque m fixé, il en résulte que :

$$\forall m \geq n_\varepsilon, \; \|x_m - x\| \leq \varepsilon$$

ce qui signifie que la suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers x dans E.

(b)

i. On construit, par récurrence, une suite strictement croissante $(\varphi(n))_{n\in\mathbb{N}}$ telle que :

$$\forall m \geq \varphi(n)\,,\ \left\|x_m - x_{\varphi(n)}\right\| \leq \frac{1}{2^n}$$

en utilisant le fait que $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est de Cauchy.
Pour $\varepsilon_0 = 1$, il existe un entier naturel p_0 tel que :

$$\forall m \geq p_0,\ \forall n \geq p_0,\ \|x_m - x_n\| \leq 1$$

et en posant $\varphi(0) = p_0$, on a :

$$\forall m \geq \varphi(0)\,,\ \left\|x_m - x_{\varphi(0)}\right\| \leq 1$$

Supposons construit, pour $n \geq 0$, les entiers $\varphi(0) < \varphi(1) < \cdots < \varphi(n)$ tels que :

$$\forall m \geq \varphi(k)\,,\ \left\|x_m - x_{\varphi(k)}\right\| \leq \frac{1}{2^k}\ \ (0 \leq k \leq n)$$

Pour $\varepsilon_{n+1} = \dfrac{1}{2^{n+1}}$, il existe un entier naturel $p_{n+1} > \varphi(n)$ tel que :

$$\forall m \geq p_{n+1},\ \forall n \geq p_{n+1},\ \|x_m - x_n\| < \frac{1}{2^{n+1}}$$

et en posant $\varphi(n+1) = p_{n+1}$, on a :

$$\forall m \geq \varphi(n+1)\,,\ \left\|x_m - x_{\varphi(n+1)}\right\| \leq \frac{1}{2^{n+1}}$$

ii. Par construction de la suite $(\varphi(n))_{n\in\mathbb{N}}$, on a :

$$\forall n \in \mathbb{N},\ \left\|x_{\varphi(n+1)} - x_{\varphi(n)}\right\| \leq \frac{1}{2^n}$$

et en consésquence :

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \left\|x_{\varphi(n+1)} - x_{\varphi(n)}\right\| \leq \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{2^n} < +\infty$$

(c)

i. Supposons que $(E, \|\cdot\|)$ soit un espace de Banach et soit $\sum x_n$ une série normalement convergente dans E.
En notant $S_n = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} x_k$ les sommes partielles de cette série, on a pour $m > n$ dans $\mathbb{N}$:

$$\|S_m - S_n\| \leq \sum_{k=n+1}^{m} \|x_k\| \leq R_n = \sum_{k=n+1}^{+\infty} \|x_k\|$$

avec $\lim\limits_{n\to+\infty} R_n = 0$, ce qui implique que la suite $(S_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est de Cauchy et en conséquence convergente puisque $(E, \|\cdot\|)$ est complet.

ii. Réciproquement supposons que toute série normalement convergente dans $(E, \|\cdot\|)$ est convergente.
Si $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite de Cauchy dans E, on peut alors en extraire une sous-suite $\left(x_{\varphi(n)}\right)_{n\in\mathbb{N}}$ telle $\sum_{n=0}^{+\infty} \left\| x_{\varphi(n+1)} - x_{\varphi(n)} \right\| < +\infty$, ce qui signifie que la série $\sum \left(x_{\varphi(n+1)} - x_{\varphi(n)}\right)$ est normalement convergente, donc convergente.
Comme cette série est de même nature que la suite $\left(x_{\varphi(n)}\right)_{n\in\mathbb{N}}$, on en déduit que la suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est de Cauchy et admettant une sous-suite convergente, elle est donc convergente d'après **I.1a**.

2. Soit $(E, \|\cdot\|)$ une algèbre de Banach.
Montrer que l'application $(x, y) \mapsto xy$ est continue de $E \times E$ dans E (on munit l'espace produit $E \times E$ de la norme $(x, y) \mapsto \max(\|x\|, \|y\|)$).
En particulier, pour tout y fixé dans E, l'application $x \mapsto xy$ est continue de E dans E.

Solution Si $((x_n, y_n))_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite de points de $E \times E$ qui converge vers $(x, y) \in E \times E$, les suites $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ convergent alors respectivement vers x et y dans E et avec :

$$\begin{aligned} \|x_n y_n - xy\| &= \|x_n (y_n - y) + (x_n - x) y\| \\ &\leq \|x_n\| \|y_n - y\| + \|x_n - x\| \|y\| \end{aligned}$$

tenant compte du fait que la suite $(\|x_n\|)_{n\in\mathbb{N}}$ est bornée (elle converge vers $\|x\|$), on déduit que $\lim_{n\to+\infty} x_n y_n = xy$.
L'application $(x, y) \mapsto xy$ est donc continue de $E \times E$ dans E.

3. Soit $(H, \|\cdot\|)$ une algèbre de Banach unitaire et $H^\times$ l'ensemble de tous les éléments inversibles (pour le produit) de H. On vérifie facilement que $H^\times$ est un groupe multiplicatif.

(a) Montrer que pour tout $u \in H$ tel que $\|u\| < 1$, $1_H - u$ est inversible d'inverse $\sum_{k=0}^{+\infty} u^k$.

(b) Montrer que $H^\times$ est ouvert dans H.

(c) Montrer que l'application $u \mapsto u^{-1}$ est continue sur $H^\times$.

Pour $H = \mathcal{L}(E) = \{u : E \to E \text{ continue}\}$, où E est un espace de Banach (de dimension finie ou infinie), $H^\times = GL(E)$ est un ouvert de $\mathcal{L}(E)$ et $u \mapsto u^{-1}$ est continue sur $GL(E)$. Pour E de dimension finie, $GL(E)$ est un ouvert dense de $\mathcal{L}(E)$.

Solution

(a) Comme $\|u\| < 1$, la série $\sum \|u\|^k$ est convergente et avec $\left\|u^k\right\| \leq \|u\|^k$ pour tout $k \in \mathbb{N}$, on déduit que la série $\sum u^k$ est normalement convergente, donc convergente dans l'espace de Banach H.
Avec :

$$\left(\sum_{j=0}^{k} u^j\right)(1_H - u) = 1_H - u^{k+1}$$

et $\lim_{k\to+\infty} u^k = 0$ (terme général d'une série convergente), on déduit que :

$$\left(\sum_{k=0}^{+\infty} u^k\right)(1_H - u) = 1_H - \lim_{k\to+\infty} u^{k+1} = 1_H$$

(continuité du produit dans l'algèbre normée H), ce qui signifie que $1_H - u$ est inversible d'inverse $\sum_{k=0}^{+\infty} u^k$.

(b) Soit $u \in H^{\times}$. Pour tout h dans la boule ouverte $B\left(0, \dfrac{1}{\|u^{-1}\|}\right)$, on a :

$$\left\|u^{-1}h\right\| \leq \left\|u^{-1}\right\| \|h\| < 1$$

donc $1_H + u^{-1}h \in H^{\times}$ et $u + h = u\left(1_H + u^{-1}h\right) \in H^{\times}$. On a donc $B\left(u, \dfrac{1}{\|u^{-1}\|}\right) \subset H^{\times}$ et $H^{\times}$ est ouvert dans H.

Pour $H = \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$, on a $H^{\times} = GL_n(\mathbb{C})$ et on retrouve le fait que c'est un ouvert de $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$, ce qui peut se montrer en disant que $GL_n(\mathbb{C}) = \det^{-1}(\mathbb{C}^*)$, la fonction det étant continue (elle est polynomiale).

(c) Soient $u \in H^{\times}$ et $\delta = \dfrac{1}{\|u^{-1}\|}$. Pour tout $h \in B(0, \delta)$, on a $u + h \in H^{\times}$ et :

$$\begin{aligned}\left\|(u+h)^{-1} - u^{-1}\right\| &= \left\|\left(\left(1_H + u^{-1}h\right)^{-1} - 1_H\right) u^{-1}\right\| \\ &= \left\|\left(\sum_{k=1}^{+\infty} \left(u^{-1}h\right)^k\right) u^{-1}\right\| = \left\|u^{-1}h\left(\sum_{k=0}^{+\infty} \left(u^{-1}h\right)^k\right) u^{-1}\right\| \\ &\leq \left\|u^{-1}\right\|^2 \|h\| \sum_{k=0}^{+\infty} \left\|u^{-1}h\right\|^k = \frac{\|h\|}{\delta^2} \frac{1}{1 - \|u^{-1}h\|}\end{aligned}$$

Tenant compte de $\lim\limits_{h \to 0} \left(1 - \|u^{-1}h\|\right) = 1$, on en déduit que $\lim\limits_{h \to 0} (u+h)^{-1} = u^{-1}$. Ce qui prouve que l'application $u \mapsto u^{-1}$ est continue sur $H^{\times}$.

Pour $H = \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$, on a $A^{-1} = \dfrac{1}{\det(A)}\, {}^tC(A)$ où $C(A)$ désigne la comatrice de A. Les coefficients de $C(A)$ étant des fonctions polynomiales des coefficients de A, l'application $A \mapsto C(A)$ est continue ainsi que $A \mapsto A^{-1}$.

– II – Rayon spectral des matrices complexes

$\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ est l'algèbre des matrices carrées d'ordre n à coefficients dans $\mathbb{C}$, $GL_n(\mathbb{C})$ est le groupe multiplicatif des matrices inversibles dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$.

Une matrice $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ est identifiée à l'endomorphisme de $\mathbb{C}^n$ qu'elle définit dans la base canonique.

Une matrice diagonale de termes diagonaux $\lambda_1, \cdots, \lambda_n$ est notée $\operatorname{diag}(\lambda_1, \cdots, \lambda_n)$.

On se donne une norme vectorielle $x \mapsto \|x\|$ sur $\mathbb{C}^n$ et on lui associe la norme matricielle induite sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ qui est définie par :

$$\forall A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C}),\ \|A\| = \sup_{x \in \mathbb{C}^n \setminus \{0\}} \frac{\|Ax\|}{\|x\|} = \sup_{\substack{x \in \mathbb{C}^n \\ \|x\| = 1}} \|Ax\|$$

Cette norme est une norme d'algèbre (vérification immédiate) et $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ ainsi normé est une algèbre de Banach (puisque $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ est de dimension finie).

Pour toute matrice $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$, on désigne par $\operatorname{sp}(A)$ l'ensemble de toutes les valeurs propres complexes de A et par :

$$\rho(A) = \max_{\lambda \in \operatorname{sp}(A)} |\lambda|$$

le rayon spectral de A.

On rappelle le résultat suivant.

Théorème 1 (Dunford) *Pour toute matrice $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$, il existe un unique couple de matrices (D, V) tel que D soit diagonalisable, V soit nilpotente, D et V commutent et $A = D + V$.*
De plus D et V sont des polynômes en A et les valeurs propres de D sont celles de A avec les mêmes multiplicités.

On note :

$$\mathcal{U}_n(\mathbb{C}) = \{A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C}) \mid U^* U = I_n\}$$

le sous groupe de $GL_n(\mathbb{C})$ formé des matrices unitaires, où $U^* = {}^t\overline{U}$ est la matrice adjointe de U.

On rappelle qu'une matrice unitaire est la matrice de passage de la base canonique de $\mathbb{C}^n$ à une base orthonormée, où $\mathbb{C}^n$ est muni de sa structure hermitienne canonique.

1. Soient $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ et k un entier naturel.
   (a) Montrer $\rho(A) \leq \|A\|$, l'inégalité pouvant être stricte.
   (b) Montrer que $\operatorname{sp}(A^k) = \{\lambda^k \mid \lambda \in \operatorname{sp}(A)\}$.
   (c) Montrer $\rho(A^k) = \rho(A)^k$.

Solution

(a) Soit λ une valeur propre de A telle que $\rho(A) = |\lambda|$ et x un vecteur propre associé dans $\mathbb{C}^n$ de norme 1.
On a :

$$\|Ax\| = \|\lambda x\| = |\lambda| \leq \|A\|$$

et en conséquence, $\rho(A) \leq \|A\|$.
De ce résultat, on déduit que l'application ρ est continue en 0.
En prenant $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, ou plus généralement une matrice nilpotente non nulle, on a $\rho(A) = 0$ et $\|A\| > 0$.

(b) Pour $k = 0$, le résultat est évident. On suppose donc que $k \geq 1$.
Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$. Si $\lambda \in \operatorname{sp}(A)$ et $x \in \mathbb{C}^n \setminus \{0\}$ un vecteur propre associé, on a alors pour tout entier naturel non nul k, $A^k x = \lambda^k x$ et $\lambda^k \in \operatorname{sp}(A^k)$. Donc $\{\lambda^k \mid \lambda \in \operatorname{sp}(A)\} \subset \operatorname{sp}(A^k)$.
Réciproquement si $\mu \in \operatorname{sp}(A^k)$ avec $k \geq 1$, l'endomorphisme $A^k - \mu I_n$ est non inversible.
En notant $Q(X) = X^k - \mu = \prod_{j=0}^{k-1} (X - \lambda_j)$, l'endomorphisme $\prod_{j=0}^{k-1} (A - \lambda_j I_n) = A^k - \mu I_n$ est non injectif et il existe nécessairement un indice j compris entre 0 et $k-1$ tel que $A - \lambda_j I_n$ soit non inversible, ce qui revient à dire que λ_j est valeur propre de A et avec $Q(\lambda_j) = 0$, on déduit que $\mu = \lambda_j^k$.
On a donc en définitive, $\operatorname{sp}(A^k) = \{\lambda^k \mid \lambda \in \operatorname{sp}(A)\}$.
Plus généralement, on peut montrer que pour tout polynôme $P \in \mathbb{C}[X]$, on a $\operatorname{sp}(P(A)) = \{P(\lambda) \mid \lambda \in \operatorname{sp}(A)\}$, la démonstration étant sensiblement la même.
Ce résultat n'est plus vrai dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. Par exemple pour $A = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$, la matrice $A^2 = -I_2$ a pour seule valeur propre -1 et $\operatorname{sp}(A) = \emptyset$.

