Normes sur $\mathbb{R}[X]$ et sur ℓ^1

1 Énoncé

– I – Normes sur l'espace des fonctions polynomiales réelles sur $[0,1]$

On désigne par E le $\mathbb{R}$-espace vectoriel des fonctions polynomiales réelles sur $[0,1]$.
On identifiera polynôme et fonction polynomiale.
On note respectivement $\|\cdot\|_\infty$, $\|\cdot\|_1$ et $\|\cdot\|_2$ les normes usuellement définies sur E par :

$$\forall P \in E,\ \|P\|_\infty = \sup_{x\in[0,1]} |P(x)|,\ \|P\|_1 = \int_0^1 |P(x)|\,dx,\ \|P\|_2 = \sqrt{\int_0^1 |P(x)|^2\,dx}$$

Pour tout entier naturel n, et toute fonction polynomiale $P \in E$, on note :

$$\nu_n(P) = \int_0^1 P(x)\,x^n dx$$

1. Montrer que :
$$\forall P \in E,\ \lim_{n\to+\infty} \nu_n(P) = 0$$
2. Montrer que l'application :
$$\nu : P \mapsto \nu(P) = \sup_{n\in\mathbb{N}} |\nu_n(P)|$$
définit une norme sur E.
3. Montrer que, pour tout polynôme $P \in E$, il existe un entier $n_0 \in \mathbb{N}$ tel que $\nu(P) = |\nu_{n_0}(P)|$ (le sup est atteint).
4. Montrer que, pour tout polynôme $P \in E$, on a :
$$\nu(P) \leq \|P\|_1 \leq \|P\|_2 \leq \|P\|_\infty \tag{1}$$
5. Quels sont les polynômes P pours lesquels :
   (a) $\|P\|_1 = \|P\|_2$?
   (b) $\|P\|_2 = \|P\|_\infty$?
   (c) $\nu(P) = \|P\|_1$?
6. Soit N l'une des normes $\nu, \|\cdot\|_1, \|\cdot\|_2, \|\cdot\|_\infty$ sur E.
   (a) Soit $(P_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite de fonctions polynomiales définie par :
   $$\forall n \in \mathbb{N},\ \forall x \in [0,1],\ P_n(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{x^k}{k!}$$
   Montrer que cette suite est de Cauchy dans (E, N).
   (b) L'espace normé (E, N) est-il complet ?
7. On rappelle que deux normes N_1 et N_2 sur un espace vectoriel réel E sont équivalentes s'il existe deux constantes $\alpha > 0$ et $\beta > 0$ telles que :
$$\forall x \in E,\ \alpha N_1(x) \leq N_2(x) \leq \beta N_1(x)$$
Montrer que les assertions suivantes sont équivalentes :

(a) les normes N_1 et N_2 sur E sont équivalentes ;
(b) une suite est de Cauchy dans (E, N_1) si, et seulement si, elle est de Cauchy dans (E, N_2) ;
(c) une suite est convergente dans (E, N_1) si, et seulement si, elle est convergente dans (E, N_2) .

8. Montrer que si N_1 et N_2 sont deux normes équivalentes sur E, alors (E, N_1) est complet si, et seulement si, (E, N_2) est complet.

9.
   (a) Montrer que les normes $\|\cdot\|_1$ et $\|\cdot\|_\infty$ [resp. $\|\cdot\|_2$ et $\|\cdot\|_\infty$] ne sont pas équivalentes.
   (b) Montrer que les normes $\|\cdot\|_1$ et $\|\cdot\|_2$ ne sont pas équivalentes.
   (c) Montrer que les normes ν et $\|\cdot\|_\infty$ ne sont pas équivalentes.

10. Pour tout réel $\alpha \in [0, 1]$, on désigne par ℓ_α la forme linéaire définie sur E par :

$$\forall P \in E,\ \ell_\alpha (P) = P (\alpha)$$

   (a) Soient $\|\cdot\|$ une norme sur E et $\alpha \in [0, 1]$. Montrer que ℓ_α est continue si, et seulement si, il existe une constante réelle $M_\alpha > 0$ telle que $|\ell_\alpha (P)| \leq M_\alpha \|P\|$ pour tout $P \in E$.
   (b) Existe-til une une norme $\|\cdot\|$ sur E telle que toutes les formes linéaires ℓ_α soient continues.
   (c) Soit N l'une des normes $\nu, \|\cdot\|_1 , \|\cdot\|_2 , \|\cdot\|_\infty$ sur E. Déterminer l'ensemble C_N des réels $\alpha \in [0, 1]$ tels que ℓ_α soient continue de (E, N) dans $\mathbb{R}$.

11. On désigne par N_1 et N_2 les applications définies sur E par :

$$\forall P \in E,\ N_1 (P) = \sum_{n=0}^{+\infty} \left|P^{(n)} (n)\right| ,\ N_2 (P) = \sup_{t\in[0,1]} \left|P \left(e^{2i\pi t}\right)\right|$$

   (a) Montrer que N_1 et N_2 définissent des normes sur E.
   (b) L'espace (E, N_1) est-il complet ?
   (c) L'espace (E, N_2) est-il complet ?

– II – Un résultat de géométrie euclidienne

Ici $(E, \langle\cdot \mid \cdot\rangle)$ est un espace euclidien de dimension $n \geq 2$.
On note $\|\cdot\|_2$ la norme euclidienne correspondante.
$\mathcal{B} = (e_i)_{1\leq i\leq n}$ est une base orthonormée de $(E, \langle\cdot \mid \cdot\rangle)$ et $\|\cdot\|_1$ est la norme définie sur E par :

$$\forall x = \sum_{i=1}^{n} x_i e_i \in E,\ \|x\|_1 = \sum_{i=1}^{n} |x_i|$$

On note $S^1 = \{x \in E \mid \|x\|_1 = 1\}$ la sphère unité de $(E, \|\cdot\|_1)$.
On se propose de montrer le résultat suivant.
Si F est un sous-espace vectoriel de E de dimension r comprise entre 1 et $n - 1$, on a alors :

$$\sqrt{r} \leq \max_{x\in F\setminus\{0\}} \frac{\|x\|_1}{\|x\|_2}$$

1. Pour tout $\varepsilon \in \{-1, 1\}^n$, on désigne par e_ε le vecteur :

$$e_\varepsilon = \frac{1}{\sqrt{n}} \sum_{i=1}^{n} \varepsilon_i e_i$$

   et par H_ε le sous-ensemble de E défini par :

$$H_\varepsilon = \left\{x \in E \mid \langle x \mid e_\varepsilon\rangle = \frac{1}{\sqrt{n}}\right\}$$

(a) Montrer que H_ε est un hyperplan affine de E.

(b) Montrer que $S^1 \subset \bigcup_{\varepsilon \in \{-1,1\}^n} H_\varepsilon$.

2. Soit F un sous-espace vectoriel de E de dimension r comprise entre 1 et $n-1$ et $(a_i)_{1 \leq i \leq n-r}$ une base orthonormée de $F^\perp$.
Pour tout $\varepsilon \in \{-1,1\}^n$, on note :

$$\delta_\varepsilon = \begin{cases} +\infty \text{ si } H_\varepsilon \cap F = \emptyset \\ d(0, H_\varepsilon \cap F) \text{ si } H_\varepsilon \cap F \neq \emptyset \end{cases}$$

où $d(0, H_\varepsilon \cap F)$ est la distance euclidienne du vecteur nul à $H_\varepsilon \cap F$.
On utilise la convention $\frac{1}{+\infty} = 0$.

