Transformation de Laplace

1 Énoncé

Un nombre complexe sera noté $z = x + iy$, où $x = \Re(z)$ est la partie réelle de z et $y = \Im(z)$ sa partie imaginaire.

Pour tout réel σ, on désigne par P_σ [resp. $\overline{P_\sigma}$] le demi-plan ouvert [resp. fermé] défini par :

$$P_\sigma = \{z \in \mathbb{C} \mid \Re(z) > \sigma\} \ \text{[resp. } \overline{P_\sigma} = \{z \in \mathbb{C} \mid \Re(z) \geq \sigma\}\text{]}$$

On note également $P_{+\infty} = \emptyset$ et $P_{-\infty} = \mathbb{C}$.

On désigne par $\mathcal{C}$ l'espace vectoriel des fonctions continues de $\mathbb{R}^+$ dans $\mathbb{C}$.

Soient $f \in \mathcal{C}$ et $z \in \mathbb{C}$. On dit que $\mathcal{L}(f)(z)$ est défini si l'intégrale impropre $\displaystyle\int_0^{+\infty} e^{-zt} f(t)\,dt$ est convergente et dans ce cas, on note $\mathcal{L}(f)(z)$ la valeur de cette intégrale.

L'application $\mathcal{L}(f)$, quand elle est définie, est la transformée de Laplace de f.

On note $\mathcal{DL}(f)$ le domaine de définition de $\mathcal{L}(f)$ pour $f \in \mathcal{C}$.

– I – Quelques exemples

Déterminer le domaine de définition $\mathcal{DL}(f)$ de $\mathcal{L}(f)$ et préciser les valeurs de $\mathcal{L}(f)(z)$ pour tout $z \in \mathcal{DL}(f)$ dans les cas suivants.

1. f est la fonction constante égale à 1 sur $\mathbb{R}^+$.
2. f est la fonction définie par :
$$\forall t \in \mathbb{R}^+,\ f(t) = e^{\lambda t}$$
où λ est un nombre complexe donné.
3. f est la fonction définie par :
$$\forall t \in \mathbb{R}^+,\ f(t) = t^n$$
où n est un entier naturel donné.
4. f est la fonction définie par :
$$\forall t \in \mathbb{R}^+,\ f(t) = e^{\lambda t} t^n$$
où λ est un nombre complexe et n un entier naturel donnés.
5. f est la fonction définie par :
$$\forall t \in \mathbb{R}^+,\ f(t) = t^n \cos(\omega t) \ \text{[resp. } f(t) = t^n \sin(\omega t)\text{]}$$
où ω un nombre réel, n un entier naturel donnés. Préciser ces fonctions pour $n = 0$ et $n = 1$.

– II – Abscisse de convergence. Continuité de $\mathcal{L}(f)$. Injectivité de $\mathcal{L}$

Soit $f \in \mathcal{C}$.

1.

   (a) On suppose que $\mathcal{L}(f)$ est définie en un point $z_0 = x_0 + iy_0 \in \mathbb{C}$ et on désigne par F_0 la fonction définie sur $\mathbb{R}^+$ par :
$$\forall t \in \mathbb{R}^+,\ F_0(t) = \int_0^t e^{-z_0 u} f(u)\,du$$
   Montrer que pour tout $z \in P_{x_0}$, $\mathcal{L}(f)(z)$ est défini et que :
$$\mathcal{L}(f)(z) = (z - z_0) \int_0^{+\infty} e^{-(z-z_0)t} F_0(t)\,dt$$

(b) On désigne par $E(f)$ la partie de $\mathbb{R}$ définie par :

$$E(f) = \left\{ x \in \mathbb{R} \mid \int_0^{+\infty} e^{-xt} f(t)\, dt \text{ est convergente} \right\}$$

i. Montrer que si $E(f) = \emptyset$, alors l'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty} e^{-zt} f(t)\, dt$ est divergente pour tout $z \in \mathbb{C}$. On note, dans ce cas, $\sigma(f) = +\infty$. Donner un exemple de telle situation.

ii. Montrer que si $E(f)$ est non vide et non minoré, la fonction $\mathcal{L}(f)$ est alors définie sur tout $\mathbb{C}$. On note alors $\sigma(f) = -\infty$. Donner un exemple de telle situation.