(c) Il en résulte que :

$$\rho(A^k) = \max_{\lambda \in \operatorname{sp}(A)} |\lambda^k| = \max_{\lambda \in \operatorname{sp}(A)} |\lambda|^k = \rho(A)^k$$

puisque la fonction $t \mapsto t^k$ est croissante sur $\mathbb{R}^+$.

2. Soient $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$.

(a) Montrer que :

$$\forall k \geq 1,\ \rho(A) \leq \left\|A^k\right\|^{\frac{1}{k}}$$

(b) On suppose ici que A est diagonalisable. Montrer qu'il existe une constante réelle $\alpha > 0$ telle que :

$$\forall k \geq 1,\ \left\|A^k\right\|^{\frac{1}{k}} \leq \alpha^{\frac{1}{k}} \rho(A)$$

et en déduire que :

$$\rho(A) = \lim_{k \to +\infty} \left(\left\|A^k\right\|^{\frac{1}{k}}\right)$$

(c) En utilisant la décomposition de Dunford $A = D + V$, montrer qu'il existe une constante réelle $\beta > 0$ telle que :

$$\forall k \geq n,\ \left\|A^k\right\| \leq \beta k^n \left\|D^{k-n}\right\|$$

et en déduire que :

$$\rho(A) = \lim_{k \to +\infty} \left(\left\|A^k\right\|^{\frac{1}{k}}\right) = \inf_{k \in \mathbb{N}^*} \left(\left\|A^k\right\|^{\frac{1}{k}}\right) \tag{1}$$

(formule de I. Guelfand).

Solution

(a) Pour tout entier k, on a :

$$\rho(A)^k = \rho\left(A^k\right) \leq \left\|A^k\right\|$$

ce qui équivaut à $\rho(A) \leq \left\|A^k\right\|^{\frac{1}{k}}$.

(b) Si A est diagonalisable, il existe alors une base $\mathcal{B} = (e_i)_{1 \leq i \leq n}$ de $\mathbb{C}^n$ formée de vecteurs propres unitaires de A avec $A(e_i) = \lambda_i e_i$ pour tout i compris entre 1 et n, où les λ_i sont les valeurs propres de A distinctes ou confondues.
On a alors, pour tout vecteur $x \in \mathbb{C}^n$ et tout entier $k \geq 1$:

$$A^k(x) = A^k\left(\sum_{j=1}^n x_j e_j\right) = \sum_{j=1}^n x_j A^k(e_j) = \sum_{j=1}^n x_j \lambda_i^k e_j$$

et :

$$\left\|A^k(x)\right\| \leq \sum_{j=1}^n |x_j| \left|\lambda_i^k\right| \|e_j\| \leq \rho(A)^k \sum_{j=1}^n |x_j| \|e_j\| = \rho(A)^k \sum_{j=1}^n |x_j|$$

L'application $x \mapsto \|x\|_1 = \sum\limits_{j=1}^n |x_j|$ définissant une norme sur $\mathbb{C}^n$ qui est équivalente à $x \mapsto \|x\|$ (en dimension finie toutes les normes sont équivalentes), il existe une constante $\alpha > 0$ telle $\|x\|_1 \leq \alpha \|x\|$ pour tout $x \in \mathbb{C}^n$ et on a :

$$\left\|A^k(x)\right\| \leq \alpha \rho(A)^k \|x\|$$

pour tout $x \in \mathbb{C}^n$ et tout $k \geq 1$, ce qui entraîne $\left\|A^k\right\| \leq \alpha \rho(A)^k$ et $\left\|A^k\right\|^{\frac{1}{k}} \leq \alpha^{\frac{1}{k}} \rho(A)$.
On a donc, pour tout entier $k \geq 1$:

$$\rho(A) \leq \left\|A^k\right\|^{\frac{1}{k}} \leq \alpha^{\frac{1}{k}} \rho(A)$$

et avec $\lim\limits_{k \to +\infty} \alpha^{\frac{1}{k}} = 1$ pour $\alpha > 0$, on déduit que $\lim\limits_{k \to +\infty} \left\|A^k\right\|^{\frac{1}{k}} = \rho(u)$.

(c) On a la décomposition de Dunford $A = D + V$ avec D diagonalisable de mêmes valeurs propres que A, qui commute à V nilpotente.

Pour tout entier $j \geq n$, on a $V^j = 0$ (le polynôme minimal de V est X^p avec p compris entre 1 et n) et pour $k \geq n$:

$$A^k = (D+V)^k = \sum_{j=0}^{k} C_k^j D^{k-j} V^j = \sum_{j=0}^{n} C_k^j D^{k-j} V^j = D^{k-n} \sum_{j=0}^{n} C_k^j D^{n-j} V^j.$$

ce qui entraîne, pour une norme d'algèbre sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$:

$$\left\|A^k\right\| \leq \left\|D^{k-n}\right\| \sum_{j=0}^{n} C_k^j \left\|D\right\|^{n-j} \left\|V\right\|^j$$

Pour tout j compris entre 0 et n, on a :

$$C_k^j = \frac{k!}{j!\,(k-j)!} = \frac{k\,(k-1)\cdots(k-(j-1))}{j!} \leq \frac{k^j}{j!} \leq k^n$$

ce qui donne :

$$\left\|A^k\right\| \leq \left\|D^{k-n}\right\| k^n \sum_{j=0}^{n} \left\|D\right\|^{n-j} \left\|V\right\|^j = \beta k^n \left\|D^{k-n}\right\|$$

avec $\beta = \sum\limits_{j=0}^{n} \left\|D\right\|^{n-j} \left\|V\right\|^j > 0$ (on suppose que $A \neq 0$, sinon c'est évident).

Il en résulte que :

$$\forall k \geq n,\ \rho(A) \leq \left\|A^k\right\|^{\frac{1}{k}} \leq \beta^{\frac{1}{k}} k^{\frac{n}{k}} \left\|D^{k-n}\right\|^{\frac{1}{k}}$$

avec

$$\lim_{k\to+\infty} \beta^{\frac{1}{k}} k^{\frac{n}{k}} = \lim_{k\to+\infty} \exp\left(\frac{\ln(\beta)}{k} + n\frac{\ln(k)}{k}\right) = 1$$

et :

$$\lim_{k\to+\infty} \left\|D^{k-n}\right\|^{\frac{1}{k}} = \lim_{k\to+\infty} \left(\left\|D^{k-n}\right\|^{\frac{1}{k-n}}\right)^{\frac{k-n}{k}} = \rho(D)$$

puisque $\lim\limits_{k\to+\infty} \left(\left\|D^{k-n}\right\|^{\frac{1}{k-n}}\right) = \rho(D)$ (D est diagonalisable) et :

$$\lim_{k\to+\infty} t^{\frac{k-n}{k}} = \lim_{k\to+\infty} \exp\left(\left(1-\frac{n}{k}\right)\ln(t)\right) = t$$

pour tout $t > 0$ (pour $t = 0$, c'est évident). Enfin comme D et A ont les mêmes valeurs propres, on a $\rho(D) = \rho(A)$ et $\lim\limits_{k\to+\infty} \left(\left\|A^k\right\|^{\frac{1}{k}}\right) = \rho(A)$.

La question **II.2a** nous dit que $\rho(A)$ est un minorant de la suite $\left(\left\|A^k\right\|^{\frac{1}{k}}\right)_{k\in\mathbb{N}^*}$ et comme c'est la limite de cette suite, c'est aussi la borne inférieure.

3. Montrer que, pour toute matrice $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$, on a $\rho(A) = \lim\limits_{k\to+\infty} \left(N\left(A^k\right)^{\frac{1}{k}}\right)$ où $A \mapsto N(A)$ est une norme quelconque sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ (non nécessairement induite par une norme vectorielle).

Solution Comme $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ est de dimension finie, toutes les normes y sont équivalentes.

Si N est une norme quelconque sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ et $A \mapsto \|A\|$ une norme induite par une norme vectorielle, il existe alors deux constantes $\alpha > 0$ et $\beta > 0$ telles que $\alpha \|A\| \leq N(A) \leq \beta \|A\|$ pour toute matrice $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ et avec :

$$\alpha^{\frac{1}{k}} \left\|A^k\right\|^{\frac{1}{k}} \leq N\left(A^k\right)^{\frac{1}{k}} \leq \beta^{\frac{1}{k}} \left\|A^k\right\|^{\frac{1}{k}}$$

on déduit que $\rho(A) = \lim\limits_{k\to+\infty} \left(N\left(A^k\right)^{\frac{1}{k}}\right)$ puisque $\lim\limits_{k\to+\infty} \left(\left\|A^k\right\|^{\frac{1}{k}}\right) = \rho(A)$ et $\lim\limits_{k\to+\infty} \alpha^{\frac{1}{k}} = \lim\limits_{k\to+\infty} \beta^{\frac{1}{k}} = 1$.

4. Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$.
Montrer que la série $\sum A^k$ est convergente dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ si, et seulement si, $\rho(A) < 1$.
En cas de convergence de $\sum A^k$, montrer que $I_n - A$ est inversible d'inverse $\sum\limits_{k=0}^{+\infty} A^k$.

Solution Si $\rho(A) < 1$, on a alors $\lim\limits_{k\to+\infty} \left(\left\|A^k\right\|^{\frac{1}{k}}\right) = \rho(A) < 1$ et le critère de Cauchy pour les séries réelles nous dit que la série $\sum \left\|A^k\right\|$ est convergente, ce qui signifie que la série $\sum A^k$ est normalement convergente dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$, donc convergente puisque ce espace est complet.
Réciproquement si la série $\sum A^k$ converge, son terme général tend vers 0 et avec $\rho(A)^k \leq \left\|A^k\right\|$ pour une norme sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ qui est sous-multiplicative, on déduit que $\lim\limits_{k\to+\infty} \rho(A)^k = 0$ et nécessairement $\rho(A) < 1$.
On peut aussi dire que si $\rho(A) > 1$, on a alors $\lim\limits_{k\to+\infty} \left(\left\|A^k\right\|^{\frac{1}{k}}\right) = \rho(A) > 1$, donc $\left\|A^k\right\|^{\frac{1}{k}} \geq \rho(A) - \varepsilon$ pour k assez grand où $\varepsilon > 0$ est choisi assez petit pour que $\rho(A) - \varepsilon > 1$, ce qui entraîne $\left\|A^k\right\| \geq (\rho(A) - \varepsilon)^k \underset{k\to+\infty}{\rightarrow} +\infty$ et la série $\sum A^k$ diverge.
Pour $\rho(A) < 1$, on a pour tout $k \geq 1$:

$$(I_n - A) \sum_{j=0}^{k} A^j = I_n - A^{k+1}$$

et avec la continuité de l'application $M \mapsto (I_n - A) M$ sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$, on déduit que :

$$I_n = \lim_{k\to+\infty} \left(I_n - A^{k+1}\right) = (I_n - A) \lim_{k\to+\infty} \left(\sum_{j=0}^{k} A^j\right) = (I_n - A) \sum_{k=0}^{+\infty} A^k$$

(on a $\lim\limits_{k\to+\infty} A^k = 0$ puisque c'est le terme général d'une série convergente) ce qui signifie que $I_n - A$ est inversible d'inverse $\sum\limits_{k=0}^{+\infty} A^k$.

5. Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$. Montrer que $\lim\limits_{k\to+\infty} A^k = 0$ si, et seulement si, $\rho(A) < 1$.

Solution Supposons que $\lim\limits_{k\to+\infty} A^k = 0$.
S'il existe une valeur propre λ de A telle que $|\lambda| \geq 1$, en désignant par x_0 un vecteur propre non nul associé à λ, on a :

$$\forall k \in \mathbb{N},\ |\lambda|^k \|x_0\| = \left\|\lambda^k x_0\right\| = \left\|A^k x_0\right\| \leq \left\|A^k\right\| \|x_0\|$$

et en conséquence $\lim\limits_{k\to+\infty} \left(|\lambda|^k \|x_0\|\right) = 0$, donc $\lim\limits_{k\to+\infty} |\lambda|^k = 0$ puisque $\|x_0\| > 0$, ce qui est incompatible avec $|\lambda| \geq 1$. On a donc $|\lambda| < 1$ pour toute valeur propre λ de A et $\rho(A) < 1$.
Réciproquement, si $\rho(A) < 1$, la série $\sum A^k$ est alors convergente et $\lim\limits_{k\to+\infty} A^k = 0$.

6. Montrer que $\mathcal{U}_n(\mathbb{C})$ est compact dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$.

Solution On munit l'espace vectoriel $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ de la norme N définie par :

$$\forall A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C}),\ N(A) = \max_{1 \leq i,j \leq n} |a_{ij}|$$

(c'est tout simplement la norme $\|\cdot\|_\infty$ sur $\mathbb{C}^{n^2}$ et en dimension finie toutes les normes sont équivalentes).
$\mathcal{U}_n(\mathbb{C})$ est fermé dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ comme image réciproque du fermé $\{I_n\}$ par l'application continue $A \mapsto A^*A$.
Pour $A \in \mathcal{U}_n(\mathbb{C})$ et i compris entre 1 et n, le coefficient d'indice (i,i) de $A^*A = I_n$ est :

$$1 = (A^*A)_{i,i} = \sum_{j=1}^{n} (A^*)_{i,j} (A)_{j,i} = \sum_{j=1}^{n} |a_{ji}|^2$$

On en déduit alors que, pour tous i, j compris entre 1 et n, on a :

$$|a_{ji}|^2 \leq \sum_{j=1}^{n} |a_{ji}|^2 = 1$$

soit $|a_{ji}| \leq 1$ et $N(A) \leq 1$. L'ensemble $\mathcal{U}_n(\mathbb{C})$ est donc borné dans $(\mathcal{M}_n(\mathbb{K}), N)$.
En conclusion $\mathcal{U}_n(\mathbb{C})$ est compact dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ en tant que fermé borné.
Si on sait que pour toute matrice $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$, on a $\|A\|_2 = \sqrt{\rho(A^*A)}$, où $\|\cdot\|_2$ est la norme matricielle induite par la norme hermitienne canonique de $\mathbb{C}^n$, on a $\|A\|_2 = 1$ pour toute matrice $A \in \mathcal{U}_n(\mathbb{C})$, ce qui signifie que $\mathcal{U}_n(\mathbb{C})$ est contenu dans la boule unité, donc borné.