(a) Justifier, dans le cas où $H_\varepsilon \cap F \neq \emptyset$, l'existence d'un vecteur $x \in E$ tel que $\delta_\varepsilon = \|x\|_2$.

(b) Précisément, dans le cas où $H_\varepsilon \cap F \neq \emptyset$, montrer que :

$$x = \sum_{i=1}^{n-r} \lambda_i a_i + \lambda e_\varepsilon$$

où :

$$\lambda = \frac{1}{\sqrt{n}\left(1 - \sum_{i=1}^{n-r} \langle a_i \mid e_\varepsilon \rangle^2\right)}$$

et :

$$\lambda_i = -\lambda \langle a_i \mid e_\varepsilon \rangle \ (1 \leq i \leq n-r)$$

(c) Montrer, dans tous les cas, que :

$$\frac{1}{\delta_\varepsilon^2} = n\left(1 - \sum_{i=1}^{n-r} \langle a_i \mid e_\varepsilon \rangle^2\right)$$

(d) Montrer que :

$$\frac{1}{2^n} \sum_{\varepsilon \in \{-1,1\}^n} \frac{1}{\delta_\varepsilon^2} = r$$

(e) Déduire de ce qui précède que :

$$\sqrt{r} \leq \max_{x \in F \setminus \{0\}} \frac{\|x\|_1}{\|x\|_2}$$

– III – Normes sur ℓ^1

On désigne par ℓ^1 l'ensemble des suites réelles $x = (x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ telles que la série $\sum x_n$ soit absolument convergente.
On note $\|\cdot\|_1$ la norme sur ℓ^1 définie par :

$$\forall x = (x_n)_{n \in \mathbb{N}} \in \ell^1, \ \|x\|_1 = \sum_{n=0}^{+\infty} |x_n|$$

1. Montrer que ℓ^1 est un espace vectoriel.
2. Montrer que pour toutes suites $x = (x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $y = (y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ dans ℓ^1, la série $\sum x_n y_n$ est absolument convergente et que l'application :

$$(x, y) \mapsto \langle x \mid y \rangle = \sum_{n=0}^{+\infty} x_n y_n$$

définit un produit scalaire sur E. On note $\|\cdot\|_2$ la norme associée.
3. Les normes $\|\cdot\|_1$ et $\|\cdot\|_2$ sont-elles équivalentes sur ℓ^1 ?
4. Montrer que $(\ell^1, \|\cdot\|_1)$ est complet.
5. L'espace $(\ell^1, \|\cdot\|_2)$ est-il complet ?
6. Pour tout entier $n \in \mathbb{N}$, on désigne par π_n l'application qui à $x = (x_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \ell^1$ associe le réel $\pi_n(x) = x_n$. Montrer que les applications π_n sont des formes linéaires continues sur $(\ell^1, \|\cdot\|_1)$ et sur $(\ell^1, \|\cdot\|_2)$.
7. Une forme linéaire ℓ sur ℓ^1 qui est continue pour $\|\cdot\|_1$, est-elle combinaison linéaire de π_n ?
8. Étudier, du point de vue algébrique et topologique, l'application $*$ définie sur $\ell^1 \times \ell^1$ par :

$$\forall n \in \mathbb{N},\ (x * y)_n = \sum_{k=0}^{n} x_k y_{n-k}$$

Les deux questions qui suivent sont difficiles.
9. On désigne par $\mathcal{F}(\mathbb{N}, \mathbb{R})$ l'ensemble des suites réelles et pour tout entier $n \geq 0$, on note $S_n = \{0, 1, \cdots, n\}$.
Montrer que si $\left(x^{(k)}\right)_{1\leq k\leq p}$ est une famille libre dans $\mathcal{F}(\mathbb{N}, \mathbb{R})$, il existe alors un entier n_0 tel que la famille $\left(x^{(k)}{}_{|S_n}\right)_{1\leq k\leq p}$ soit libre dans $\mathcal{F}(S_n, \mathbb{R})$, où $\mathcal{F}(S_n, \mathbb{R})$ est l'ensemble des applications de S_n dans $\mathbb{R}$ et, pour toute suite $x \in \mathcal{F}(\mathbb{N}, \mathbb{R})$, $x_{|S_n}$ est la restriction de x à S_n.
10. Soit V un sous-espace vectoriel de ℓ^1. Montrer que s'il existe un réel $\alpha > 0$ tel que :

$$\forall x \in V,\ \|x\|_1 \leq \alpha \|x\|_2$$

l'espace V est alors de dimension finie et $\dim(V) \leq \alpha^2$.

2 Solution

– I – Normes sur l'espace des fonctions polynomiales réelles sur $[0, 1]$

1. Pour tout polynôme $P \in E$ et tout entier $n \geq 1$, on a :

$$|\nu_n(P)| \leq \|P\|_\infty \int_0^1 x^n dx = \frac{\|P\|_\infty}{n+1} \underset{n\to+\infty}{\to} 0$$

2. Comme la suite $(\nu_n(P))_{n\in\mathbb{N}}$ est convergente, elle est bornée et le réel $\nu(P)$ est bien défini.
Il est clair que ν est valeurs positive.
Si $\nu(P) = 0$, on a alors $\nu_n(P) = \displaystyle\int_0^1 P(x) x^n dx = 0$ pour tout, ce qui équivaut du fait de la linéarité de l'intégrale à $\displaystyle\int_0^1 P(x) Q(x) dx = 0$ pour tout $Q \in E$. En particulier, on a

$\int_0^1 P^2(x)\,dx = 0$ et $P = 0$ puisque P^2 est continue positive.
Avec $|\nu_n(\lambda P)| = |\lambda|\,|\nu_n(P)|$ et :

$$\begin{aligned}|\nu_n(P+Q)| &= \left|\int_0^1 (P(x)+Q(x))\,x^n dx\right| \\ &= \left|\int_0^1 P(x)\,x^n dx + \int_0^1 Q(x)\,x^n dx\right| \\ &\leq \left|\int_0^1 P(x)\,x^n dx\right| + \left|\int_0^1 Q(x)\,x^n dx\right| = |\nu_n(P)| + |\nu_n(Q)|\end{aligned}$$

pour tout $n \in \mathbb{N}$, P, Q dans E et $\lambda \in \mathbb{R}$, on déduit que $\nu(\lambda P) = |\lambda|\,\nu(P)$ et $\nu(P+Q) \leq \nu(P) + \nu(Q)$.
En définitive, ν est une norme sur E.