iii. Montrer que si $E(f)$ est non vide et minoré, il existe alors un réel $\sigma(f)$ tel que :

$$\begin{cases} \text{si } \Re(z) > \sigma(f) \text{ alors } \mathcal{L}(f)(z) \text{ est défini} \\ \text{si } \Re(z) < \sigma(f) \text{ alors } \mathcal{L}(f)(z) \text{ n'est pas défini} \end{cases}$$

Avec les notations de la question précédente, on dit que $\sigma(f)$ est l'abscisse de convergence de la transformée de Laplace $\mathcal{L}(f)$ et on a :

$$P_{\sigma(f)} \subset \mathcal{DL}(f) \subset \overline{P_{\sigma(f)}}$$

Pour la suite, on suppose que $f \in \mathcal{C}$ est telle que $\sigma(f) < +\infty$.

Nous utiliserons à plusieurs reprises le résultat suivant. Si pour $\sigma_0 > \sigma(f)$, on désigne par F_0 la primitive nulle en 0 de la fonction $t \mapsto e^{-\sigma_0 t} f(t)$, soit :

$$\forall t \in \mathbb{R}^+,\ F_0(t) = \int_0^t e^{-\sigma_0 u} f(u)\, du \tag{1}$$

on a alors :

$$\forall z \in P_{\sigma_0},\ \mathcal{L}(f)(z) = (z - \sigma_0) \int_0^{+\infty} e^{-(z-\sigma_0)t} F_0(t)\, dt$$

De plus F_0 est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}^+$ et avec $\lim\limits_{T \to +\infty} F_0(T) = \mathcal{L}(f)(\sigma_0)$, on déduit que cette fonction est bornée. On note alors :

$$M_0 = \sup_{t \in \mathbb{R}^+} |F_0(t)|$$

2. Montrer que si f est à valeurs réelles positives, l'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty} e^{-zt} f(t)\, dt$ est alors absolument convergente pour tout $z \in P_{\sigma(f)}$.

3. Soit $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite complexe bornée.

(a) Montrer que la série entière $\sum a_n z^n$ a un rayon de convergence $R \geq 1$ et que la série entière $\sum \dfrac{a_n}{n!} z^n$ a un rayon de convergence infini. On note respectivement $\varphi(z)$ et $f(z)$ les sommes de ces séries entières.

(b) On note encore f la restriction de f à $\mathbb{R}^+$. Montrer que $\sigma(f) \leq 1$.

(c) Montrer que :

$$\forall z \in P_1,\ \mathcal{L}(f)(z) = \frac{1}{z} \varphi\left(\frac{1}{z}\right)$$

4. En utilisant la suite de fonctions $(\varphi_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ définie sur $\mathbb{C}$ par :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*,\ \forall z \in \mathbb{C},\ \varphi_n(z) = \int_0^n e^{-zt} f(t)\, dt$$

montrer que $\mathcal{L}(f)$ est continue sur $P_{\sigma(f)}$.
5. Donner une deuxième démonstration de la continuité de $\mathcal{L}(f)$ sur $P_{\sigma(f)}$.
6. On se donne un réel $\sigma_0 > \sigma(f)$ et F_0 est la fonction définie par (1).
   (a) Montrer que, pour tout $z \in P_{\sigma_0}$ et tout entier naturel k, l'intégrale :

$$\int_0^{+\infty} e^{-(z-\sigma_0)t} t^k F_0(t)\, dt$$

   est absolument convergente.
   (b) En déduire que, pour tout $z \in P_{\sigma(f)}$ et tout entier naturel k, l'intégrale :

$$\int_0^{+\infty} e^{-zt} t^k f(t)\, dt$$

   est convergente. On a donc :

$$\forall k \in \mathbb{N},\ \sigma\left(t^k f\right) \leq \sigma(f)$$

7. Montrer que, si φ est une fonction continue sur un intervalle réel fermé borné $[a, b]$ à valeurs complexes telle que $\int_a^b \varphi(t)\, t^n dt = 0$ pour tout entier naturel n, elle est alors identiquement nulle (théorème des moments de Hausdorff).
8. En utilisant les transformées de Laplace des fonctions $t \mapsto t^n$, vérifier que le résultat de la question précédente n'est pas valable sur $]0, +\infty[$.
9. On suppose qu'il existe un réel $\sigma_0 > \sigma(f)$ tel que :

$$\forall n \in \mathbb{N},\ \mathcal{L}(f)(\sigma_0 + n) = 0$$

   (a) Montrer que la fonction φ définie sur $]0, 1]$ par :