7. Montrer que, pour toute matrice $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$, il existe une matrice unitaire $U \in \mathcal{U}_n(\mathbb{C})$ telle que U^*AU soit triangulaire supérieure, ce qui revient à dire que A se trigonalise dans une base orthonormée (théorème de Schur).

Solution Comme pour tous les problèmes de réduction de matrice, on procède par récurrence sur $n \geq 1$.
Pour $n = 1$ le résultat est évident.
Supposons le acquis pour $n - 1 \geq 1$ et soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$. Si λ_1 est une valeur propre de A et e_1 un vecteur propre associé unitaire, on complète $\{e_1\}$ en une base orthonormée $\mathcal{B}_1 = (e_1, \cdots, e_n)$ de $\mathbb{C}^n$. La matrice de passage U_1 de la base canonique à cette base est unitaire et la matrice de A dans $\mathcal{B}_1$ s'écrit :

$$A_1 = U_1^* A U_1 = \begin{pmatrix} \lambda_1 & a_1 \\ 0 & B_1 \end{pmatrix},$$

avec $a_1 \in \mathcal{M}_{1,n-1}(\mathbb{C})$ et $B_1 \in \mathcal{M}_{n-1}(\mathbb{C})$.
L'hypothèse de récurrence nous dit qu'il existe une matrice unitaire $U_2 \in \mathcal{U}_{n-1}(\mathbb{C})$ telle que $T_2 = U_2^* B_1 U_2$ soit triangulaire supérieure.
La matrice $U_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & U_2 \end{pmatrix}$ est alors unitaire d'ordre n et :

$$U_3^* U_1^* A U_1 U_3 = \begin{pmatrix} \lambda_1 & a_1 U_2 \\ 0 & U_2^* B_1 U_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda_1 & a_1 U_2 \\ 0 & T_2 \end{pmatrix}$$

est triangulaire supérieure.

8. On se propose de montrer que l'application ρ qui associe à toute matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ son rayon spectral est continue, ce qui revient à montrer que si $(A_k)_{k \in \mathbb{N}}$ est une suite de matrices qui converge vers la matrice A dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$, alors la suite $(\rho(A_k))_{k \in \mathbb{N}}$ converge vers $\rho(A)$. dans $\mathbb{R}$.

(a) Montrer le résultat pour une suite $(T_k)_{k\in\mathbb{N}}$ de matrices triangulaires supérieures qui converge vers une matrice T.

(b) Montrer qu'une suite réelle est convergente si, et seulement si, elle est bornée et n'a qu'une seule valeur d'adhérence.

(c) Soit $(A_k)_{k\in\mathbb{N}}$ une suite de matrices qui converge vers la matrice A dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$.

i. Montrer que la suite $(\rho(A_k))_{k\in\mathbb{N}}$ est bornée dans $\mathbb{R}$.

ii. Montrer que la suite $(\rho(A_k))_{k\in\mathbb{N}}$ admet $\rho(A)$ pour unique valeur d'adhérence et conclure.

9.

(a) La matrice T limite d'une suite $(T_k)_{k\in\mathbb{N}}$ de matrices triangulaires supérieures est également triangulaire supérieure.
Ses valeurs propres sont les termes diagonaux $t_{ii} = \lim\limits_{k\to+\infty} t_{ii}^{(k)}$, en notant $t_{ii}^{(k)}$ les termes diagonaux de T_k pour tout $k \in \mathbb{N}$ et tout i compris entre 1 et n.
Avec la continuité de l'application $x \in \mathbb{C}^n \mapsto \|x\|_\infty = \max\limits_{1\le i\le n} |x_i|$, on déduit que :

$$\rho(T) = \max_{1\le i\le n} |t_{ii}| = \lim_{k\to+\infty} \max_{1\le i\le n} \left| t_{ii}^{(k)} \right| = \lim_{k\to+\infty} \rho(T_k)$$

(b) Une suite convergente est bornée et toute suite extraite converge vers la limite de cette suite, ce qui signifie qu'elle n'a qu'une seule valeur d'adhérence.
Réciproquement, soit $(u_k)_{k\in\mathbb{N}}$ une suite réelle bornée n'admettant qu'une seule valeur d'adhérence ℓ. Si cette suite ne converge pas vers ℓ, on peut alors trouver un réel $\varepsilon > 0$ tel que pour tout entier k, il existe $p > k$ avec $|u_p - \ell| \ge \varepsilon$. Par récurrence on peut alors construire une suite strictement croissante d'entiers $(\varphi(k))_{k\in\mathbb{N}}$ telle que $\left|u_{\varphi(k)} - \ell\right| \ge \varepsilon$ pour tout k. De la suite bornée $\left(u_{\varphi(k)}\right)_{n\in\mathbb{N}}$ on peut extraire une sous suite $\left(u_{\psi(k)}\right)_{k\in\mathbb{N}}$ qui converge vers ℓ' et par passage à la limite dans l'inégalité $\left|u_{\psi(k)} - \ell\right| \ge \varepsilon$ on déduit que $|\ell' - \ell| \ge \varepsilon > 0$, c'est-à-dire que ℓ' est une valeur d'adhérence de $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ distincte de ℓ, ce qui contredit l'hypothèse de départ.

(c)

i. Avec les inégalités $\rho(A_k) \le \|A_k\|$ et la convergence de la suite $(A_k)_{k\in\mathbb{N}}$ on déduit que la suite $(\rho(A_k))_{k\in\mathbb{N}}$ est bornée dans $\mathbb{R}$.

ii. Comme $(\rho(A_k))_{k\in\mathbb{N}}$ est bornée dans $\mathbb{R}$, on peut en extraire une sous-suite convergente $\left(\rho\left(A_{\varphi(k)}\right)\right)_{k\in\mathbb{N}}$. En utilisant le théorème de Schur, on peut trouver, pour tout entier naturel k, une matrice unitaire U_k telle que la matrice $T_k = U_k^* A_k U_k$ soit triangulaire supérieure. Dans le compact $\mathcal{U}_n(\mathbb{C})$, on peut extraire de $\left(U_{\varphi(k)}\right)_{k\in\mathbb{N}}$ une sous-suite $\left(U_{\sigma(k)}\right)_{k\in\mathbb{N}}$ qui converge vers une matrice unitaire U. La suite $\left(T_{\sigma(k)}\right)_{k\in\mathbb{N}}$ converge alors vers la matrice $T = U^*AU$ qui est triangulaire supérieure. On a alors :

$$\rho(A) = \rho(T) = \lim_{k\to+\infty} \rho\left(T_{\sigma(k)}\right) = \lim_{k\to+\infty} \rho\left(A_{\sigma(k)}\right) = \lim_{k\to+\infty} \rho\left(A_{\varphi(k)}\right).$$

La suite bornée $(\rho(A_k))_{k\in\mathbb{N}}$ admet donc $\rho(A)$ pour unique valeur d'adhérence. En conséquence, cette suite converge vers $\rho(A)$.

10. Montrer que, pour tout réel $R > 0$, l'ensemble $\{A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C}) \mid \rho(A) < R\}$ est un ouvert de $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$.

Solution L'ensemble $\{A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C}) \mid \rho(A) < R\}$ est ouvert dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ comme image réciproque de l'ouvert $]-\infty, R[$ par l'application continue ρ.

11.

(a) Montrer que, pour toute matrice $P \in GL_n(\mathbb{C})$, l'application $x \mapsto \|x\|_P = \|P^{-1}x\|$ définit une norme sur $\mathbb{C}^n$.

(b) Montrer que la norme induite sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ par $x \mapsto \|x\|_P$ est $A \mapsto \|A\|_P = \|P^{-1}AP\|$.

(c) Pour tout réel $\delta > 0$, on note :

$$D_\delta = \operatorname{diag}\left(1, \delta, \delta^2, \cdots, \delta^{n-1}\right)$$

Montrer que pour toute matrice triangulaire supérieure $T = ((t_{ij}))_{1\leq i,j\leq n} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$, on a :

$$\lim_{\delta\to 0} D_\delta^{-1} T D_\delta = \operatorname{diag}(t_{11}, t_{22}, \cdots, t_{nn})$$

(d) Montrer que pour toute matrice $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$, il existe une suite de matrices $(P_k)_{k\in\mathbb{N}^*}$ dans $GL_n(\mathbb{C})$ telle que $\lim\limits_{k\to+\infty} P_k^{-1}AP_k = \operatorname{diag}(\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_n)$.

(e) Montrer que pour toute matrice $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ et tout réel $\varepsilon > 0$, il existe une norme d'algèbre N sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ telle que $N(A) < \rho(A) + \varepsilon$.

Solution

(a) L'application $x \mapsto P^{-1}x$ est un isomorphisme de $\mathbb{C}^n$, donc $\|\cdot\|_P$ est une norme sur $\mathbb{C}^n$.

(b) Pour $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$, on a :

$$\|A\|_P = \sup_{x\in\mathbb{C}^n\setminus\{0\}} \frac{\|Ax\|_P}{\|x\|_P} = \sup_{x\in\mathbb{C}^n\setminus\{0\}} \frac{\|P^{-1}Ax\|}{\|P^{-1}x\|}$$

et comme $x \mapsto P^{-1}x$ est bijective de $\mathbb{C}^n \setminus \{0\}$ sur lui même, on en déduit que :

$$\|A\|_P = \sup_{x'\in\mathbb{C}^n\setminus\{0\}} \frac{\|P^{-1}APx'\|}{\|x'\|} = \left\|P^{-1}AP\right\|.$$

(c) En notant $(e_j)_{1\leq j\leq n}$ la base canonique de $\mathbb{C}^n$, pour toute matrice $A = ((a_{ij}))_{1\leq i,j\leq n}$ dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$, $D_\delta^{-1}AD_\delta$ est la matrice de A dans la base $(\delta^{j-1}e_j)_{1\leq j\leq n}$ et avec :

$$A\left(\delta^{j-1}e_j\right) = \delta^{j-1}\sum_{j=1}^{n} a_{ij}e_i = \sum_{j=1}^{n} \delta^{j-i}a_{ij}\left(\delta^{i-1}e_i\right)$$

on déduit que cette matrice est :

$$D_\delta^{-1}AD_\delta = \left(\delta^{j-i}a_{ij}\right)_{1\leq i,j\leq n}.$$

Dans le cas d'une matrice triangulaire supérieure $T = ((t_{ij}))_{1\leq i,j\leq n}$, on a :

$$D_\delta^{-1}TD_\delta = \begin{pmatrix} t_{11} & \delta t_{12} & \cdots & \delta^{n-1}t_{1n} \\ 0 & t_{22} & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \delta t_{n-1,n-1} \\ 0 & \cdots & 0 & t_{nn} \end{pmatrix} \underset{\delta\to 0}{\to} \operatorname{diag}(t_{11}, t_{22}, \cdots, t_{nn})$$

(d) Il existe $P \in GL_n(\mathbb{C})$ telle que $T = P^{-1}AP$ soit triangulaire supérieure et avec les notations précédentes :

$$D_{\frac{1}{k}}^{-1}TD_{\frac{1}{k}} = D_{\frac{1}{k}}^{-1}P^{-1}APD_{\frac{1}{k}} = P_k^{-1}AP_k \underset{k\to+\infty}{\to} \operatorname{diag}(\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_n)$$

où on a noté $P_k = PD_{\frac{1}{k}} \in GL_n(\mathbb{C})$ et $\lambda_1, \cdots, \lambda_n$ sont les termes diagonaux de T, ou encore les valeurs propres de A.

(e) On choisit pour norme sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$, celle qui est subordonnée à :

$$x \mapsto \|x\|_\infty = \max_{1\le i\le n} |x_i|$$

et on a :

$$\forall M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C}),\ \|M\|_\infty = \max_{1\le i\le n} \sum_{j=1}^{n} |m_{ij}|$$

(le vérifier).
Avec les notations précédentes, on désigne, pour tout entier $k \geq 1$, par N_k la norme d'algèbre définie sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ par :

$$\forall M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C}),\ N_k(M) = \|M\|_{P_k} = \left\|P_k^{-1} M P_k\right\|_\infty$$

(cette norme dépend aussi de A) et on a :

$$N_k(A) = \left\|P_k^{-1} A P_k\right\|_\infty \underset{k\to+\infty}{\to} \|\mathrm{diag}(\lambda_1, \cdots, \lambda_n)\|_\infty = \rho(A)$$

Pour $\varepsilon > 0$ donné, on aura $N_k(A) < \rho(A) + \varepsilon$ pour k assez grand.

– III – Séries matricielles

On rappelle qu'une fonction φ définie sur un ouvert non vide $\mathcal{O}$ d'un espace normé E et à valeurs dans un espace normé F est dite différentiable en $a \in \mathcal{O}$ s'il existe une forme linéaire continue L de E dans F (en dimension finie, linéaire suffit) telle que :

$$\varphi(a+h) = \varphi(a) + L(h) + o(\|h\|)$$

pour tout h dans un voisinage de 0 (ce qui signifie que $\lim_{h\to 0} \frac{1}{\|h\|}(\varphi(a+h) - \varphi(a) - L(h)) = 0$). On note alors $d\varphi(a) = L$.

On désigne par $\sum a_k z^k$ une série entière à coefficients complexes de rayon de convergence $R > 0$ et on note $f(z) = \sum_{k=0}^{+\infty} a_k z^k$ sa somme pour $z \in \mathbb{C}$ tel que $|z| < R$.

1.

(a) Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ diagonalisable de valeurs propres $\lambda_1, \cdots, \lambda_n$ distinctes ou confondues dans $\mathbb{C}$.
Montrer que si $\rho(A) < R$, la série $\sum a_k A^k$ est alors convergente et sa somme, $f(A) = \sum_{k=0}^{+\infty} a_k A^k$, est diagonalisable de valeurs propres $f(\lambda_1), \cdots, f(\lambda_n)$.

(b) Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ nilpotente d'indice $r \geq 1$. Montrer que la série $\sum a_k A^k$ est convergente.

(c) Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ telle que $\rho(A) < R$ et $A = D + V$ sa décomposition de Dunford avec D diagonalisable qui commute à V nilpotente d'indice $r \geq 1$.

i. Montrer que, pour tout entier $j \geq 0$, la série $\sum_{k=j}^{+\infty} a_k \frac{k!}{(k-j)!} D^{k-j}$ est convergente.