3. Si $\nu(P) = 0$, on a alors $P = 0$ et $n_0 = 0$ (ou n'importe quel entier) convient.
   Si $\nu(P) > 0$, comme $\lim\limits_{n\to+\infty} \nu_n(P) = 0$, il existe un entier $r \geq 0$ tel que :
   $$\forall n > r,\ 0 \leq |\nu_n(P)| \leq \frac{\nu(P)}{2}$$
   et :
   $$\nu(P) = \sup_{0\leq n\leq r} |\nu_n(P)|$$
   est atteint (c'est le plus grand élément d'un ensemble fini).
4. On a :
   $$|\nu_n(P)| = \left|\int_0^1 P(x)\,x^n dx\right| \leq \int_0^1 |P(x)|\,dx = \|P\|_1$$
   En utilisant l'inégalité de Cauchy-Schwarz, on a :
   $$\|P\|_1 = \int_0^1 |P(x)| \cdot 1dx \leq \|P\|_2\,\|1\|_2 = \|P\|_2$$
   Enfin :
   $$\|P\|_2^2 = \int_0^1 |P(x)|^2\,dx \leq \|P\|_\infty^2$$
   est clair.
5.
   (a) L'égalité $\|P\|_1 = \|P\|_2$ est réalisée si, et seulement si, il y a égalité dans l'inégalité de Cauchy-Schwarz $\langle |P| \mid 1\rangle \leq \|P\|_2\,\|1\|_2$, ce qui équivaut à dire qu'il existe un réel λ tel que $|P| = \lambda \cdot 1 = \lambda$. Si $\lambda = 0$, on a alors $P = 0$, sinon le théorème des valeurs intermédiaires nous dit que $P = \lambda$ ou $P = -\lambda$.
   Dans tous les cas, $\|P\|_1 = \|P\|_2$ si, et seulement si, P est constant.
   (b) L'égalité $\|P\|_2 = \|P\|_\infty$ est réalisée si, et seulement si :
   $$\int_0^1 \left(\|P\|_\infty^2 - |P(x)|^2\right) dx = 0$$
   la fonction $\|P\|_\infty^2 - |P(x)|^2$ étant positive continue, ce qui équivaut à $|P| = \|P\|_\infty$ et P est constante.

(c) Si $P=0$, on a bien $\nu(P)=\|P\|_1$.
Soit $P\neq 0$ tel que $\nu(P)=\|P\|_1$.
Comme il existe un entier $n_0\in\mathbb{N}$ tel que $\nu(P)=|\nu_{n_0}(P)|$, l'égalité $\nu(P)=\|P\|_1$ se traduit par :

$$\int_0^1 |P(x)|\,dx=\left|\int_0^1 P(x)\,x^{n_0}dx\right|$$

Si $n_0=0$, cela signifie que :

$$\left|\int_0^1 P(x)\,dx\right|=\int_0^1 |P(x)|\,dx$$

soit :

$$\int_0^1 P(x)\,dx=\pm\int_0^1 |P(x)|\,dx$$

ou encore :

$$\int_0^1 (|P(x)|\pm P(x))\,dx=0$$

la fonction $|P|\pm P$ étant continue positive, ce qui équivaut à $P=\pm|P|$ et P a un signe constant.
Si $n_0\geq 1$, on a :

$$\int_0^1 |P(x)|\,dx=\left|\int_0^1 P(x)\,x^{n_0}dx\right|\leq\int_0^1 |P(x)|\,x^{n_0}dx$$

soit :

$$\int_0^1 (1-x^{n_0})\,|P(x)|\,dx\leq 0$$

et comme on a aussi $\displaystyle\int_0^1 (1-x^{n_0})\,|P(x)|\,dx\geq 0$, il en résulte que :

$$\int_0^1 (1-x^{n_0})\,|P(x)|\,dx=0$$

ce qui équivaut à $(1-x^{n_0})\,|P(x)|=0$ pour tout $x\in[0,1]$, puisque cette fonction est continue positive, donc $P(x)=0$ pour tout $x\in[0,1[$ puisque $1-x^{n_0}>0$ pour $n_0\geq 1$ et $x\in[0,1[$. Par continuité, on en déduit que $P=0$ sur $[0,1]$.
En définitive, si $\nu(P)=\|P\|_1$, la fonction polynomiale P est de signe constant sur $[0,1]$.
Réciproquement si P est de signe constant sur $[0,1]$, on a alors en supposant $P\geq 0$ (on s'y ramène en remplçant P par $-P$) :

$$\|P\|_1=\int_0^1 P(x)\,dx\leq\nu(P)$$

et $\nu(P)=\|P\|_1$ puisqu'on a toujours l'autre inégalité.

6.

(a) Avec les inégalités (1), il nous suffit de vérifier que $(P_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est de Cauchy dans $(E,\|\cdot\|_\infty)$.
Pour $m>n\geq 0$ et $x\in[0,1]$, on a :

$$0\leq P_m(x)-P_n(x)=\sum_{k=n+1}^{m}\frac{x^k}{k!}\leq\sum_{k=n+1}^{+\infty}\frac{1}{k!}$$

donc :

$$\|P_m - P_n\|_\infty \leq \sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{1}{k!} \underset{n\to+\infty}{\to} 0$$

et $(P_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est de Cauchy dans $(E, \|\cdot\|_\infty)$, donc dans (E, N).

(b) Avec les inégalités (1), il nous suffit de vérifier que $(P_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est divergente dans dans (E, ν) pour montrer qu'elle diverge dans chacun des (E, N) et aucun de ces espaces n'est de Banach.

Supposons que $(P_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers $P \in E$ dans (E, ν). On a alors $\lim\limits_{n\to+\infty} \nu(P_n - P) = 0$ et avec :

$$0 \leq \nu_k(P_n - P) \leq \nu(P_n - P)$$

pour tout entier naturel k, on déduit que :

$$\forall k \in \mathbb{N}, \ \lim_{n\to+\infty} \nu_k(P_n - P) = 0$$

et :

$$\forall k \in \mathbb{N}, \ \lim_{n\to+\infty} \int_0^1 (P_n(x) - P(x))\, x^k dx = 0$$

Sachant que la suite $(P_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge uniformément vers la fonction exponentielle sur $[0,1]$ (c'est une série entière de rayon de convergence infinie), on en déduit que :

$$\forall k \in \mathbb{N}, \ \int_0^1 (e^x - P(x))\, x^k dx = 0$$

et par linéarité de l'intégrale :

$$\forall Q \in E, \ \int_0^1 (e^x - P(x))\, Q(x)\, dx = 0$$

Prenant pour polynômes Q les polynômes P_n, on a :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \ \int_0^1 (e^x - P(x))\, P_n(x)\, dx = 0$$

et faisant tendre n vers l'infini, par convergence uniforme, on a :

$$\int_0^1 (e^x - P(x))\, e^x dx = 0$$

qui combiné avec $\displaystyle\int_0^1 (e^x - P(x))\, P(x)\, dx = 0$ nous donne $\displaystyle\int_0^1 (e^x - P(x))^2\, dx = 0$ et $\exp = P \in E$, ce qui n'est pas (sinon $P^{(k)}(0) = 1$ pour tout entier $k \geq 0$, avec P polynomiale, ce qui n'est pas possible).

On aurait aussi pu utiliser le théorème des moments qui nous dit si une fonction $f \in \mathcal{C}^0([0,1])$ est telle que $\displaystyle\int_0^1 f(x)\, x^k dx = 0$ pour tout entier $k \geq 0$, c'est alors la fonction nulle (c'est une conséquence du théorème de Stone-Weierstrass).

Remarque : en utilisant le théorème de Baire, on peut montrer qu'un espace de Banach de dimension infinie ne peut avoir de base dénombrable, ce qui résout la question immédiatement.