$$\varphi(t) = F_0(-\ln(t))$$

   se prolonge en une fonction continue sur $[0, 1]$.
   (b) Montrer que :

$$\forall n \in \mathbb{N},\ \int_0^1 t^n \varphi(t)\, dt = 0$$

   et en déduire que f est la fonction identiquement nulle.
10. Montrer que si $\mathcal{L}(f)(z) = 0$ pour tout $z \in P_{\sigma(f)}$, f est alors la fonction identiquement nulle.
11. On suppose que f est de classe $\mathcal{C}^n$ sur $\mathbb{R}^+$ avec $n \geq 1$ et que :

$$\begin{aligned} &\forall k \in \{0, 1, \cdots, n\},\ \sigma\left(f^{(k)}\right) < +\infty \\ &\forall k \in \{0, 1, \cdots, n-1\},\ \forall z \in P_{\sigma\left(f^{(k)}\right)},\ \lim_{t\to+\infty} e^{-zt} f^{(k)}(t) = 0 \end{aligned}$$

Montrer que :

$$\forall z \in \bigcap_{k=0}^{n} P_{\sigma\left(f^{(k)}\right)},\ \mathcal{L}\left(f^{(n)}\right)(z) = z^n \mathcal{L}(f)(z) - \sum_{k=0}^{n-1} z^{n-1-k} f^{(k)}(0)$$

– III – Étude de la restriction de $\mathcal{L}(f)$ à l'intervalle réel $]\sigma(f), +\infty[$

On s'intéresse ici à la restriction de la fonction $\mathcal{L}(f)$ à l'intervalle $]\sigma(f), +\infty[$. On note encore $\mathcal{L}(f)$ cette restriction.

1. Montrer que $\lim\limits_{x \to +\infty} \mathcal{L}(f)(x) = 0$.
2. Montrer que $\lim\limits_{x \to +\infty} x\mathcal{L}(f)(x) = f(0)$. On a donc $\mathcal{L}(f)(x) \underset{+\infty}{\sim} \dfrac{f(0)}{x}$ si $f(0) \neq 0$ et $\mathcal{L}(f)(x) = \underset{+\infty}{o}\left(\dfrac{1}{x}\right)$ si $f(0) = 0$.
3. On suppose, pour cette question, que $\lim\limits_{t \to +\infty} f(t) = \ell$.
   (a) Montrer que $\sigma(f) \leq 0$.
   (b) Montrer que $\lim\limits_{x \to 0^+} x\mathcal{L}(f)(x) = \ell$.
4. Montrer que la fonction $\mathcal{L}(f)$ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $]\sigma(f), +\infty[$ avec :
$$\forall x \in]\sigma(f), +\infty[, \ \mathcal{L}(f)'(x) = -\mathcal{L}(tf)(x) = -\int_0^{+\infty} e^{-xt} t f(t)\, dt$$
5. En déduire que la fonction $\mathcal{L}(f)$ est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $]\sigma(f), +\infty[$ avec $\mathcal{L}(f)^{(k)} = (-1)^k \mathcal{L}\left(t^k f\right)$ pour tout $k \in \mathbb{N}$.
6. Montrer que si $f \in \mathcal{C}$ est telle que $\lim\limits_{t \to +\infty} f(t) = \lambda$, on a alors $\lim\limits_{T \to +\infty} \dfrac{1}{T} \displaystyle\int_0^T f(t)\, dt = \lambda$ (théorème de Cesàro).
7. On suppose, pour cette question, que $\displaystyle\int_0^{+\infty} f(t)\, dt$ est convergente. Montrer que :
   (a) $\sigma(f) \leq 0$;
   (b) $\lim\limits_{x \to 0^+} \mathcal{L}(f)(x) = \displaystyle\int_0^{+\infty} f(t)\, dt$ (la limite est prise pour x réel positif) ;
   (c) $\lim\limits_{T \to +\infty} \dfrac{1}{T} \displaystyle\int_0^T t f(t)\, dt = 0$.
8. Si $\sigma(f) \leq 0$ et $\lim\limits_{x \to 0^+} \mathcal{L}(f)(x) = \ell$, peut-on en déduire que $\displaystyle\int_0^{+\infty} f(t)\, dt$ est convergente ?
9. On suppose, pour cette question, que $f \in \mathcal{C}$ est à valeurs positives ou nulles.
   Montrer que si $\sigma(f) \leq 0$ et $\lim\limits_{x \to 0^+} \mathcal{L}(f)(x) = \ell$, l'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty} f(t)\, dt$ est alors convergente et sa valeur vaut ℓ.
10. On désigne par f la fonction définie sur $\mathbb{R}^+$ par :
$$\forall t \in \mathbb{R}^+, \ f(t) = \begin{cases} \dfrac{\sin(t)}{t} \text{ si } t > 0 \\ 1 \text{ si } t = 0 \end{cases}$$
   (a) Montrer que les intégrales $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\sin^2(t)}{t^2} dt$ et $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\sin(t)}{t} dt$ sont convergentes et que :
$$\int_0^{+\infty} \frac{\sin^2(t)}{t^2} dt = \int_0^{+\infty} \frac{\sin(t)}{t} dt$$