On notera $f^{(j)}(D)$ sa somme.

ii. Montrer que la série $\sum a_k A^k$ est convergente de somme :

$$f(A) = \sum_{k=0}^{+\infty} a_k A^k = \sum_{j=0}^{r-1} \frac{1}{j!} f^{(j)}(D) V^j$$

iii. Montrer que la matrice $f(A)$ est un polynôme en A (dont les coefficients dépendent de A).

iv. Peut-on trouver un polynôme $R \in \mathbb{C}[X]$ tel que $f(A) = R(A)$ pour toute matrice $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$?

(d) Montrer que si $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ est telle que $\rho(A) > R$, la série $\sum a_k A^k$ est alors divergente.

Solution

(a) Si $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ est diagonalisable, il existe alors une matrice $P \in GL_n(\mathbb{C})$ telle que :

$$P^{-1}AP = D = \operatorname{diag}(\lambda_1, \cdots, \lambda_n)$$

et pour tout entier naturel k, on a :

$$A^k = PD^kP^{-1} = P \operatorname{diag}\left(\lambda_1^k, \cdots, \lambda_n^k\right) P^{-1}$$

Dans le cas où $\rho(A) < R$, on a $|\lambda_j| \leq \rho(A) < R$ pour tout j compris entre 1 et n et chaque série $\sum \alpha_k \lambda_j^k$ est convergente. Il en résulte que la série $\sum a_k D^k$ est convergente de somme :

$$f(D) = \sum_{k=0}^{+\infty} a_k D^k = \operatorname{diag}(f(\lambda_1), \cdots, f(\lambda_n))$$

et avec la continuité du produit matriciel (on l'a vu pour une algèbre de Banach ; ou alors on peut dire que les composantes de l'application $(X, Y) \mapsto XY$ sont polynomiales en les coefficients de X et de Y ; ou encore dire que cette application est bilinéaire et en dimension finie toute application bilinéaire est continue) on en déduit qu'il en est de même de la série $\sum a_k A^k$ avec :

$$\sum_{k=0}^{+\infty} a_k A^k = P\left(\sum_{k=0}^{+\infty} a_k D^k\right)P^{-1} = P \operatorname{diag}(f(\lambda_1), \cdots, f(\lambda_n)) P^{-1}$$

La matrice $f(A) = \sum\limits_{k=0}^{+\infty} a_k A^k$ est donc diagonalisable de valeurs propres $f(\lambda_1), \cdots, f(\lambda_n)$.

(b) En désignant, pour tout entier $k \geq 0$, par $S_k(z)$ la somme partielle d'indice de la série entière $\sum a_k z^k$, on a pour tout entier $k \geq r$:

$$S_k(A) = \sum_{j=0}^{k} a_j A^j = \sum_{j=0}^{r-1} a_j A^j$$

et la série $\sum a_k A^k$ est convergente de somme :

$$f(A) = \sum_{j=0}^{r-1} a_j A^j$$

Pour $r = 1$, on a $A = 0$ et $f(A) = a_0 I_n$ n'est pas nilpotente si $a_0 \neq 0$.

(c)

i. La série $\sum\limits_{k=j}^{+\infty} a_k \dfrac{k!}{(k-j)!} z^{k-j}$ est la série dérivée d'ordre j de $\sum a_k z^k$ et on sait que cette série dérivée est de rayon de convergence égal à R. On note $f^{(j)}(z) = \sum\limits_{k=j}^{+\infty} a_k \dfrac{k!}{(k-j)!} z^{k-j}$ la somme de cette série pour $|z| < R$. Comme D est diagonalisable avec $\rho(D) = \rho(A) < R$, ce qui précède nous dit que la série $\sum\limits_{k=j}^{+\infty} a_k \dfrac{k!}{(k-j)!} D^{k-j}$ est convergente. de somme $f^{(j)}(D)$.

ii. Comme D et V commutent, on peut utiliser la formule du binôme pour écrire, pour tout entier $k \geq r$, on a :

$$A^k = (D+V)^k = \sum_{j=0}^{k} C_k^j V^j D^{k-j} = \sum_{j=0}^{r-1} C_k^j V^j D^{k-j}$$

En convenant que $C_k^j = 0$ pour $j > k$, cette formule est encore valable pour $0 \leq k \leq r-1$.
On a alors, pour $p \geq r$:

$$\begin{aligned} S_p(A) = \sum_{k=0}^{p} a_k A^k &= \sum_{k=0}^{p} a_k \sum_{j=0}^{r-1} C_k^j V^j D^{k-j} \\ &= \sum_{j=0}^{r-1} \left(\sum_{k=0}^{p} a_k C_k^j D^{k-j} \right) V^j \end{aligned}$$

avec :

$$\begin{aligned} \sum_{k=0}^{p} a_k C_k^j D^{k-j} &= \sum_{k=j}^{p} a_k C_k^j D^{k-j} \\ &= \frac{1}{j!} \sum_{k=j}^{p} a_k \frac{k!}{(k-j)!} D^{k-j} \underset{p \to +\infty}{\to} \frac{1}{j!} f^{(j)}(z) \end{aligned}$$

La série $\sum a_k A^k$ est donc convergente de somme :

$$f(A) = \sum_{j=0}^{r-1} \left(\sum_{k=j}^{+\infty} a_k C_k^j D^{k-j} \right) V^j = \sum_{j=0}^{r-1} \frac{1}{j!} f^{(j)}(D) V^j \tag{2}$$

($f(A) = f(D+V)$ est donné par une formule de Taylor).

iii. L'ensemble $\mathbb{C}[A]$ des polynômes en A est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ et comme $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ est de dimension finie, tout sous-espace vectoriel en est un fermé (si F est un sous-espace strict de E de dimension m, en désignant par G un supplémentaire de F et par π la projection sur G parallèlement à F, un élément $x \in E$ est dans F si, et seulement si, $\pi(x) = 0$, donc $F = \pi^{-1}(0)$ est fermé comme image réciproque du fermé $\{0\}$ par une application continue).
En particulier $\mathbb{C}[A]$ est fermé dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$, donc égal à son adhérence et $f(A) = \lim\limits_{k \to +\infty} \sum\limits_{j=0}^{k} a_j A^j$ qui est dans cette adhérence est dans $\mathbb{C}[A]$.
Du fait que $f(A) \in \mathbb{C}[A]$, on déduit que A et $f(A)$ commutent (ce qui se voit aussi directement sur la définition).

iv. Ce qui précède nous dit que pour toute matrice $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ telle que $\rho(A) < R$, il existe un polynôme $R_A \in \mathbb{C}[X]$ dont les coefficients dépendent de A tel que $f(A) = R_A(A)$.

Mais, pour f non polynomiale, il n'est pas possible de trouver un polynôme R tel que $f(A) = R(A)$ pour toute matrice A telle que $\rho(A) < R$.

En effet si un tel polynôme R existe on aurait alors, pour tout scalaire λ tel que $|\lambda| < R$:

$$f(\lambda I_n) = f(\lambda) I_n = R(\lambda I_n) = R(\lambda) I_n$$

et $f(\lambda) = R(\lambda)$ pour tout $\lambda \in \mathbb{C}$ tel que $|\lambda| < R$. En désignant par r le degré de R, on a alors $a_k = 0$ pour tout $k \geq r+1$ (unicité du développement en série entière), ce qui contredit le fait que f est non polynomiale.

(d) Si $\rho(A) > R$, alors la suite $\left(|a_k| \rho(A)^k\right)_{k\in\mathbb{N}}$ n'est pas bornée (par définition du rayon de convergence d'une série entière). Avec $\rho(A)^k = \rho\left(A^k\right)$ et $|a_k| \left\|A^k\right\| \geq |a_k| \rho\left(A^k\right)$, on en déduit que la suite $\left(|a_k| \left\|A^k\right\|\right)_{k\in\mathbb{N}}$ n'est pas bornée et la série de terme général $a_k A^k$ est divergente.

2. En utilisant la formule (1) de Guelfand, montrer que pour toute matrice $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ telle que $\rho(A) < R$, la série $\sum a_k A^k$ est normalement convergente.

Solution On rappelle que $\rho(A) = \lim\limits_{k\to+\infty} \left(\left\|A^k\right\|^{\frac{1}{k}}\right) = \inf\limits_{k\in\mathbb{N}^*} \left(\left\|A^k\right\|^{\frac{1}{k}}\right)$.

Si $\rho(A) < R$, pour tout réel r tel que $\rho(A) < r < R$, il existe un entier $k_0 \geq 1$ tel que :

$$\forall k \geq k_0,\ \rho(A) \leq \left\|A^k\right\|^{\frac{1}{k}} < r$$

donc :

$$\forall k \geq k_0,\ \left\|a_k A^k\right\| < |a_k| r^k$$

et tenant compte de la convergence absolue de $\sum \alpha_k r^k$ pour $0 < r < R$, on déduit que la série $\sum \left\|\alpha_k A^k\right\|$ est convergente, ce qui signifie que la série $\sum \alpha_k A^k$ est normalement convergente dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$, donc convergente puisque ce espace est complet.

3. Soit $D \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ diagonalisable telle que $\rho(D) < R$. Montrer qu'il existe un polynôme $R \in \mathbb{C}_{n-1}[X]$ (qui dépend de D) tel que $f(D) = R(D)$.

Solution Comme D est diagonalisable, il existe des scalaires $\lambda_1, \cdots, \lambda_n$, une matrice $P \in GL_n(\mathbb{C})$ tels que $D = P \operatorname{diag}(\lambda_1, \cdots, \lambda_n) P^{-1}$ et on a vu que :

$$f(D) = P \operatorname{diag}(f(\lambda_1), \cdots, f(\lambda_n)) P^{-1}$$

Le théorème d'interpolation de Lagrange nous dit qu'il existe un polynôme $R \in \mathbb{C}_{n-1}[X]$ tel que $R(\lambda_k) = f(\lambda_k)$ pour tout k compris entre 1 et n (en fait $R \in \mathbb{C}_{p-1}[X]$ si on a p valeurs propres distinctes) et on a :

$$\begin{aligned} f(D) &= P \operatorname{diag}(R(\lambda_1), \cdots, R(\lambda_n)) P^{-1} \\ &= R\left(P \operatorname{diag}(\lambda_1, \cdots, \lambda_n) P^{-1}\right) = R(D) \end{aligned}$$

Si on connaît les valeurs propres de la matrice D, on dispose ainsi d'un moyen relativement simple pour calculer $f(D)$. En notant $\mu_1, \cdots, \mu_p$ les valeurs propres deux à deux distinctes de D, le polynôme d'interpolation de Lagrange est donné par :

$$R(X) = \sum_{k=1}^{p} f(\mu_k) \prod_{\substack{j=1 \\ j\neq k}}^{p} \frac{X - \mu_j}{\mu_k - \mu_j}$$

et :

$$f(D) = \sum_{k=1}^{p} f(\mu_k) \prod_{\substack{j=1 \\ j \neq k}}^{p} \frac{1}{\mu_k - \mu_j} (D - \mu_j I_n)$$

4.

(a) Montrer que l'application $f : A \mapsto f(A) = \sum_{k=0}^{+\infty} a_k A^k$ est continue sur l'ouvert $\mathcal{D}_R = \{A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C}) \mid \rho(A) < R\}$.

(b) Montrer que la fonction f est différentiable en 0 avec $df(0) = a_1 I_d$.

Solution

(a) Soient $A_0 \in \mathcal{D}_R$ et $\varepsilon > 0$ tel que $\rho(A_0) + \varepsilon < R$. On sait qu'il existe une norme d'algèbre $\|\cdot\|$ sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ telle que $\|A_0\| < \rho(A_0) + \varepsilon$. La boule ouverte :

$$B(0, \rho(A_0) + \varepsilon) = \{A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C}) \mid \|A\| < \rho(A_0) + \varepsilon\}$$

est alors contenue dans $\mathcal{D}_R$ (pour $A \in B(0, \rho(A_0) + \varepsilon)$, on a $\rho(A) \leq \|A\| < \rho(A_0) + \varepsilon < R$). Pour toute matrice $A \in B(0, \rho(A_0) + \varepsilon)$ et tout entier naturel k, on a :

$$|a_k| \left\|A^k\right\| \leq |a_k| \|A\|^k \leq |a_k| (\rho(A_0) + \varepsilon)^k$$

avec $\sum |a_k| (\rho(A_0) + \varepsilon)^k < +\infty$ puisque $\rho(A_0) + \varepsilon < R$. La série $\sum a_k A^k$ est donc uniformément convergente sur la boule $B(0, \rho(A_0) + \varepsilon)$ et sa somme est continue sur cette boule, donc en A_0.

(b) Comme $0 \in \mathcal{D}_R$, il existe un réel $\delta \in]0, R[$ tel que $B(0, \delta) \subset \mathcal{D}_R$ et pour toute matrice H dans $B(0, \delta)$, on a :

$$f(H) = \sum_{k=0}^{+\infty} a_k H^k = f(0) + a_1 H + \sum_{k=2}^{+\infty} a_k H^k$$

avec :

$$\left\| \sum_{k=2}^{+\infty} a_k H^k \right\| \leq \sum_{k=2}^{+\infty} |a_k| \left\|H^k\right\| \leq \sum_{k=2}^{+\infty} |a_k| \|H\|^k \leq \|H\|^2 \sum_{k=2}^{+\infty} |a_k| \delta^k$$

(on a $\sum\limits_{k=2}^{+\infty} |a_k| \delta^k < +\infty$ puisque $0 < \delta < R$), donc :

$$f(H) = f(0) + a_1 H + o(\|H\|)$$

et la fonction f est différentiable en 0 avec $df(0)(H) = a_1 H$ pour tout $H \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$.

5. Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$.

(a) Montrer que si $\rho(A) = 0$, la fonction $\varphi : t \mapsto f(tA)$ est alors de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $I = \mathbb{R}$ et préciser sa dérivée.

(b) Montrer que si $0 < \rho(A) < R$, la fonction $\varphi : t \mapsto f(tA)$ est alors de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $I = \left] -\frac{R}{\rho(A)}, \frac{R}{\rho(A)} \right[$ et préciser sa dérivée.