7. Supposons que N_1 et N_2 sur E soient équivalentes. Si $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite d'éléments de E qui est de Cauchy dans (E, N_1) [resp. dans (E, N_2)], avec :

$$0 \leq N_2(x_m - x_n) \leq \beta N_1(x_m - x_n)$$

$$\text{resp. } 0 \leq N_1(x_m - x_n) \leq \frac{1}{\alpha} N_2(x_m - x_n)$$

on déduit que $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est de Cauchy dans (E, N_2) [resp. dans (E, N_1)].
Donc $(a) \Rightarrow (b)$.
Supposons (b) vérifiée et soit $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite convergente dans (E, N_1) vers $x \in E$. On lui associe la suite $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par $y_{2n} = x_n$ et $y_{2n+1} = x$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. La suite $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers x dans (E, N_1), elle est donc de Cauchy dans (E, N_1) et aussi dans (E, N_2) si (b) est vérifié. Pour tout $\varepsilon > 0$, on peut donc trouver un entier n_0 tel que pour tous p, q supérieurs à n_0 on ait $N_2(y_q - y_p) < \varepsilon$, ce qui nous donne :

$$\forall n \geq \frac{n_0}{2},\ N_2(y_{2n+1} - y_{2n}) = N_2(x - x_n) < \varepsilon$$

et signifie que $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers x dans (E, N_1).
Donc $(b) \Rightarrow (c)$.
Supposons (c) vérifiée. Il s'agit de montrer que les fonctions $\frac{N_1}{N_2}$ et $\frac{N_2}{N_1}$ sont majorées sur $E \setminus \{0\}$. Si $\frac{N_1}{N_2}$ n'est pas majorée (la démonstration est analogue pour $\frac{N_2}{N_1}$), pour tout entier $n \geq 1$, il existe $x_n \in E \setminus \{0\}$ tel que $\frac{N_1(x_n)}{N_2(x_n)} \geq n^2$. En désignant par $(y_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ la suite définie par $y_n = \frac{n}{N_1(x_n)} x_n$, on a :

$$N_1(y_n) = n \underset{n\to+\infty}{\to} +\infty$$

et :

$$0 \leq N_2(y_n) \leq \frac{1}{n^2} N_1(y_n) = \frac{1}{n} \underset{n\to+\infty}{\to} 0$$

donc $\lim\limits_{n\to+\infty} y_n = 0$ dans (E, N_2) et $(y_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ doit converger dans (E, N_1) si (c) est vérifié, ce qui est incompatible avec $(N_1(y_n))_{n\in\mathbb{N}}$ non bornée.
8. Résulte immédiatement de ce qui précède.
9.
   (a) Soit $(P_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite d'éléments de E définie par $P_n(x) = x^n$ pour tout $n \in \mathbb{N}$ et tout $x \in [0, 1]$.
   Avec $\|P_n\|_1 = \frac{1}{n+1}$ et $\|P_n\|_2 = \frac{1}{\sqrt{2n+1}}$, on voit que $(P_n)_{n\in\mathbb{N}}$ tend vers 0 dans E muni de $\|\cdot\|_1$ et $\|\cdot\|_2$ et avec $\|P_n\|_\infty = 1$, on voit que ce n'est pas le cas pour $\|\cdot\|_\infty$.
   Donc $\|\cdot\|_1$ et $\|\cdot\|_\infty$ [resp. $\|\cdot\|_2$ et $\|\cdot\|_\infty$] ne sont pas équivalentes.
   (b) En utilisant l'exemple précédent, on a :

$$\frac{\|P_n\|_2}{\|P_n\|_1} = \sqrt{2n+1}$$

   donc la fonction $\frac{\|\cdot\|_2}{\|\cdot\|_1}$ n'est pas majorée sur $E \setminus \{0\}$ et les normes $\|\cdot\|_1$ et $\|\cdot\|_2$ ne sont pas équivalentes.

(c) Avec $\nu \leq \|\cdot\|_1 \leq \|\cdot\|_2 \leq \|\cdot\|_\infty$, on déduit qu'une suite convergente pour $\|\cdot\|_\infty$ converge toujours vers $\|\cdot\|_1$ et l'équivalence entre ν et $\|\cdot\|_\infty$ entraînerait qu'une suite convergente pour $\|\cdot\|_1$, va converger vers ν, donc vers $\|\cdot\|_\infty$, ce qui contredit la non équivalence de $\|\cdot\|_1$ et $\|\cdot\|_\infty$.
De manière analogue, on voit que ν et $\|\cdot\|_2$ ne sont pas équivalentes.

10.

(a) C'est du cours et valable pour toute forme linéaire ℓ sur E.
Si ℓ est continue sur E, elle est alors continue en 0 et il existe un réel $\eta > 0$ tel que :

$$P \in E,\ \|P\| \leq \eta \Rightarrow |\ell(P)| = |\ell(P) - \ell(0)| \leq 1$$

Pour tout $P \in E \setminus \{0\}$, on a $\left\| \frac{\eta}{\|P\|} P \right\| = \eta$ et $\left| \ell\left(\frac{\eta}{\|P\|} P \right) \right| \leq 1$ revient à dire que $|\ell(P)| \leq M \|P\|$ avec $M = \frac{1}{\eta}$, ce qui est encore valable pour $P = 0$.
Réciproquement s'il existe $M > 0$ tel que $|\ell(P)| \leq M \|P\|$ pour tout $P \in E$, l'application linéaire ℓ est lipschitzienne, donc continue et même uniformément continue.

(b) Soit $\|\cdot\|$ l'application définie sur E par :

$$\forall P \in E,\ \|P\| = \sum_{n=0}^{+\infty} \left| P^{(n)}(0) \right|$$

Comme $P^{(n)}$ pour n assez grand, cette application est bien définie. Elle est à valeurs positives et $\|\lambda P\| = |\lambda| \|P\|$, $\|P + Q\| \leq \|P\| + \|Q\|$ pour tous $\lambda \in \mathbb{R}$ et P, Q dans E. En utilisant la formule de Taylor pour les polynômes, on voit que $\|P\| = 0$ si, et seulement si, $P = 0$. Donc $\|\cdot\|$ est une norme sur E.
Pour tout $\alpha \in [0, 1]$ et tout $P \in E$, on peut écrire en utilisant la formule de Taylor pour les polynômes que :

$$|\ell_\alpha(P)| = |P(\alpha)| = \left| \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{P^{(n)}(0)}{n!} \alpha^n \right| \leq \sum_{n=0}^{+\infty} \left| P^{(n)}(0) \right| = \|P\|$$

(on peut aussi prendre $\alpha \in \mathbb{R}$ et avec $\lim\limits_{n \to +\infty} \frac{\alpha^n}{n!}$, on déduit que la suite $\left(\frac{\alpha^n}{n!} \right)_{n \in \mathbb{N}}$ est bornée, donc $|\ell_\alpha(P)| \leq M_\alpha \|P\|$ avec $M_\alpha = \sup\limits_{n \in \mathbb{N}} \frac{|\alpha|^n}{n!}$).