(b) Montrer que $\sigma(f) = 0$.

(c) Calculer $\mathcal{L}(f)(x)$ pour tout $x > 0$ et en déduire la valeur de $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\sin(t)}{t} dt$.

11. Soient $f \in \mathcal{C}$ telle que $\displaystyle\lim_{t \to 0^+} \frac{f(t)}{t} = \ell$ et $g \in \mathcal{C}$ définie sur $\mathbb{R}^+$ par :

$$\forall t \in \mathbb{R}^+,\ g(t) = \begin{cases} \dfrac{f(t)}{t} \text{ si } t > 0 \\ \ell \text{ si } t = 0 \end{cases}$$

On suppose de plus que $\displaystyle\int_0^{+\infty} g(t)\, dt$ est convergente.

(a) Montrer que $\sigma(f) \leq \sigma(g) \leq 0$.

(b) Montrer que l'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty} \mathcal{L}(f)(t)\, dt$ est convergente et que :

$$\forall x \geq 0,\ \mathcal{L}(g)(x) = \int_x^{+\infty} \mathcal{L}(f)(t)\, dt$$

En particulier, on a :

$$\int_0^{+\infty} \frac{f(t)}{t} dt = \int_0^{+\infty} \mathcal{L}(f)(t)\, dt$$

et on retrouve les résultats de la question précédente.

– IV – Théorèmes taubériens

1. Montrer que si $f \in \mathcal{C}$ est telle que la fonction $t \mapsto t \cdot f(t)$ soit bornée (i. e. $f(t) = \underset{t \to +\infty}{O}\left(\dfrac{1}{t}\right)$), on a alors $\sigma(f) \leq 0$.

2. On suppose, pour cette question, que $f \in \mathcal{C}$ est telle que $\displaystyle\lim_{t \to +\infty} (t \cdot f(t)) = 0$ (i. e. $f(t) = \underset{t \to +\infty}{o}\left(\dfrac{1}{t}\right)$).

(a) Montrer que $\sigma(f) \leq 0$.

(b) Montrer que $\displaystyle\lim_{T \to +\infty} \frac{1}{T} \int_0^T t\, |f(t)|\, dt = 0$.

(c) Montrer que :

$$\forall x > 0,\ \forall T > 0,\ \left| \int_T^{+\infty} e^{-xt} f(t)\, dt \right| \leq \frac{e^{-xT}}{xT} \sup_{t \geq T} (t\, |f(t)|)$$

(d) On suppose de plus que $\displaystyle\lim_{t \to 0^+} \mathcal{L}(f)(t) = \ell$. Montrer que $\displaystyle\int_0^{+\infty} f(t)\, dt$ est convergente et vaut ℓ.

3. Soit $f \in \mathcal{C}$ telle que $f(t) = \underset{t \to +\infty}{o}\left(\dfrac{1}{t}\right)$ (dans ce cas, on a $\sigma(f) \leq 0$).

Montrer que $\displaystyle\int_0^{+\infty} f(t)\, dt$ converge si, et seulement si, $\displaystyle\lim_{x \to 0^+} \mathcal{L}(f)(x) = \ell$. Ce résultat est un théorème de Tauber (faible).