Solution

(a) Si $\rho(A)=0$, l'unique valeur propre de A est 0 et A est nilpotente d'indice $r\in\{1,\cdots,n\}$. Dans ce cas, on a pour tout réel t, $\rho(tA)=0$ et :

$$\varphi(t)=f(tA)=\sum_{j=0}^{n-1}a_jt^jA^j$$

Cette fonction est polynomiale en t, donc de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $I=\mathbb{R}$ de dérivée :

$$\varphi'(t)=\sum_{j=1}^{n-1}ja_jt^{j-1}A^j=A\sum_{j=1}^{n-1}ja_j(tA)^{j-1}=Af'(tA)=f'(tA)A$$

(A et $f'(tA)$ commutent).

(b) Pour $0<\rho(A)<R$, on a $\rho(tA)=|t|\rho(A)$ pour tout réel t, donc $\rho(tA)<R$ pour $|t|<\dfrac{R}{\rho(A)}$ et φ est définie sur $I=\left]-\dfrac{R}{\rho(A)},\dfrac{R}{\rho(A)}\right[$.

En notant $A^k=\left(\left(a_{ij}^{(k)}\right)\right)_{1\leq i,j\leq n}$ pour tout $k\geq 1$, chaque série entière $\sum a_ka_{ij}^{(k)}t^k$ est convergente pour $|t|<\dfrac{R}{\rho(A)}$ et définit une fonction de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\left]-\dfrac{R}{\rho(A)},\dfrac{R}{\rho(A)}\right[$. Il en est donc de même pour φ et on peut dériver terme à terme sur cet intervalle, ce qui nous donne :

$$\varphi'(t)=\left(\left(\sum_{k=1}^{+\infty}ka_ka_{ij}^{(k)}t^{k-1}\right)\right)_{1\leq i,j\leq n}$$

avec :

$$a_{ij}^{(k)}=\sum_{p=1}^{n}a_{ip}a_{pj}^{(k-1)}$$

donc :

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^{+\infty}ka_ka_{ij}^{(k)}t^{k-1}&=\sum_{k=1}^{+\infty}ka_k\left(\sum_{p=1}^{n}a_{ip}a_{pj}^{(k-1)}\right)t^{k-1}\\&=\sum_{p=1}^{n}a_{ip}\left(\sum_{k=1}^{+\infty}ka_ka_{pj}^{(k-1)}t^{k-1}\right)\\&=\sum_{p=1}^{n}a_{ip}\left(f'(tA)\right)_{pj}=\left(Af'(tA)\right)_{ij}\end{aligned}$$

On a donc bien

$$\varphi'(t)=Af'(tA)=f'(tA)A$$

(A et $f'(tA)$ commutent).

– IV – L'exponentielle matricielle. Propriétés

On suppose connues les principales propriétés de l'exponentielle complexe.

La série entière $\sum\dfrac{z^k}{k!}$ ayant un rayon de convergence infini, on peut définir la fonction exponentielle sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ par :

$$\forall A\in\mathcal{M}_n(\mathbb{C}),\ \exp(A)=\sum_{k=0}^{+\infty}\frac{1}{k!}A^k$$

la série étant normalement convergente.

Cette application exp est continue sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ et $\exp(A)$ est polynomiale en A.

On notera aussi e^A pour $\exp(A)$.

On remarque que pour $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, on a $e^A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

1. Soit $D \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ diagonalisable et $\mu_1, \cdots, \mu_p$ ses valeurs propres deux à deux distinctes. Montrer que :

$$e^D = \sum_{k=1}^{p} e^{\mu_k} \prod_{\substack{j=1 \\ j \neq k}}^{p} \frac{1}{\mu_k - \mu_j} (D - \mu_j I_n)$$

Solution C'est vu en partie **III.** pour $f = \exp$.

2. Soient a, b dans $\mathbb{C}$ avec $a \neq 0$, $n \geq 3$ et $A(a,b) = ((a_{ij}))_{1 \leq i,j \leq n} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ définie par :

$$\forall i \in \{1, 2, \cdots, n\}, \begin{cases} a_{ii} = b, \\ a_{ij} = a \text{ si } j \in \{1, 2, \cdots, n\} - \{i\}. \end{cases}$$

   (a) Calculer $\Delta(a,b) = \det(A(a,b))$.

   (b) Calculer le polynôme caractéristique et les valeurs propres avec leur multiplicité de $A(a,b)$.

   (c) Calculer le polynôme minimal de $A(a,b)$.

   (d) Justifier le fait que $A(a,b)$ est diagonalisable et en déduire $e^{A(a,b)}$.

   (e) Calculer directement $e^{A(a,b)}$.

Solution Pour $a = 0$, on a $A(a,b) = bI_n$ et $e^{A(a,b)} = e^b I_n$.

   (a) La matrice $A(a,b)$ est de la forme :

$$A(a,b) = \begin{pmatrix} b & a & a & \cdots & a \\ a & b & \alpha & \cdots & a \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ a & \cdots & a & b & a \\ a & \cdots & a & a & b \end{pmatrix}.$$

   En ajoutant les lignes 2 à n à la première ligne on a :

$$\Delta(a,b) = \det(A(a,b)) = b + (n-1)a \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ a & b & a & \cdots & a \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ a & \cdots & a & b & a \\ a & \cdots & a & a & b \end{vmatrix}.$$

   Puis en retranchant la première colonne aux colonnes 2 à n on obtient :

$$\Delta(a,b) = (b + (n-1)a)(b-a)^{n-1}.$$

   (b) Le polynôme caractéristique de $A(a,b)$ est donné par :

$$\begin{aligned} P_{(a,b)}(X) &= \Delta(a, b - X) \\ &= (-1)^n (X - (b + (n-1)a))(X - (b-a))^{n-1} \end{aligned}$$

   Les valeurs propres de $A(a,b)$ sont donc $\lambda_1 = b + (n-1)a$ et $\lambda_2 = b - a = \lambda_1 - na$. Pour $a \neq 0$, on a $\lambda_1 \neq \lambda_2$, donc λ_1 est valeur propre simple et λ_2 est valeur propre d'ordre $n-1$ de $A(a,b)$.

(c) On a :

$$\begin{aligned} A(a,b) - (b-a) I_n &= aA(1,1) \\ A(a,b) - (b+(n-1)a) I_n &= aA(1,1-n), \end{aligned}$$

avec $A(1,1) A(1,1-n) = 0$, donc :

$$(A(a,b) - (b-a) I_n)(A(a,b) - (b+(n-1)a) I_n) = 0$$

La matrice $A(a,b)$ n'étant pas celle d'une homothétie, on déduit que son polynôme minimal est :

$$\pi_{(a,b)}(X) = (X - (b-a))(X - (b+(n-1)a)).$$

(d) Le polynôme minimal $\pi_{(a,b)}$ étant scindé à racines simples, on en déduit que $A(a,b)$ est diagonalisable.
Pour a, b réels, la matrice $A(a,b)$ est symétrique réelle, donc diagonalisable.
En désignant par R le polynôme d'interpolation de Lagrange :

$$\begin{aligned} R(X) &= e^{\lambda_1} \frac{X-\lambda_2}{\lambda_1-\lambda_2} + e^{\lambda_2} \frac{X-\lambda_1}{\lambda_2-\lambda_1} \\ &= \frac{1}{na} \left(e^{\lambda_1}(X-\lambda_2) - e^{\lambda_2}(X-\lambda_1) \right) \\ &= \frac{1}{na} \left(e^{\lambda_2+na}(X-\lambda_2) - e^{\lambda_2}(X-\lambda_2-na) \right) \\ &= \frac{e^{\lambda_2}}{na} (e^{na}-1)(X-\lambda_2) + e^{\lambda_2} \\ &= \frac{e^{b-a}}{na} (e^{na}-1)(X-(b-a)) + e^{b-a} \end{aligned}$$

on a :

$$\begin{aligned} e^{A(a,b)} &= R(A(a,b)) \\ &= \frac{e^{b-a}}{na} (e^{na}-1)(A(a,b) - (b-a) I_n) + e^{b-a} I_n \\ &= \frac{e^{b-a}}{n} (e^{na}-1) A(1,1) + e^{b-a} I_n \end{aligned}$$

(e) En écrivant que :

$$A(a,b) = A(a,a) + (b-a) I_n$$

on a :

$$e^{A(a,b)} = e^{aA(1,1)} e^{(b-a)I_n} = e^{b-a} e^{aA(1,1)}$$

et avec :

$$\forall k \geq 1,\ A(1,1)^k = n^{k-1} A(1,1)$$

on déduit que :

$$\begin{aligned} e^{aA(1,1)} &= I_n + \left(\frac{1}{n} \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{(na)^k}{k!} \right) A(1,1) \\ &= I_n + \frac{1}{n} (e^{na}-1) A(1,1) \end{aligned}$$

et :

$$e^{A(a,b)} = e^{b-a} e^{aA(1,1)} = \frac{e^{b-a}}{n} (e^{na}-1) A(1,1) + e^{b-a} I_n$$

3. Soient θ un réel non nul et $A_\theta = \begin{pmatrix} 0 & -\theta \\ \theta & 0 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$.

   (a) Calculer e^{A_θ} de plusieurs manières.

   (b) En écrivant que $A_\theta = B_\theta + C_\theta$, avec $B_\theta = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ \theta & 0 \end{pmatrix}$ et $C_\theta = \begin{pmatrix} 0 & -\theta \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, vérifier que $e^{A+B} \neq e^A e^B$ en général.

Solution Pour $\theta = 0$, on a $A_\theta = 0$ et $e^{A_\theta} = I_2$.

(a) Pour tout réel θ, on a :

$$A_\theta^2 = \begin{pmatrix} -\theta^2 & 0 \\ 0 & -\theta^2 \end{pmatrix}$$

donc pour tout entier $k \geq 0$, on a :

$$A_\theta^{2k} = \begin{pmatrix} (-1)^k \theta^{2k} & 0 \\ 0 & (-1)^k \theta^{2k} \end{pmatrix}$$

$$\begin{aligned} A_\theta^{2k+1} &= \begin{pmatrix} (-1)^k \theta^{2k} & 0 \\ 0 & (-1)^k \theta^{2k} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & -\theta \\ \theta & 0 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 0 & -(-1)^k \theta^{2k+1} \\ (-1)^k \theta^{2k+1} & 0 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

ce qui nous donne :

$$\begin{aligned} e^{A_\theta} &= \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{1}{(2k)!} A_\theta^{2k} + \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{1}{(2k+1)!} A_\theta^{2k+1} \\ &= \begin{pmatrix} \cos(\theta) & 0 \\ 0 & \cos(\theta) \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & -\sin(\theta) \\ \sin(\theta) & 0 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \cos(\theta) & -\sin(\theta) \\ \sin(\theta) & \cos(\theta) \end{pmatrix} \end{aligned}$$

soit la matrice de la rotation d'angle θ (la série $\sum \frac{1}{k!} A_\theta^k$ étant normalement convergence, elle est commutativement convergente).
En fait A_θ est la représentation matricielle réelle du nombre complexe $i\theta$ et e^{A_θ} est la représentation de $e^{i\theta}$ (la multiplication par $e^{i\theta}$ est bien la rotation d'angle θ).
On peut aussi diagonaliser A_θ dans $\mathcal{M}_2(\mathbb{C})$.
Le polynôme caractéristique de A_θ est :

$$P_\theta(X) = X^2 + \theta^2 = (X + i\theta)(X - i\theta)$$

Pour $\theta \neq 0$, A_θ est diagonalisable avec pour vecteurs propres, respectivement associés à $i\theta$ et $-i\theta$:

$$e_1 = \begin{pmatrix} i \\ 1 \end{pmatrix} \text{ et } e_2 = \begin{pmatrix} -i \\ 1 \end{pmatrix}$$

ce qui nous donne $P^{-1} A_\theta P = D$ avec :

$$D = \begin{pmatrix} i\theta & 0 \\ 0 & -i\theta \end{pmatrix}, \ P = \begin{pmatrix} i & -i \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, \ P^{-1} = \frac{1}{2i} \begin{pmatrix} 1 & i \\ -1 & i \end{pmatrix}$$

et :

$$\begin{aligned}
e^{A_\theta} &= Pe^D P^{-1} = \frac{1}{2i}\begin{pmatrix} i & -i \\ 1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} e^{i\theta} & 0 \\ 0 & e^{-i\theta} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & i \\ -1 & i \end{pmatrix} \\
&= \frac{1}{2i}\begin{pmatrix} i\left(e^{i\theta}+e^{-i\theta}\right) & -\left(e^{i\theta}-e^{-i\theta}\right) \\ e^{i\theta}-e^{-i\theta} & i\left(e^{i\theta}+e^{-i\theta}\right) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos(\theta) & -\sin(\theta) \\ \sin(\theta) & \cos(\theta) \end{pmatrix}
\end{aligned}$$

On peut aussi utiliser l'interpolation de Lagrange pour $\theta \neq 0$. On a $e^{A_\theta} = R(A_\theta)$ avec :

$$\begin{aligned}
R(X) &= e^{i\theta}\frac{X+i\theta}{2i\theta} - e^{-i\theta}\frac{X-i\theta}{2i\theta} \\
&= \frac{e^{i\theta}-e^{-i\theta}}{2i\theta}X + \frac{e^{i\theta}+e^{-i\theta}}{2} = \frac{\sin(\theta)}{\theta}X + \cos(\theta)
\end{aligned}$$

ce qui donne :

$$e^{A_\theta} = \frac{\sin(\theta)}{\theta}A_\theta + \cos(\theta)\, I_2 = \begin{pmatrix} \cos(\theta) & -\sin(\theta) \\ \sin(\theta) & \cos(\theta) \end{pmatrix}$$

(b) Avec $B_\theta^2 = C_\theta^2 = 0$, on déduit que $e^{B_\theta} = I_2 + B_\theta = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ \theta & 1 \end{pmatrix}$, $e^{C_\theta} = I_2 + C_\theta = \begin{pmatrix} 1 & -\theta \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ et :

$$\begin{aligned}
e^{B_\theta}e^{C_\theta} &= \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ \theta & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & -\theta \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -\theta \\ \theta & -\theta^2+1 \end{pmatrix} \\
&\neq e^{A_\theta} = \begin{pmatrix} \cos(\theta) & -\sin(\theta) \\ \sin(\theta) & \cos(\theta) \end{pmatrix}
\end{aligned}$$

pour $\theta \neq 0$.