(c) Avec $|\ell_\alpha(P)| = |P(\alpha)| \leq \|P\|_\infty$, on déduit que $C_{\|\cdot\|_\infty} = [0, 1]$.
Supposons qu'il existe $\alpha \in [0, 1]$ tel que ℓ_α soit continue pour $\|\cdot\|_1$.
Il existe alors $M_\alpha > 0$ tel que $|\ell_\alpha(P)| \leq M_\alpha \|P\|_1$ pour tout $P \in E$.
Prenant $P = 1$, on déduit que $M_\alpha \geq 1$.
Le théorème de Stone-Weierstrass nous dit que pour toute fonction $f \in \mathcal{C}^0([0, 1])$, il existe une suite $(P_n)_{n \in \mathbb{N}}$ dans E qui converge uniformément vers f sur $[0, 1]$. On a alors $\lim\limits_{n \to +\infty} \ell_\alpha(P_n) = \lim\limits_{n \to +\infty} P_n(\alpha) = f(\alpha)$ (convergence simple) et $\lim\limits_{n \to +\infty} \|P_n\|_1 = \|f\|_1$ (conséquence de la convergence uniforme) et en conséquence :

$$\begin{aligned} |f(\alpha)| &= \lim_{n \to +\infty} |\ell_\alpha(P_n)| \leq M_\alpha \lim_{n \to +\infty} \|P_n\|_1 \\ &\leq M_\alpha \|f\|_1 = M_\alpha \int_0^1 |f(x)|\, dx \end{aligned}$$

Mais pour $f \in \mathcal{C}^0([0,1])$ affine par morceaux telle que $f(x) = 0$ pour $x \notin [0,1] \cap \left[\alpha - \frac{1}{4M_\alpha}, \alpha + \frac{1}{4M_\alpha}\right]$, $f(\alpha) = 1$ et f affine sur $[0,1] \cap \left[\alpha - \frac{1}{4M_\alpha}, \alpha\right]$ et $[0,1] \cap \left[\alpha, \alpha + \frac{1}{4M_\alpha}\right]$ (faire un dessin), cela donne :

$$|f(\alpha)| = 1 \leq M_\alpha \int_0^1 |f(x)|\, dx \leq M_\alpha \frac{1}{4M_\alpha} = \frac{1}{4}$$

ce qui est faux.
On a donc $C_{\|\cdot\|_1} = \emptyset$.
On voit de même que $C_{\|\cdot\|_2} = \emptyset$.
Avec $\nu \leq \|\cdot\|_1$, on déduit que $C_\nu \subset C_{\|\cdot\|_1}$ et $C_\nu = \emptyset$.

11.

(a) Comme $P^{(n)}$ pour n assez grand, l'application N_1 est bien définie. Elle est à valeurs positives et $N_1(\lambda P) = |\lambda| N_1(P)$, $N_1(P+Q) \leq N_1(P) + N_1(Q)$ pour tous $\lambda \in \mathbb{R}$ et P, Q dans E.
Si $N_1(P) = 0$, on a alors $P^{(n)}(n) = 0$ pour tout entier $n \geq 0$.
Montrons, par récurrence sur $p \geq 0$, que si $P \in \mathbb{R}_p[X]$ est tel que $P^{(n)}(n) = 0$ pour tout entier $n \geq 0$, on a alors $P = 0$.
Pour $p = 0$, c'est clair.
Supposons le sultat acquis au rang $p - 1 \geq 0$ et soit $P \in \mathbb{R}_p[X]$ tel que $P^{(n)}(n) = 0$ pour tout entier $n \geq 0$. Le polynôme $Q(X) = P'(X+1)$ est dans $\mathbb{R}_{p-1}[X]$ avec $Q^{(n)}(n) = P^{(n+1)}(n+1) = 0$ pour tout $n \geq 0$, donc $Q = 0$ et P est constant égal à $P(0) = 0$.
On peut aussi procéder comme suit.
L'application $\varphi_p : P \mapsto \left(P(0), P'(1), \cdots, P^{(p)}(p)\right)$ est linéaire de $\mathbb{R}_p[X]$ dans $\mathbb{R}^{p+1}$ et sa matrice dans la base canonique est :

$$A_p = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & 2 & \cdots & p \\ 0 & 0 & 2! & \cdots & p(p-1)2^{p-2} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & p!(p-1) \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & p! \end{pmatrix}$$

Comme $\det(A_p) \neq 0$, cette application réalise un isomrphisme de $\mathbb{R}_p[X]$ sur $\mathbb{R}^{p+1}$ et en particulier, $N_1(P) = 0$ qui équivaut à $\varphi_p(P) = 0$ nous donne $P = 0$.
L'application N_1 est donc une norme sur E.
L'application $t \mapsto P(e^{2i\pi t})$ étant continue sur le segment $[0,1]$ y est bornée et atteint ses bornes, donc N_2 est bien définie. Cette application est à valeurs positives avec $N_2(\lambda P) = |\lambda| N_2(P)$, $N_2(P+Q) \leq N_2(P) + N_2(Q)$ pour tous $\lambda \in \mathbb{R}$ et P, Q dans E.
Si $N_2(P) = 0$, on a alors $P(e^{2i\pi t}) = 0$ pour tout $t \in [0,1]$ et P a une infinité de racines sur le cercle unité du plan complexe, c'est donc le polynôme nul.
L'application N_2 est donc bien une norme sur E.

(b) En utilisant les isomorphismes φ_n de la question précédente, on peut construire une suite $(P_n)_{n\in\mathbb{N}}$ d'éléments de E telle que :

$$\forall n \in \mathbb{N},\ P_n \in \mathbb{R}_n[X] \text{ et } \forall k \in \{0, \cdots, n\},\ P_n^{(k)}(k) = \frac{1}{2^k}$$

Pour $m > n \geq 0$, on a :

$$N_1 (P_m - P_n) = \sum_{k=0}^{+\infty} \left| P_m^{(k)} (k) - P_n^{(k)} (k) \right|$$
$$= \sum_{k=n+1}^{m} P_m^{(k)} (k) = \sum_{k=n+1}^{m} \frac{1}{2^k} \leq \sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{1}{2^k} \underset{n \to +\infty}{\to} 0$$

ce qui signifie que la suite $(P_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est de Cauchy dans (E, N_1).
Supposons qu'elle converge dans (E, N_1) vers un polynôme P. Avec $\left| P^{(k)} (k) - P_n^{(k)} (k) \right| \leq N_1 (P - P_n)$ pour tout entier $k \geq 0$, on déduit que :

$$\forall k \in \mathbb{N}, \ \lim_{n \to +\infty} P_n^{(k)} (k) = P^{(k)} (k)$$

Mais, pour k fixé et tout $n \geq k$, on a $P_n^{(k)} (k) = \dfrac{1}{2^k}$, c'est-à-dire que la suite $\left(P_n^{(k)} (k) \right)_{n \in \mathbb{N}}$ est stationnaire sur $\dfrac{1}{2^k}$ à partir du rang k et :

$$\forall k \in \mathbb{N}, \ P^{(k)} (k) = \frac{1}{2^k} \neq 0$$

ce qui est impossible.
La suite $(P_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est donc divergente dans (E, N_1) et (E, N_1) n'est pas complet.

(c) Soit $(P_n)_{n \in \mathbb{N}}$ la suite de fonctions polynomiales définie par :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \ \forall x \in [0, 1], \ P_n (x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{x^k}{k!}$$

Pour $m > n \geq 0$ et $t \in [0, 1]$, on a :

$$\left| P_m \left(e^{2i\pi t} \right) - P_n \left(e^{2i\pi t} \right) \right| = \left| \sum_{k=n+1}^{m} \frac{e^{2i\pi kt}}{k!} \right| \leq \sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{1}{k!}$$

donc :

$$N_2 (P_m - P_n) = \sup_{t \in [0,1]} \left| P_m \left(e^{2i\pi t} \right) - P_n \left(e^{2i\pi t} \right) \right| \leq \sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{1}{k!} \underset{n \to +\infty}{\to} 0$$

et la suite $(P_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est de Cauchy dans (E, N_2).
Supposons qu'elle converge dans (E, N_2) vers un polynôme P. Avec $\left| P \left(e^{2i\pi t} \right) - P_n \left(e^{2i\pi t} \right) \right| \leq N_2 (P - P_n)$ pour tout $t \in [0, 1]$, on déduit que :

$$\forall t \in [0, 1], \ \lim_{n \to +\infty} P_n \left(e^{2i\pi t} \right) = P \left(e^{2i\pi t} \right)$$

Mais on a aussi $\lim\limits_{n \to +\infty} P_n \left(e^{2i\pi t} \right) = \exp \left(e^{2i\pi t} \right)$, donc :

$$P \left(e^{2i\pi t} \right) = \exp \left(e^{2i\pi t} \right)$$

soit $P(z) = e^z$ pour tout z sur le cercle unité complexe et $P \neq 0$.
En désignant par p le degré de P et en tenant compte de :

$$\int_0^1 e^{2i\pi kt} dt = 0$$

pour tout $k \in \mathbb{Z}$, on a pour tout entier $n > p$:

$$\int_0^1 P\left(e^{2i\pi t}\right) e^{-2i\pi nt} dt = 0$$

et :

$$\int_0^1 \exp\left(e^{2i\pi t}\right) e^{-2i\pi nt} dt = \sum_{k=0}^{+\infty} \int_0^1 \frac{1}{k!} e^{2i(k-n)\pi t} dt = \frac{1}{p!} \neq 0$$

(convergence uniforme ou coefficients de Fourier), soit une impossibilité.
Donc (E, N_2) n'est pas complet.

– II – Un résultat de géométrie euclidienne

1.

(a) L'application $\varphi_\varepsilon : x \mapsto \langle x \mid e_\varepsilon \rangle$ étant une forme linéaire sur E, l'ensemble $H_\varepsilon = \varphi_\varepsilon^{-1}\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right)$ est un hyperplan affine de direction $\ker(\varphi_\varepsilon) = (\mathbb{R}e_\varepsilon)^\perp$.
Comme φ_ε est une forme linéaire non nulle, elle est surjective, donc H_ε est non vide et pour x_0 fixé dans H_ε, un vecteur $x \in E$ est dans H_ε si, et seulement si, $x - x_0 \in \ker(\varphi_\varepsilon)$, donc $H_\varepsilon = x_0 + \ker(\varphi_\varepsilon)$.

(b) Si $x = \sum_{i=1}^{n} x_i e_i \in S^1$, on a alors $\sum_{i=1}^{n} |x_i| = 1$ et en désignant pour tout i compris entre 1 et n par ε_i le signe de x_i (avec la convention $\operatorname{sgn}(0) = 1$), on a :

$$\langle x \mid e_\varepsilon \rangle = \frac{1}{\sqrt{n}} \sum_{i=1}^{n} x_i \varepsilon_i = \frac{1}{\sqrt{n}} \sum_{i=1}^{n} |x_i| = \frac{1}{\sqrt{n}}$$

et $x \in H_\varepsilon$.

2.

(a) En supposant que $H_\varepsilon \cap F \neq \emptyset$, on se donne par x_0 dans $H_\varepsilon \cap F$. On a :

$$H_\varepsilon \cap F = (x_0 + \ker(\varphi_\varepsilon)) \cap F = x_0 + \ker(\varphi_\varepsilon) \cap F$$

et :

$$\begin{aligned} d(0, H_\varepsilon \cap F) &= \inf_{z \in H_\varepsilon \cap F} \|z\|_2 = \inf_{y \in \ker(\varphi_\varepsilon) \cap F} \|x_0 - y\|_2 \\ &= d(x_0, \ker(\varphi_\varepsilon) \cap F) = \left\|x_0 - p_{\ker(\varphi_\varepsilon) \cap F}(x_0)\right\|_2 \end{aligned}$$

où $p_{\ker(\varphi_\varepsilon) \cap F}(x_0) \in \ker(\varphi_\varepsilon) \cap F$ est la projection orthogonale de x_0 sur $\ker(\varphi_\varepsilon) \cap F$ ($x_0 - p_{\ker(\varphi_\varepsilon) \cap F}(x_0)$ est unique et c'est la projection orthogonale de 0 sur $H_\varepsilon \cap F$).
On a donc $\delta_\varepsilon = d(0, H_\varepsilon \cap F) = \|x\|_2$ avec :

$$x = x_0 - p_{\ker(\varphi_\varepsilon) \cap F}(x_0) \in (\ker(\varphi_\varepsilon) \cap F)^\perp$$

et :

$$\begin{aligned} (\ker(\varphi_\varepsilon) \cap F)^\perp &= (\ker(\varphi_\varepsilon))^\perp + F^\perp = \left((\mathbb{R}e_\varepsilon)^\perp\right)^\perp + F^\perp \\ &= \mathbb{R}e_\varepsilon + F^\perp \end{aligned}$$

(b) Le vecteur $x \in H_\varepsilon \cap F$ s'écrit donc :

$$x = \sum_{i=1}^{n-r} \lambda_i a_i + \lambda e_\varepsilon$$

Comme $x \in F$ et $(a_i)_{1 \leq i \leq n-r}$ est une base orthonormée de $F^\perp$, on a :

$$\langle x \mid a_i \rangle = \lambda_i + \lambda \langle e_\varepsilon \mid a_i \rangle = 0 \ \ (1 \leq i \leq n-r)$$

donc :

$$\lambda_i = -\lambda \langle a_i \mid e_\varepsilon \rangle \ \ (1 \leq i \leq n-r)$$

et comme $x \in H_\varepsilon$, on a :

$$\langle x \mid e_\varepsilon \rangle = \sum_{i=1}^{n-r} \lambda_i \langle a_i \mid e_\varepsilon \rangle + \lambda = \frac{1}{\sqrt{n}}$$

soit :

$$\lambda \left(1 - \sum_{i=1}^{n-r} \langle e_\varepsilon \mid a_i \rangle^2 \right) = \frac{1}{\sqrt{n}}$$

ce qui impose $\displaystyle\sum_{i=1}^{n-r} \langle e_\varepsilon \mid a_i \rangle^2 \neq 1$ et :

$$\lambda = \frac{1}{\sqrt{n} \left(1 - \sum\limits_{i=1}^{n-r} \langle a_i \mid e_\varepsilon \rangle^2 \right)}$$

(c) Pour $H_\varepsilon \cap F \neq \emptyset$, on a donc :

$$\begin{aligned} \delta_\varepsilon^2 = \|x\|_2^2 &= \left\langle x \mid \sum_{i=1}^{n-r} \lambda_i a_i + \lambda e_\varepsilon \right\rangle = \lambda \langle x \mid e_\varepsilon \rangle \\ &= \frac{\lambda}{\sqrt{n}} = \frac{1}{n \left(1 - \sum\limits_{i=1}^{n-r} \langle a_i \mid e_\varepsilon \rangle^2 \right)} \end{aligned}$$

$(x \in H_\varepsilon \cap F)$.