4. Plus généralement, pour $B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$, on note$A = \begin{pmatrix} 0 & -B \\ B & 0 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{2n}(\mathbb{C})$. Calculer e^A.

Solution Plus généralement, pour $B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ et $A = \begin{pmatrix} 0 & -B \\ B & 0 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{2n}(\mathbb{C})$ on a :

$$A^2 = \begin{pmatrix} -B^2 & 0 \\ 0 & -B^2 \end{pmatrix}$$

donc pour tout entier $k \geq 0$:

$$A^{2k} = \begin{pmatrix} (-1)^k B^{2k} & 0 \\ 0 & (-1)^k B^{2k} \end{pmatrix}$$

$$A^{2k+1} = \begin{pmatrix} 0 & -(-1)^k B^{2k+1} \\ (-1)^k B^{2k+1} & 0 \end{pmatrix}$$

et :

$$\begin{aligned}
e^A &= \sum_{k=0}^{+\infty}\frac{1}{(2k)!}A^{2k} + \sum_{k=0}^{+\infty}\frac{1}{(2k+1)!}A^{2k+1} \\
&= \begin{pmatrix} \cos(B) & 0 \\ 0 & \cos(B) \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & -\sin(B) \\ \sin(B) & 0 \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} \cos(B) & -\sin(B) \\ \sin(B) & \cos(B) \end{pmatrix}
\end{aligned}$$

5. Montrer que, pour toute matrice $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$, on $\det\left(e^A\right) = e^{\mathrm{Tr}(A)}$ et e^A est inversible. L'exponentielle matricielle est donc une application continue de $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ dans le groupe multiplicatif $GL_n(\mathbb{C})$.

Solution Dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$, la matrice A est trigonalisable et il existe une matrice $P \in GL_n(\mathbb{C})$ telle que la matrice $T = P^{-1}AP$ soit triangulaire supérieure, les termes diagonaux de cette matrice étant les valeurs propres $\lambda_1, \cdots, \lambda_n$ de A. Comme, pour tout entier $k \geq 0$, la matrice T^k est aussi triangulaire supérieure de termes diagonaux $\lambda_1^k, \cdots, \lambda_n^k$, on déduit que e^T est triangulaire supérieure de termes diagonaux $e^{\lambda_1}, \cdots, e^{\lambda_n}$ et :

$$\det\left(e^A\right) = \det\left(Pe^T P^{-1}\right) = \det\left(e^T\right) = \prod_{j=1}^{n} e^{\lambda_j} = \exp\left(\sum_{j=1}^{n} \lambda_j\right) = e^{\mathrm{Tr}(A)} \neq 0$$

ce qui implique que e^A est inversible.

6. L'application exp est-elle surjective de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ dans $GL_n(\mathbb{R})$?

Solution Dans le cas particulier où $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, avec $\det\left(e^A\right) = e^{\mathrm{Tr}(A)} > 0$, on déduit que l'exponentielle matricielle est une application de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ dans le groupe multiplicatif $GL_n^+(\mathbb{R})$ formé des matrices réelles de déterminant strictement positif et en conséquence, la fonction exp n'est pas surjective de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ dans $GL_n(\mathbb{R})$ pour $n \geq 1$.

7. Montrer que pour toute matrice $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$, l'inverse de e^A est e^{-A}.

Solution La fonction $\psi : t \mapsto e^{tA}e^{-tA}$ est dérivable sur $\mathbb{R}$ de dérivée :

$$\psi'(t) = Ae^{tA}e^{-tA} + e^{tA}(-A)e^{-tA} = (A - A)\psi(t) = 0$$

ce qui entraîne que ψ est constante sur $\mathbb{R}$, donc $\psi(t) = \psi(0) = I_n$ pour tout réel t, ce qui signifie que e^{tA} est inversible d'inverse e^{-tA}.

8. Montrer que si $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ est anti-hermitienne, alors e^A est unitaire.

Solution Si $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ est anti-hermitienne, on a $A^* = \overline{A} = -A$ et avec la continuité des applications trace et conjugaison, on déduit que :

$$\left(e^A\right)^* = e^{A^*} = e^{-A} = \left(e^A\right)^{-1}$$

ce qui signifie que e^A est unitaire.

9. Soient A, B dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$. Montrer que les matrices A et B commutent si, et seulement si, $e^{t(A+B)} = e^{tA}e^{tB}$ pour tout réel t.

Solution Pour la condition suffisante, on peut procéder comme suit.
Supposons que A et B commutent. La fonction $\psi : t \mapsto e^{t(A+B)}e^{-tA}e^{-tB}$ est dérivable sur $\mathbb{R}$ de dérivée :

$$\begin{aligned}\psi'(t) &= (A+B)e^{t(A+B)}e^{-tA}e^{-tB} + e^{t(A+B)}(-A)e^{-tA}e^{-tB} + e^{t(A+B)}e^{-tA}(-B)e^{-tB} \\ &= (A+B-A-B)\psi(t) = 0\end{aligned}$$

puisque tous les endomorphismes considérés commutent, ce qui entraîne que ψ est constante, soit $\psi(t) = \psi(0) = I_n$ pour tout réel t. Comme e^{-tA} est l'inverse de e^{tA} pour toute matrice A, on en déduit que $e^{t(A+B)} = e^{tA}e^{tB}$ et $t = 1$ donne le résultat attendu.
L'unicité du développement en série entière au voisinage de 0 d'une fonction développable en série entière de $]-r, r[$ dans l'algèbre de Banach $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ nous donne une démonstration de la condition nécessaire. Pour A, B fixés dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ et tout réel t on a :

$$e^{t(A+B)} = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{t^k}{k!}(A+B)^k$$

et :

$$e^{tA}e^{tB} = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{t^k}{k!} A^k \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{t^k}{k!} B^k = I_n + t\left(A+B\right) + \frac{t^2}{2}\left(A^2 + 2AB + B^2\right) + \sum_{k=3}^{+\infty} t^k U_k$$

L'égalité $e^{t(A+B)} = e^{tA}e^{tB}$ est donc réalisée si et seulement si tous les coefficients de ces deux développement en séries entières coïncident, ce qui entraîne en particulier $(A+B)^2 = A^2 + 2AB + B^2$ ce qui équivaut à $AB = BA$.

En particulier, on $e^{A+B} = e^A e^B$ pour A et B qui commutent et on en déduit que pour tout entier $k \geq 0$, on a $e^{kA} = \left(e^A\right)^k$.

10. Soient $A \in \mathcal{M}_n\left(\mathbb{C}\right)$. Montrer que $\lim\limits_{t \to +\infty} e^{tA} = 0$ si, et seulement si, toutes les valeurs propres de A sont de partie réelle strictement négative.

Solution Supposons que $\lim\limits_{t \to +\infty} e^{tA} = 0$. Si $\lambda \in \mathbb{C}$ est une valeur propre de A et $x \in \mathbb{C}^n \setminus \{0\}$ un vecteur propre associé, on a alors $P\left(A\right)x = P\left(\lambda\right)x$ pour tout polynôme P et par continuité de l'application $(M, x) \in \mathcal{M}_n\left(\mathbb{C}\right) \times \mathbb{C}^n \mapsto Mx$, on en déduit que $e^{tA}x = e^{t\lambda}x$ pour tout réel t. On a alors $\lim\limits_{t \to +\infty} e^{t\lambda}x = 0$ avec $x \neq 0$, donc $\lim\limits_{t \to +\infty} e^{t\lambda} = 0$ et $\lim\limits_{t \to +\infty} \left|e^{t\lambda}\right| = \lim\limits_{t \to +\infty} e^{t\Re(\lambda)} = 0$, ce qui impose $\Re\left(\lambda\right) < 0$.

Réciproquement, supposons que $\Re\left(\lambda\right) < 0$ pour toute valeur propre λ de A. Soit $A = D + V$ la décomposition de Dunford de A. La matrice D étant diagonalisable, il existe une matrice inversible P telle que $P^{-1}DP = \Delta$ où $\Delta = \operatorname{diag}\left(\lambda_1, \cdots, \lambda_n\right)$, les λ_i étant les valeurs propres de A. On a alors, pour tout entier $k \geq 0$:

$$t^k e^{tD} = P\left(t^k e^{t\Delta}\right)P^{-1} = P \operatorname{diag}\left(t^k e^{t\lambda_1}, \cdots, t^k e^{t\lambda_n}\right)P^{-1} \underset{t \to +\infty}{\to} 0$$

Comme V est nilpotente, on a $e^{tV} = \sum\limits_{k=0}^{n} \frac{1}{k!} t^k V^k$ et :

$$e^{tA} = e^{tV}e^{tD} = \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!}\left(t^k e^{tD}\right)V^k \underset{t \to +\infty}{\to} 0$$

(D et V commutent).

11. Montrer que, pour toute matrice $A \in \mathcal{M}_n\left(\mathbb{C}\right)$, les solutions du système différentiel $Y' = AY$, où $Y \in \mathcal{C}^1\left(\mathbb{R}, \mathbb{C}^n\right)$, sont les fonction $Y : t \mapsto e^{tA}Y_0$, où $Y_0 \in \mathbb{C}^n$.

Solution Les fonctions $t \mapsto e^{tA}Y_0$ sont solutions de $Y' = AY$ et pour toute fonction $Y \in \mathcal{C}^1\left(\mathbb{R}, \mathbb{C}^n\right)$ solution de $Y' = AY$, en notant $Z\left(t\right) = e^{-tA}Y\left(t\right)$, on a :

$$Z'\left(t\right) = -e^{-tA}AY\left(t\right) + e^{-tA}Y'\left(t\right) = e^{-tA}\left(-AY\left(t\right) + Y'\left(t\right)\right) = 0$$

(on a utilisé le fait que A et e^{-tA} commutent), donc $Z\left(t\right) = Y_0$ et $Y\left(t\right) = e^{tA}Y_0$.

12. Soit $A : t \mapsto A\left(t\right)$ une fonction de classe $\mathcal{C}^1$ de $\mathbb{R}$ dans $\mathcal{M}_n\left(\mathbb{C}\right)$. L'égalité $\left(e^{A(t)}\right)' = A'\left(t\right)e^{A(t)}$ est-elle toujours vérifiée ?

Solution Pour $A\left(t\right) = \begin{pmatrix} a\left(t\right) & b\left(t\right) \\ c\left(t\right) & d\left(t\right) \end{pmatrix}$, on a :

$$AA' - A'A = \begin{pmatrix} bc' - b'c & ab' - a'b + bd' - b'd \\ a'c - ac' + c'd - cd' & cb' - c'b \end{pmatrix}$$

et pour $c = d = 0$:

$$AA' - A'A = \begin{pmatrix} 0 & ab' - a'b \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \neq 0$$

si $ab' \neq a'b$. Dans ce cas, on a :

$$\forall k \geq 1,\ A^k = \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & 0 \end{pmatrix}^k = \begin{pmatrix} a^k & a^{k-1}b \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a^k & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + b \begin{pmatrix} 0 & a^{k-1} \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

et :

$$e^{A(t)} = \begin{pmatrix} e^{a(t)} & b(t) \frac{e^{a(t)}-1}{a(t)} \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

En prenant $a(t) = 1$ et $b(t) = t$, on a :

$$e^{A(t)} = \begin{pmatrix} e & (e-1)t \\ 0 & 0 \end{pmatrix},\ \left(e^{A(t)}\right)' = \begin{pmatrix} 0 & e-1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

et :

$$A'(t) e^{A(t)} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} e & (e-1)t \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = 0$$

13.

(a) Soit A, B dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ diagonalisables. Montrer que si $e^A = e^B$, alors $A = B$.

(b) Soit A dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ diagonalisable. Montrer que A est diagonale si, et seulement si, e^A est diagonale.

Solution

(a) Notons $\mathrm{Sp}(A) \cup \mathrm{Sp}(B) = \{\lambda_1, \cdots, \lambda_p\}$ l'ensemble des valeurs propres deux à deux distinctes de A et B et $L \in \mathbb{R}_{p-1}[X]$ le polynôme d'interpolation de Lagrange défini par $L\left(e^{\lambda_k}\right) = \lambda_k$ pour k compris entre 1 et p (les e^{λ_k} sont deux à deux distincts puisque la fonction exponentielle est injective sur $\mathbb{R}$).
Comme A est diagonalisable, il existe une matrice $P \in GL_n(\mathbb{R})$ telle que :

$$P^{-1}AP = D = \mathrm{diag}(\mu_1, \cdots, \mu_n)$$

où les μ_k sont dans $\mathrm{Sp}(A) \subset \{\lambda_1, \cdots, \lambda_p\}$. On a donc $\mu_k = L(e^{\mu_k})$ pour tout k compris entre 1 et n et :

$$D = \mathrm{diag}(L(e^{\mu_1}), \cdots, L(e^{\mu_n})) = L\left(e^D\right)$$

$$A = PDP^{-1} = PL\left(e^D\right)P^{-1} = L\left(Pe^DP^{-1}\right) = L\left(e^A\right)$$

De manière analogue, on voit que $B = L\left(e^B\right)$ et l'égalité $e^A = e^B$ entraîne $A = B$.
La restriction de l'application exponentielle au sous-ensemble de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ constitué des matrices diagonalisables est donc injective.

(b) Si $A = \lambda I_n$ est diagonale, il en est alors de même de $e^A = e^\lambda I_n$.
Supposons $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ diagonalisable et e^A diagonale. Il existe donc une matrice $P \in GL_n(\mathbb{R})$ et des réels $\lambda_1, \cdots, \lambda_n$ tels que :

$$P^{-1}AP = D = \mathrm{diag}(\lambda_1, \cdots, \lambda_n)$$

On a alors :

$$P^{-1}e^AP = e^D = \mathrm{diag}\left(e^{\lambda_1}, \cdots, e^{\lambda_n}\right)$$

et comme e^A est diagonale, elle vaut e^D. On a donc $e^A = e^D$ avec A, D diagonalisables réelles, donc $A = D$ et A est diagonale.

14.