Pour $H_\varepsilon \cap F = \emptyset$, on a $e_\varepsilon \in F^\perp$ (sinon il existe $y \in F$ tel que $\alpha = \langle y \mid e_\varepsilon \rangle \neq 0$ et $\left\langle \dfrac{1}{\alpha\sqrt{n}} y \mid e_\varepsilon \right\rangle = \dfrac{1}{\sqrt{n}}$, donc $\dfrac{1}{\alpha\sqrt{n}} y \in H_\varepsilon \cap F$ et cela se voit sur un dessin), donc :

$$\sum_{i=1}^{n-r} \langle a_i \mid e_\varepsilon \rangle^2 = \|e_\varepsilon\|_2^2 = 1$$

et :

$$\frac{1}{\delta_\varepsilon^2} = 0 = n \left(1 - \sum_{i=1}^{n-r} \langle a_i \mid e_\varepsilon \rangle^2 \right)$$

(d) Comme $\operatorname{card}\left(\{-1, 1\}^n\right) = 2^n$, on a :

$$\begin{aligned} \sum_{\varepsilon \in \{-1,1\}^n} \frac{1}{\delta_\varepsilon^2} &= n \sum_{\varepsilon \in \{-1,1\}^n} \left(1 - \sum_{i=1}^{n-r} \langle a_i \mid e_\varepsilon \rangle^2 \right) \\ &= n2^n - n \sum_{\varepsilon \in \{-1,1\}^n} \left(\sum_{i=1}^{n-r} \langle a_i \mid e_\varepsilon \rangle^2 \right) \end{aligned}$$

Dans la base orthonormée $\mathcal{B} = (e_i)_{1\leq i\leq n}$, on a :

$$a_i = \sum_{j=1}^{n} a_{ij} e_j \text{ et } e_\varepsilon = \frac{1}{\sqrt{n}} \sum_{j=1}^{n} \varepsilon_j e_j$$

donc :

$$\begin{aligned}\langle a_i \mid e_\varepsilon\rangle^2 &= \frac{1}{n}\left(\sum_{j=1}^{n} a_{ij}\varepsilon_j\right)^2 = \frac{1}{n}\left(\sum_{j=1}^{n} a_{ij}^2 + 2\sum_{1\leq j<k\leq n}^{n} a_{ij}a_{ik}\varepsilon_j\varepsilon_k\right)\\ &= \frac{1}{n}\left(1 + 2\sum_{1\leq j<k\leq n}^{n} a_{ij}a_{ik}\varepsilon_j\varepsilon_k\right)\end{aligned}$$

et :

$$\begin{aligned}\sum_{i=1}^{n-r} \langle a_i \mid e_\varepsilon\rangle^2 &= \frac{n-r}{n} + \frac{2}{n}\sum_{i=1}^{n-r}\left(\sum_{1\leq j<k\leq n}^{n} a_{ij}a_{ik}\varepsilon_j\varepsilon_k\right)\\ &= \frac{n-r}{n} + \frac{2}{n}\sum_{1\leq j<k\leq n}^{n} \varepsilon_j\varepsilon_k\left(\sum_{i=1}^{n-r} a_{ij}a_{ik}\right)\end{aligned}$$

En notant $b_{j,k} = \sum\limits_{i=1}^{n-r} a_{ij}a_{ik}$, on a :

$$\sum_{\varepsilon\in\{-1,1\}^n}\left(\sum_{i=1}^{n-r} \langle a_i \mid e_\varepsilon\rangle^2\right) = \frac{n-r}{n}2^n + \frac{2}{n}\sum_{1\leq j<k\leq n}^{n} b_{jk}\sum_{\varepsilon\in\{-1,1\}^n} \varepsilon_j\varepsilon_k$$

avec :

$$\sum_{\varepsilon\in\{-1,1\}^n} \varepsilon_j\varepsilon_k = 0 \ \ (1 \leq j < k \leq n)$$

Par exemple pour $(j,k) = (1,2)$, cette somme est :

$$\sum_{(1,\varepsilon_2,\cdots,\varepsilon_n)} \varepsilon_2 - \sum_{(-1,\varepsilon_2,\cdots,\varepsilon_n)} \varepsilon_2 = 0$$

Il en résulte que :

$$\sum_{\varepsilon\in\{-1,1\}^n}\left(\sum_{i=1}^{n-r} \langle a_i \mid e_\varepsilon\rangle^2\right) = \frac{n-r}{n}2^n$$

et :

$$\sum_{\varepsilon\in\{-1,1\}^n} \frac{1}{\delta_\varepsilon^2} = n2^n - n\frac{n-r}{n}2^n = r2^n$$

(e) On a :

$$r = \frac{1}{2^n}\sum_{\varepsilon\in\{-1,1\}^n} \frac{1}{\delta_\varepsilon^2} \leq \max_{\varepsilon\in\{-1,1\}^n} \frac{1}{\delta_\varepsilon^2}$$

et en conséquence, il existe $\varepsilon \in \{-1,1\}^n$ tel que $\frac{1}{\delta_\varepsilon^2} \geq r$, soit $\delta_\varepsilon^2 \leq \frac{1}{r}$. En désignant par $x = \sum\limits_{i=1}^{n} x_i e_i \in H_\varepsilon \cap F$ la projection orthogonale de 0 sur $H_\varepsilon \cap F$, on a :

$$\|x\|_1 = \sum_{i=1}^{n} |x_i| \geq \sum_{i=1}^{n} x_i\varepsilon_i = \sqrt{n}\,\langle x \mid e_\varepsilon\rangle = 1$$

et :

$$\|x\|_2 = \delta_\varepsilon \leq \frac{1}{\sqrt{r}}$$

ce qui nous donne :

$$\frac{\|x\|_1}{\|x\|_2} \geq \sqrt{r}$$

avec $x \in F \setminus \{0\}$. Il en résulte que :

$$\sup_{x\in F\setminus\{0\}} \frac{\|x\|_1}{\|x\|_2} \geq \sqrt{r}$$

Il reste à prouver que cette borne supérieure est atteinte (c'est un max d'après l'énoncé). Pour ce faire, on remarque, en désignant par S^2 la sphère unité de $(E, \|\cdot\|_2)$, que :

$$\sup_{x\in F\setminus\{0\}} \frac{\|x\|_1}{\|x\|_2} = \sup_{x\in S^2\cap F} \|x\|_1$$

($\dfrac{\|x\|_1}{\|x\|_2} = \dfrac{\|\lambda x\|_1}{\|\lambda x\|_2}$ pour $\lambda = \dfrac{1}{\|x\|_2}$), la fonction $x \mapsto \|x\|_1$ étant continue sur le compact $S^2 \cap F$ (on est en dimension finie), donc la borne supérieure est atteinte.

– III – Normes sur ℓ^1

1. Il s'agit de montrer que ℓ^1 est un sous-espace vectoriel de l'espace $\mathcal{F}(\mathbb{N}, \mathbb{R})$ des suites réelles. La suite nulle est dans ℓ^1 et pour x, y dans ℓ^1, λ dans $\mathbb{R}$, on a $|x_n + \lambda y_n| \leq |x_n| + |\lambda| |y_n|$, donc $\sum_{n=0}^{+\infty} |x_n + y_n| < +\infty$ et $x + \lambda y \in \ell^1$.
2. Si $y \in \ell^1$, on a $\lim_{n\to+\infty} y_n = 0$, donc la suite y est bornée et pour $x \in \ell^1$, on a $|x_n y_n| \leq \|y\|_\infty |x_n|$, ce qui implique l'absolue convergence de $\sum x_n y_n$. On peut donc définir l'application $\langle \cdot \mid \cdot \rangle$. Il est clair que cette application est symétrique, bilinéaire et positive. Enfin l'égalité $\langle x \mid x \rangle = 0$ équivaut à $x_n = 0$ pour tout n, soit à $x = 0$. On a donc un produit scalaire sur E.
3. Pour $x \in \ell^1$ et tout entier $n \geq 0$, on a :

$$\left(\sum_{k=0}^{n} |x_k|\right)^2 = \sum_{k=0}^{n} x_k^2 + 2 \sum_{0\leq j<k\leq} |x_k| |x_j| \geq \sum_{k=0}^{n} x_k^2$$

et faisant tendre n vers l'infini, on en déduit que $\|x\|_1^2 \geq \|x\|_2^2$, soit $\|x\|_1 \geq \|x\|_2$.
Mais il n'est pas possible de trouver une constante $\alpha > 0$ telle que $\|x\|_1 \leq \alpha \|x\|_2$. Si c'était le cas, en considérant pour tout entier $r \geq 1$, la suite $x^{(r)} \in \ell^1$ définie par $x_k^{(r)} = 1$ pour $0 \leq k \leq r - 1$ et $x_k^{(r)} = 0$ pour $k \geq r$, on aurait :

$$\forall r \geq 1,\ \left\|x^{(r)}\right\|_1 = r \leq \left\|x^{(r)}\right\|_2 = \sqrt{r}$$

ce qui impossible.
Ces deux normes ne sont donc pas équivalentes.
4. Soit $\left(x^{(r)}\right)_{r\in\mathbb{N}}$ une suite de Cauchy dans $(\ell^1, \|\cdot\|_1)$.
Avec $\left|x_k^{(s)} - x_k^{(r)}\right| \leq \left\|x^{(s)} - x^{(r)}\right\|_1$ pour tout entier k, on déduit que chaque suite réelle $\left(x_k^{(r)}\right)_{r\in\mathbb{N}}$ est de Cauchy, donc convergente ($\mathbb{R}$ est complet). En note $x_k = \lim_{r\to+\infty} x_k^{(r)}$ pour tout k et

$x = (x_n)_{n\in\mathbb{N}}$.
La suite $\left(x^{(r)}\right)_{r\in\mathbb{N}}$ étant de Cauchy dans $(\ell^1, \|\cdot\|_1)$ y est bornée. Il existe donc un réel $M > 0$ tel que $\left\|x^{(r)}\right\|_1 \leq M$ pour tout $r \geq 0$. Pour tout entier $n \geq 0$, on a alors :

$$\sum_{k=0}^{n} |x_k| = \lim_{r\to+\infty} \sum_{k=0}^{n} \left|x_k^{(r)}\right| \leq \left\|x^{(r)}\right\|_1 \leq M$$

et la série $\sum |x_n|$ est convergente, donc $x \in \ell^1$.
Comme $\left(x^{(r)}\right)_{r\in\mathbb{N}}$ est de Cauchy dans $(\ell^1, \|\cdot\|_1)$, pour tout réel $\varepsilon > 0$, on peut trouver un entier n_ε tel que :

$$\forall s > r \geq n_\varepsilon,\ \left\|x^{(s)} - x^{(r)}\right\|_1 = \sum_{k=0}^{+\infty} \left|x_k^{(s)} - x_k^{(r)}\right| < \varepsilon$$

Pour $s > r \geq n_\varepsilon$ et $n \geq 0$, on a :

$$\sum_{k=0}^{n} \left|x_k^{(s)} - x_k^{(r)}\right| \leq \left\|x^{(s)} - x^{(r)}\right\|_1 < \varepsilon$$

et fait tendre s vers l'infini à $r \geq n_\varepsilon$ fixé, on en déduit que :

$$\sum_{k=0}^{n} \left|x_k - x_k^{(r)}\right| \leq \varepsilon$$

et :

$$\left\|x - x^{(r)}\right\|_1 = \sum_{k=0}^{+\infty} \left|x_k - x_k^{(r)}\right| \leq \varepsilon$$

ce qui sgnifie que la suite $\left(x^{(r)}\right)_{r\in\mathbb{N}}$ converge vers x dans ℓ^1.
L'espace $(\ell^1, \|\cdot\|_1)$ est donc complet.

5. Soit $\left(x^{(r)}\right)_{r\geq 1}$ la suite d'éléments de ℓ^1 définie par $x_k^{(r)} = \dfrac{1}{k+1}$ pour $0 \leq k \leq r-1$ et $x_k^{(r)} = 0$ pour $k \geq r$.
Pour $s > r \geq 1$, on a :

$$\left\|x^{(s)} - x^{(r)}\right\|_2^2 = \sum_{k=r}^{s-1} \frac{1}{(k+1)^2} \leq \sum_{k=r+1}^{+\infty} \frac{1}{k^2} \underset{r\to+\infty}{\to} 0$$

donc $\left(x^{(r)}\right)_{r\geq 1}$ est de Cauchy dans $(\ell^1, \|\cdot\|_2)$.
Supposons qu'elle converge vers $x \in \ell^1$, soit :

$$\lim_{r\to+\infty} \left\|x - x^{(r)}\right\|_2^2 = \sum_{k=0}^{+\infty} \left(x_k - x_k^{(r)}\right)^2 = 0$$

avec $\displaystyle\sum_{k=0}^{+\infty} |x_k| < +\infty$. Tenant compte de $\left|x_k - x_k^{(r)}\right| \leq \left\|x - x^{(r)}\right\|_2$, on déduit que $\displaystyle\lim_{r\to+\infty} \left|x_k - x_k^{(r)}\right| = 0$ pour tout $k \geq 0$, soit $\displaystyle\lim_{r\to+\infty} x_k^{(r)} = x_k$ avec $x_k^{(r)} = \dfrac{1}{k+1}$ pour $r \geq k+1$, ce qui signifie que $x_k = \dfrac{1}{k+1}$ pour tout $k \geq 0$, mais contredit le fait $x \in \ell^1$ et $\displaystyle\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{1}{k+1} = +\infty$.
L'espace $(\ell^1, \|\cdot\|_2)$ n'est donc pas complet.

6. Les projections π_n sont linéaires et avec $|\pi_n(x)| = |x_n| \leq \|x\|_j$ pour $j = 1, 2$, on déduit qu'elles sont continues.
7. Soit ℓ la forme linéaire définie sur ℓ^1 par $\ell(x) = \sum_{k=0}^{+\infty} x_k$ (une série absolument convergente est convergente). Avec $|\ell(x)| \leq \sum_{k=0}^{+\infty} |x_k| = \|x\|_1$, on déduit que ℓ est continue.

   Supposons qu'il existe un entier $n \geq 0$ tel que $\ell = \sum_{k=0}^{n} \lambda_k \pi_k$. En prenant pour $x \in \ell^1$ la suite définie par $x_{n+1} = 1$ et $x_k = 0$ pour $k \neq n+1$, on a $\ell(x) = 1$ et $\sum_{k=0}^{n} \lambda_k \pi_k(x) = 0$, ce qui est contradictiore. Donc ℓ ne peut s'écrre comme combinaison linéaire (finie) de π_n.
8. L'application $*$ est le produit de Cauchy, ou produit de convolution, de deux séries absolument convergentes. Muni de cette loi et de l'addition, ℓ^1 est une algèbre de Banach (c'est du cours).
9. A faire
10. A faire