(a) Montrer que pour toute matrice $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$, on a :

$$e^A = \lim_{k \to +\infty} \left(I_n + \frac{1}{k}A\right)^k$$

(b) Montrer que si $(A_k)_{k\in\mathbb{N}}$ est une suite de matrices qui converge vers $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$, on a alors :

$$\lim_{k \to +\infty} \left(e^{A_k} - \left(I_n + \frac{1}{k}A_k\right)^k\right) = 0 \text{ et } \lim_{k \to +\infty} \left(I_n + \frac{1}{k}A_k\right)^k = e^A$$

(c) En utilisant ce qui précède, montrer que si A et B commutent dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$, on a alors $e^{A+B} = e^A e^B$.

Solution

(a) Comme I_n et A commutent, on peut utiliser la formule du binôme pour écrire que :

$$\left(I_n + \frac{1}{k}A\right)^k = \sum_{j=0}^{k} \frac{C_k^j}{k^j} A^j$$

et :

$$\begin{aligned}\left\|e^A - \left(I_n + \frac{1}{k}A\right)^k\right\| &= \left\|\sum_{j=0}^{k}\left(\frac{1}{j!} - \frac{C_k^j}{k^j}\right)A^j + \sum_{j=k+1}^{+\infty}\frac{1}{j!}A^j\right\| \\ &\leq \sum_{j=0}^{k}\left(\frac{1}{j!} - \frac{C_k^j}{k^j}\right)\|A\|^j + \sum_{j=k+1}^{+\infty}\frac{1}{j!}\|A\|^j \\ &\leq e^{\|A\|} - \left(1 + \frac{\|A\|}{k}\right)^k \underset{k\to+\infty}{\to} 0\end{aligned}$$

(on a $\frac{C_k^j}{k^j} = \frac{k!}{j!\,(k-j)!}\frac{1}{k^j} = \frac{1}{j!}\prod_{i=0}^{j-1}\left(1 - \frac{i}{k}\right) \leq \frac{1}{j!}$ pour $0 \leq j \leq k$).

(b) On a :

$$\left\|e^{A_k} - \left(I_n + \frac{1}{k}A_k\right)^k\right\| \leq e^{\|A_k\|} - \left(1 + \frac{\|A_k\|}{k}\right)^k \underset{k\to+\infty}{\to} 0$$

et avec la continuité de la fonction exponentielle matricielle, on en déduit que :

$$\left\|e^A - \left(I_n + \frac{1}{k}A_k\right)^k\right\| \leq \left\|e^A - e^{A_k}\right\| + \left\|e^{A_k} - \left(I_n + \frac{1}{k}A_k\right)^k\right\| \underset{k\to+\infty}{\to} 0$$

(c) En utilisant la continuité du produit matriciel, on peut écrire que :

$$e^A e^B = \lim_{k\to+\infty}\left(I_n + \frac{1}{k}A\right)^k\left(I_n + \frac{1}{k}B\right)^k$$

avec :

$$\left(I_n + \frac{1}{k}A\right)^k\left(I_n + \frac{1}{k}B\right)^k = \left(\left(I_n + \frac{1}{k}A\right)\left(I_n + \frac{1}{k}B\right)\right)^k$$

dans le cas où A et B commutent et :

$$\left(I_n + \frac{1}{k}A\right)\left(I_n + \frac{1}{k}B\right) = I_n + \frac{1}{k}C_k$$

où :

$$C_k = A + B + \frac{1}{k}AB \underset{k\to+\infty}{\to} A + B$$

Il en résulte que $e^A e^B = e^{A+B}$.

15. Soient $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ et $A = D + V$ sa décomposition de Dunford avec D diagonalisable et V nilpotente d'indice $r \geq 1$.

   (a) Montrer que :

$$e^A = e^D e^V = e^D \sum_{k=0}^{r-1} \frac{1}{k!} V^k$$

   (b) Montrer que la décomposition de Dunford de e^A est donnée par :

$$e^A = e^D + e^D \left(e^V - I_n\right),$$

   avec e^D diagonalisable et $e^D \left(e^V - I_n\right)$ nilpotente.

Solution

(a) Comme D et V commutent, on a $e^A = e^D e^V$ avec :

$$e^V = \sum_{k=0}^{r-1} \frac{1}{k!} V^k$$

puisque $V^k = 0$ pour $k \geq r$.
Cela peut aussi se déduire du problème sur les séries entières de matrices :

$$e^A = \sum_{j=0}^{r-1} \frac{1}{j!} \exp^{(j)}(D) V^j = \sum_{j=0}^{r-1} \frac{1}{j!} e^D V^j = e^D \sum_{j=0}^{r-1} \frac{1}{j!} V^j$$

(b) On peut écrire que :

$$\begin{aligned} e^A &= e^D \sum_{k=0}^{r} \frac{1}{k!} V^k = e^D \left(I_n + V \sum_{k=1}^{r} \frac{1}{k!} V^{k-1} \right) \\ &= e^D + V e^D \sum_{k=1}^{r} \frac{1}{k!} V^{k-1} = e^D + V \cdot W \end{aligned}$$

Comme V est nilpotente d'indice r et commute à W, on a $(V \cdot W)^r = V^r W^r = 0$, c'est-à-dire que $V \cdot W$ est nilpotent.
L'endomorphisme e^D est diagonalisable comme D et e^D commute à $V \cdot W$.
On a donc obtenu ainsi la décomposition de Dunford de e^A puisque cette décomposition est unique.
La partie nilpotente de cette décomposition s'écrit aussi :

$$V \cdot W = e^D \sum_{k=1}^{r} \frac{1}{k!} V^k = e^D \left(e^V - I_n\right).$$

16. Montrer qu'une matrice $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ est diagonalisable si, et seulement si, e^A l'est.

Solution On sait déjà que e^A est diagonalisable si A l'est.
Réciproquement dire que e^A est diagonalisable équivaut à dire que $e^D \left(e^V - I_n\right) = 0$ (c'est la partie nilpotente dans la décomposition de Dunford de e^A), soit que $e^V = I_n$ puisque e^D est inversible. On a donc $\sum_{k=0}^{r} \frac{1}{k!} V^k = I_n$, où $r \geq 1$ est l'indice de nilpotence de V, soit $\sum_{k=1}^{r} \frac{1}{k!} V^k = 0$, c'est-à-dire que $P(X) = \sum_{k=1}^{r} \frac{1}{k!} X^k$ est un polynôme annulateur de V et X^r qui est le polynôme

minimal de V va diviser P, ce qui impose $r = 1$ (on a $\dfrac{1}{r!} = 1$ en identifiant les termes de degré r), soit $V = 0$ et A est diagonalisable.
Pour montrer que $r = 1$, on peut aussi écrire que si $r \geq 2$, alors $V^{r-1} = V^{r-2} \sum\limits_{k=1}^{r} \dfrac{1}{k!} V^k = 0$, ce qui est incompatible avec le fait que r est l'indice de nilpotence de V. On a donc $r = 1$.

– V – Surjectivité et injectivité de l'exponentielle matricielle

On note $\mathcal{N}_n(\mathbb{C})$ le sous-ensemble de $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ formé des matrices nilpotentes et $\mathcal{L}_n(\mathbb{C})$ le sous-ensemble de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ formé des matrices unipotentes (i. e. l'ensemble des matrices $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ telles que $A - I_n$ soit nilpotente).

La série entière $\sum \dfrac{(-1)^{k-1}}{k} z^k$ a un rayon de convergence égal à 1 et pour z réel dans $]-1, 1[$, on sait que sa somme est $\ln(1+z)$.

On note donc naturellement pour z complexe :

$$\ln(1+z) = \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{k-1}}{k} z^k \quad (|z| < 1)$$

et on peut définir la fonction $A \mapsto \ln(I_n + A)$ sur l'ouvert :

$$\mathcal{D}_1 = \{A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C}) \mid \rho(A) < 1\}$$

par :

$$\ln(I_n + A) = \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{k-1}}{k} A^k$$

On sait alors que $\ln(I_n + A)$ est un polynôme en A (dont les coefficients dépendent de A).
En particulier on a $\ln(I_n) = 0$ et pour toute matrice A nilpotente A d'indice $r \geq 2$, on a :

$$\ln(I_n + A) = \sum_{k=1}^{r-1} \frac{(-1)^{k-1}}{k} A^k$$

1. Montrer que l'application $\exp : z \mapsto e^z$ réalise un morphisme de groupes surjectif de $(\mathbb{C}, +)$ sur $(\mathbb{C}^*, \cdot)$ de noyau $\ker(\exp) = 2i\pi\mathbb{Z}$.

Solution Il est connu que exp un morphisme de groupes de $(\mathbb{C}, +)$ dans $(\mathbb{C}^*, \cdot)$ (c'est ce que nous dit **IV.9** puisque $\mathcal{M}_1(\mathbb{C}) = \mathbb{C}$ est commutatif) de noyau $2i\pi\mathbb{Z}$.
Tout nombre complexe non nul z, s'écrit $z = \rho e^{i\theta}$ où $\theta \in \mathbb{R}$ et $\rho = |z|$ est un réel strictement positif. Sachant que l'exponentielle réelle réalise une bijection de $\mathbb{R}$ sur $\mathbb{R}^{+,*}$, il existe un unique réel x tel que $\rho = e^x$ et $z = e^{x+i\theta}$.

2. Montrer que la matrice $B = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$ ne peut s'écrire $B = e^A$ avec $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

Solution Si $B = e^A$, on a alors $1 = \det(B) = e^{\mathrm{Tr}(A)}$ dans $\mathbb{R}$ et $\mathrm{Tr}(A) = 0$. Donc, les valeurs propres complexes de A, λ et $\overline{\lambda}$ (A est réelle) sont de somme nulle, soit $\lambda + \overline{\lambda} = 0$ et $\lambda = i\mu$ avec μ réel.
Si $\mu \neq 0$, la matrice A a deux valeurs propres distinctes et est diagonalisable (sur $\mathbb{C}$), donc aussi $B = e^A$, ce qui n'est pas le cas. On a donc $\mu = 0$, c'est-à-dire que 0 est valeur propre double de A. Il en résulte que $A^2 = 0$ (Cayley-Hamilton) et $B = e^A = I_2 + A$, soit $A = B - I_2$ et $\mathrm{Tr}(A) = -2$, ce qui contredit $\mathrm{Tr}(A) = 0$.
La fonction exp n'est pas surjective de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ dans $GL_n^+(\mathbb{R})$ pour $n \geq 2$ (pour $n = 1$, elle est bijective de $\mathcal{M}_1(\mathbb{R}) = \mathbb{R}$ sur $GL_1^+(\mathbb{R}) = \mathbb{R}^{+,*}$).

3. Déterminer toutes les solutions dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ de l'équation $e^A = I_n$.

Solution Pour $n = 1$, on a $\mathcal{M}_1(\mathbb{C}) = \mathbb{C}$ et les solution de $e^z = 1$ dans $\mathbb{C}$ sont les $e^{2in\pi}$ où n décrit $\mathbb{Z}$.
De manière générale soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ telle que $e^A = I_n$. La décomposition de Dunford $A = D + V$ de A donne celle de e^A :

$$e^A = e^D + e^D \left(e^V - I_n\right)$$

et avec l'unicité de cette décomposition, on déduit que l'équation $e^A = I_n$ équivaut à $e^D = I_n$ et $e^V = I_n$. On a vu que $e^V = I_n$ avec V nilpotente équivaut à $V = 0$. De plus e^D est diagonalisable de valeurs propres e^{μ_k} où les μ_k, pour k compris entre 1 et n, sont les valeurs propres de D, donc celles de A et $e^D = I_n$ impose $e^{\mu_k} = 1$, soit $\mu_k \in 2i\pi\mathbb{Z}$ pour tout k compris entre 1 et n. En définitive, A est diagonalisable de valeurs propres dans $2i\pi\mathbb{Z}$. La réciproque étant évidente.
On peut aussi dire que si $e^A = I_n$, la matrice e^A est en particulier diagonalisable, donc aussi A (corollaire précédent avec $\mathbb{K} = \mathbb{C}$). Il existe donc $P \in GL_n(\mathbb{C})$ $A = P \operatorname{diag}(\lambda_1, \cdots, \lambda_n) P^{-1}$ et $e^A = P \operatorname{diag}\left(e^{\lambda_1}, \cdots, e^{\lambda_n}\right) P^{-1} = I_n$, nous donne $\operatorname{diag}\left(e^{\lambda_1}, \cdots, e^{\lambda_n}\right) = I_n$, soit $e^{\lambda_k} = 1$ pour tout k et $\lambda_k \in 2i\pi\mathbb{Z}$.
L'exponentielle matricielle définie sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ n'est pas injective pour $n \geq 1$. Par exemple, pour tout entier relatif k on a $e^{2ik\pi I_n} = I_n$, c'est-à-dire que l'équation $e^X = I_n$ a une infinité de solutions dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$.
Prenant $A = \begin{pmatrix} 0 & -4\pi^2 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$, on a $e^A = e^0 = I_2$ et exp n'est pas injective sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ pour $n \geq 2$ (alors qu'elle l'est pour $n = 1$).

4. Montrer que :

$$\forall A \in \mathcal{D}_1,\ e^{\ln(I_n + A)} = I_n + A$$

Solution Pour tout $x \in \mathbb{R}$, on a :

$$e^x = \sum_{k=0}^{+\infty} \alpha_k x^k,$$

avec $\alpha_k = \dfrac{1}{k!}$ pour $k \geq 0$ et pour tout réel x tel que $|x| < 1$, on a :

$$\ln(1 + x) = \sum_{j=1}^{+\infty} \beta_j x^j,$$

avec $\beta_j = \dfrac{(-1)^{j-1}}{j}$ pour $j \geq 1$.
On peut alors écrire pour $k \geq 1$ et $|x| < 1$:

$$(\ln(1 + x))^k = \sum_{j=k}^{+\infty} \beta_{k,j} x^j$$

et :

$$\begin{aligned} e^{\ln(1+x)} &= 1 + \sum_{k=1}^{+\infty} \alpha_k \left(\sum_{j=k}^{+\infty} \beta_{k,j} x^j\right) \\ &= 1 + x + \sum_{j=2}^{+\infty} \left(\sum_{k=1}^{j} \alpha_k \beta_{k,j}\right) x^j. \end{aligned}$$

Avec $e^{\ln(1+x)} = 1 + x$, on déduit alors que :

$$\forall k \geq 2,\ \sum_{k=1}^{j} \alpha_k \beta_{k,j} = 0.$$

En écrivant, pour $A \in \mathcal{D}_1$ que :

$$e^{\ln(I_n+A)} = I_n + A + \sum_{j=2}^{+\infty} \left(\sum_{k=1}^{j} \alpha_k \beta_{k,j} \right) A^j$$

on déduit que $e^{\ln(I_n+A)} = I_n + A$.

5. En utilisant la question précédente, montrer que pour toute matrice $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$, on a :

$$e^A = \lim_{k \to +\infty} \left(I_n + \frac{1}{k} A \right)^k$$

Solution Il existe un entier $k_0 \geq 1$ tel que $\rho\left(\frac{1}{k}A\right) < 1$ pour tout $k \geq k_0$ et on peut alors écrire que :

$$e^{\ln\left(I_n + \frac{1}{k}A\right)} = I_n + \frac{1}{k}A$$

puis :

$$e^{k\ln\left(I_n + \frac{1}{k}A\right)} = \left(I_n + \frac{1}{k}A \right)^k$$

Avec :

$$\frac{1}{t}\ln(I_n + tA) = \sum_{j=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{j-1}}{j} t^{j-1} A^j = A + o(1)$$

pour $t > 0$ assez petit, on déduit que :

$$\lim_{k \to +\infty} k \ln\left(I_n + \frac{1}{k}A \right) = A$$

et avec la continuité de exp, que :

$$\lim_{k \to +\infty} e^{k\ln\left(I_n + \frac{1}{k}A\right)} = e^A$$

6. Montrer que pour toute matrice $A \in \mathcal{N}_n(\mathbb{C})$ on a $e^A \in \mathcal{L}_n(\mathbb{C})$ et :

$$\forall t \in \mathbb{R},\ \ln\left(e^{tA}\right) = tA$$

Solution Si $A \in \mathcal{N}_n(\mathbb{C})$, il existe $p \in \mathbb{N}^*$ tel que $A^{p+1} = 0$ et $e^A = I_n + V$, avec :

$$V = A \sum_{k=1}^{p} \frac{1}{k!} A^{k-1}$$

qui est nilpotente. On a donc $e^A \in \mathcal{L}_n(\mathbb{C})$.
Pour tout réel t, on a également $e^{tA} = I_n + V(t) \in \mathcal{L}_n(\mathbb{C})$ avec :

$$V(t) = \sum_{k=1}^{p} \frac{1}{k!} t^k A^k$$

telle que $V(t)^{p+1} = 0$. La fonction V est dérivable sur $\mathbb{R}$ ainsi que la fonction φ définie par :

$$\varphi(t) = \ln\left(e^{tA}\right) - tA = \sum_{k=1}^{p+1} \frac{(-1)^{k-1}}{k} V(t)^k - tA$$

avec :

$$\varphi'(t) = V'(t)\left(\sum_{k=1}^{p+1}(-1)^{k-1}V(t)^{k-1}\right) - A$$

Il est facile de vérifier que :

$$(I_n + V(t))\left(\sum_{k=1}^{p+1}(-1)^{k-1}V(t)^{k-1}\right) = I_n$$

c'est-à-dire que :

$$\sum_{k=1}^{p+1}(-1)^{k-1}V(t)^{k-1} = (I_n + V(t))^{-1} = \left(e^{tA}\right)^{-1} = e^{-tA}$$

et avec :

$$V'(t) = \left(e^{tA} - I_n\right)' = Ae^{tA},$$

on déduit que $\varphi'(t) = 0$ pour tout réel t. On a donc :

$$\forall t \in \mathbb{R},\ \varphi(t) = \varphi(0) = \ln(I_n) = 0$$

ce qui équivaut à $\ln\left(e^{tA}\right) = tA$ pour tout réel t.

7. Montrer que l'exponentielle matricielle réalise une bijection de $\mathcal{N}_n(\mathbb{C})$ sur $\mathcal{L}_n(\mathbb{C})$ d'inverse le logarithme matriciel.

Solution On sait déjà que l'exponentielle matricielle envoie $\mathcal{N}_n(\mathbb{C})$ dans $\mathcal{L}_n(\mathbb{C})$ et que pour toute matrice $A \in \mathcal{N}_n(\mathbb{C})$ on a $e^{\ln(I_n+A)} = I_n + A$ avec $B = \ln(I_n + A) \in \mathcal{N}_n(\mathbb{C})$, ce qui prouve que l'exponentielle matricielle réalise une surjection de $\mathcal{N}_n(\mathbb{C})$ sur $\mathcal{L}_n(\mathbb{C})$.
Si A_1, A_2 dans $\mathcal{N}_n(\mathbb{C})$ sont telles que $e^{A_1} = e^{A_2}$, alors $\ln\left(e^{A_1}\right) = \ln\left(e^{A_2}\right)$, c'est-à-dire, d'après le lemme précédent avec $t = 1$, que $A_1 = A_2$. L'exponentielle matricielle restreinte à $\mathcal{N}_n(\mathbb{C})$ est donc injective.
Ce résultat nous dit que pour toute matrice unipotente A, la matrice $X = \ln(I_n + A)$ est l'unique matrice nilpotente telle que $e^X = I_n + A$ et cette matrice X est polynomiale en A.

8. Montrer que pour tout nombre complexe λ non nul et pour toute matrice $A \in \mathcal{N}_n(\mathbb{C})$ il existe une matrice $X \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ telle que :

$$e^X = \lambda I_n + A$$

Solution Soient $\lambda \in \mathbb{C}$ et $A \in \mathcal{N}_n(\mathbb{C})$. On sait que la fonction exponentielle complexe est surjective de $\mathbb{C}$ sur $\mathbb{C}^*$, il existe donc un nombre complexe μ tel que $\lambda = e^\mu$ et en posant :

$$X = \mu I_n + \ln\left(I_n + \frac{1}{\lambda}A\right)$$

on a :

$$e^X = e^{\mu I_n}e^{\ln\left(I_n + \frac{1}{\lambda}A\right)} = \lambda I_n\left(I_n + \frac{1}{\lambda}A\right) = \lambda I_n + A$$

9. Soit $A \in GL_n(\mathbb{C})$ une matrice diagonalisable. Montrer qu'il existe un polynôme $R \in \mathbb{C}_{n-1}[X]$ tel que $R(A)$ soit diagonalisable et $e^{R(A)} = A$.

Solution Comme A est inversible, ses valeurs propres $\lambda_1, \cdots, \lambda_n$ sont toutes non nulles et si de plus elle est diagonalisable, il existe alors une matrice $P \in GL_n(\mathbb{C})$ telle que $A = P\,\mathrm{diag}(\lambda_1, \cdots, \lambda_n)\,P^{-1}$. Du fait de la surjectivité de l'exponentielle de $\mathbb{C}$ sur $\mathbb{C}^*$, il existe des nombres complexes $\mu_1, \cdots, \mu_n$ tels que $\lambda_k = e^{\mu_k}$ pour tout k compris entre 1 et n.

Le théorème d'interpolation de Lagrange nous dit qu'il existe un polynôme $R \in \mathbb{C}_{n-1}[X]$ tel que $\mu_k = R(\lambda_k)$ pour tout k compris entre 1 et n (en fait $R \in \mathbb{C}_{p-1}[X]$ si on a p valeurs propres distinctes).
La matrice diagonalisable $\Delta = P \operatorname{diag}(\mu_1, \cdots, \mu_n) P^{-1}$ est alors telle que :

$$e^{\Delta} = P e^{\operatorname{diag}(\mu_1,\cdots,\mu_n)} P^{-1} = P \operatorname{diag}(e^{\mu_1}, \cdots, e^{\mu_n}) P^{-1} = A$$

et :

$$\Delta = P \operatorname{diag}(R(\lambda_1), \cdots, R(\lambda_n)) P^{-1} = R\left(P \operatorname{diag}(\lambda_1, \cdots, \lambda_n) P^{-1}\right) = R(A)$$

10. Montrer que, pour toute matrice $A \in GL_n(\mathbb{C})$, il existe un polynôme $R \in \mathbb{C}[X]$ tel que $e^{R(A)} = A$ (l'exponentielle matricielle réalise une surjection de $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ sur $GL_n(\mathbb{C})$).

Solution Soit $A \in GL_n(\mathbb{C})$. On a la décomposition de Dunford $A = D + V$, avec D diagonalisable qui commute à V nilpotente. De plus, on sait que D et V sont des polynômes en A.
Comme D a les mêmes valeurs propres que A, elle est inversible et la question précédente nous dit qu'il existe un polynôme $R_1 \in \mathbb{C}[X]$ tel que $\Delta = R_1(D)$ soit diagonalisable et $e^{R_1(D)} = D$.
La matrice D étant polynomiale en A, il en est de même de Δ.
En cherchant une matrice $X = \Delta + Y$ avec Y nilpotente commutant à Δ telle que $e^X = A = D + V$, on doit avoir $D = e^{\Delta}$ et $V = e^{\Delta}\left(e^Y - I_n\right)$, soit $e^Y = e^{-\Delta}V + I_n = D^{-1}V + I_n$. Comme V commute à D, elle commute à D^{-1} et $D^{-1}V$ est nilpotente, c'est-à-dire que $D^{-1}V + I_n$ est unipotente et il existe une unique matrice nilpotente Y telle que $e^Y = D^{-1}V + I_n$, cette matrice étant polynomiale en $D^{-1}V$. Le théorème de Cayley-Hamilton nous dit que D^{-1} est polynomiale en D, donc en A. La matrice V étant polynomiale en A, il en est de même de $D^{-1}V$ et Y est polynomiale en A.
Les matrices Δ et Y commutent donc et on a :

$$e^{\Delta+Y} = e^{\Delta}e^{Y} = D\left(D^{-1}V + I_n\right) = D + V = A$$

avec $\Delta + Y$ polynomiale en A.

11. Prouver la surjectivité de l'exponentielle matricielle de $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ sur $GL_n(\mathbb{C})$ en utilisant le théorème de réduction de Jordan et la question **V.8**.

Solution Le théorème de réduction de Jordan nous dit que toute matrice $A \in GL_n(\mathbb{C})$ est semblable à une matrice diagonale par blocs de la forme :

$$J = \begin{pmatrix} J_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & J_2 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & J_p \end{pmatrix},$$

avec $J_k = \lambda_k I_n + V_k$, pour tout entier k compris entre 1 et p, la matrice V_k étant nilpotente et λ_k étant valeur propre de A. Comme la matrice A est inversible, tous les λ_k sont non nuls et on peut trouver des matrices à coefficients complexes X_k telles que $e^{X_k} = J_k$ (question **II.1a**).
En écrivant que $A = PJP^{-1}$ avec P inversible et en définissant la matrice X par :

$$X = P \begin{pmatrix} X_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & X_2 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & X_p \end{pmatrix} P^{-1},$$

on a :

$$e^X = P \begin{pmatrix} e^{X_1} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & e^{X_2} & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & e^{X_p} \end{pmatrix} P^{-1} = PJP^{-1} = A.$$

12. En utilisant la surjectivité de l'exponentielle matricielle de $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ sur $GL_n(\mathbb{C})$, montrer que $GL_n(\mathbb{C})$ est connexe par arcs.

Solution Soient A_1, A_2 deux matrices dans $GL_n(\mathbb{C})$. Il existe deux matrices X_1, X_2 dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ telles que $e^{X_1} = A_1$ et $e^{X_2} = A_2$. L'application φ définie sur $[0,1]$ par :

$$\varphi(t) = e^{(1-t)X_1 + tX_2}$$

est alors un chemin continu dans $GL_n(\mathbb{C})$ qui relie A_1 et A_2.

13. Soit p un entier naturel non nul. Montrer que pour toute matrice $A \in GL_n(\mathbb{C})$ il existe une matrice $X \in GL_n(\mathbb{C})$ polynomiale en A telle que $X^p = A$ (on dit que X est une racine p-ème de A).

Solution Pour $A \in GL_n(\mathbb{C})$, il existe une matrice $Y \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ polynomiale en A telle que $e^Y = A$. En posant $X = e^{\frac{1}{p}Y}$, on a $X \in GL_n(\mathbb{C})$, X est polynomiale en Y, donc en A et $X^p = e^Y = A$.

14. Pour $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ non inversible avec $n \geq 2$ et $p \geq 2$, peut-on toujours trouver une matrice $X \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ telle que $X^p = A$?

Solution Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ nilpotente d'indice n. Par exemple :

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 1 \\ 0 & \cdots & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

S'il existe $X \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ telle que $X^p = A$, on a alors $A^n = X^{np} = 0$ et X est aussi nilpotente. On a donc $X^n = 0$ (0 est l'unique valeur propre de X, donc son polynôme minimal est $(-1)^n X^n$, ce dernier annulant X) et :

$$A^{n-1} = X^{p(n-1)} = 0$$

puisque $p(n-1) \geq 2(n-1) \geq n$ pour $n \geq 2$, ce qui contredit le fait que A est nilpotente d'indice n.

15. Montrer que :

$$\exp(\mathcal{M}_n(\mathbb{R})) = \left\{B^2 \mid B \in GL_n(\mathbb{R})\right\}$$

Solution Si $A \in \exp(\mathcal{M}_n(\mathbb{R}))$, il existe alors une matrice $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ telle que $A = e^M$ et $A \in GL_n^+(\mathbb{R})$. En posant $B = e^{\frac{1}{2}M}$, on a $B \in GL_n(\mathbb{R})$ et $B^2 = e^{\frac{1}{2}M}e^{\frac{1}{2}M} = e^M = A$.
Réciproquement soit $A = B^2$ avec $B \in GL_n(\mathbb{R})$. En utilisant le résultat de la question **I.10** on sait qu'il existe $R \in \mathbb{C}[X]$ tel que $e^{R(B)} = B$. Comme $R \in GL_n(\mathbb{R})$, on a $B = \overline{B} = e^{\overline{R(B)}}$.
On a alors :

$$A = B^2 = B\overline{B} = e^{R(B) + \overline{R(B)}} = e^M$$

avec $M = R(B) + \overline{R(B)} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ et $A \in \exp(\mathcal{M}_n(\mathbb{R}))$.
Ce résultat généralise le fait qu'un réel est une exponentielle si, et seulement si, c'est le carré d'un réel non nul.