4. On s'intéresse ici à la réciproque du résultat montré en **III.1.**
Soit $f \in \mathcal{C}$ telle que $\sigma(f) \leq 0$, $\lim\limits_{t\to 0^+} \mathcal{L}(f)(t) = \ell$, $\lim\limits_{T\to+\infty} \dfrac{1}{T}\displaystyle\int_0^T tf(t)\,dt = 0$.
On désigne par g la fonction définie sur $\mathbb{R}^{+,*}$ par :

$$\forall t > 0,\ g(t) = \frac{1}{t^2}\int_0^t uf(u)\,du$$

   (a) Montrer que :

$$\lim_{t\to 0^+} g(t) = \frac{f(0)}{2}$$

   On prolonge alors la fonction g par continuité en 0 en posant $g(0) = \dfrac{f(0)}{2}$ et $g \in \mathcal{C}$.

   (b) Montrer que $\sigma(g) \leq 0$.

   (c) Montrer que $\lim\limits_{x\to 0^+} x\mathcal{L}(t\cdot g)(x) = 0$.

   (d) Montrer que :

$$\forall x > 0,\ \mathcal{L}(f)(x) = \mathcal{L}(g)(x) + x\mathcal{L}(t\cdot g)(x)$$

   (e) Montrer que $\lim\limits_{x\to 0^+} \mathcal{L}(g)(x) = \ell$.

   (f) En déduire que $\displaystyle\int_0^{+\infty} f(t)\,dt$ est convergente et déterminer sa valeur.

   En définitive, on a montré le résultat suivant :
   Soit $f \in \mathcal{C}$. L'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty} f(t)\,dt$ est convergente et vaut ℓ si, et seulement si : $\sigma(f) \leq 0$, $\lim\limits_{x\to 0^+} L(f)(x) = \ell$, $\lim\limits_{T\to+\infty} \dfrac{1}{T}\displaystyle\int_0^T tf(t)\,dt = 0$.

1. Soit φ une fonction de classe $\mathcal{C}^2$ sur $\mathbb{R}^{+,*}$ à valeurs réelles telle que $\lim\limits_{x\to 0^+} \varphi(x) = \gamma$ et la fonction $x \mapsto x^2\varphi''(x)$ soit bornée sur $\mathbb{R}^{+,*}$. Montrer que $\lim\limits_{x\to 0^+} x\cdot\varphi'(x) = 0$ (lemme de Littlewood).

   On admet le résultat suivant : (R) Si $\varphi \in \mathcal{C}$ est à valeurs réelles positives telle que $\sigma(\varphi) \leq 0$ et $\lim\limits_{x\to 0^+} x\cdot\mathcal{L}(\varphi)(x) = \ell$, on a alors $\lim\limits_{T\to+\infty} \dfrac{1}{T}\displaystyle\int_0^T \varphi(t)\,dt = \ell$.

2. Soit $f \in \mathcal{C}$ à valeurs réelles telle que $\lim\limits_{x\to 0^+} \mathcal{L}(f)(x) = \ell$ et $f(t) = \underset{t\to+\infty}{O}\left(\dfrac{1}{t}\right)$, c'est-à-dire qu'il existe un réel $M > 0$ tel que $t\,|f(t)| \leq M$ pour tout $t \geq 0$. On se propose de montrer que, dans ce cas, on a $\displaystyle\int_0^{+\infty} f(t)\,dt = \ell$ (théorème de Tauber fort).

   (a) Montrer que $\lim\limits_{x\to 0^+} x\cdot\mathcal{L}(f)'(x) = 0$.

   (b) En utilisant la fonction φ définie par :

$$\forall t \in \mathbb{R}^+,\ \varphi(t) = M - t\cdot f(t)$$

   montrer que $\lim\limits_{T\to+\infty} \dfrac{1}{T}\displaystyle\int_0^T t\cdot f(t)\,dt = 0$ et conclure.

2 Solution (proposée par J.E. Rombaldi)

– I – Quelques exemples

1. Pour tout nombre complexe $z = x + iy$, on a :

$$\Phi_z(t) = \int_0^t e^{-zu} du = \begin{cases} t \text{ si } z = 0 \\ \dfrac{1 - e^{-zt}}{z} \text{ si } z \neq 0 \end{cases}$$

Pour $x > 0$, on a :

$$\left|e^{-zt}\right| = e^{-xt} \underset{t\to+\infty}{\to} 0$$

donc $\mathcal{L}(f)(z)$ est défini avec :

$$\mathcal{L}(f)(z) = \lim_{t\to+\infty} \int_0^t e^{-zu} du = \lim_{t\to+\infty} \frac{1}{z}\left(1 - e^{-zt}\right) = \frac{1}{z}$$

Pour $x < 0$, on a :

$$\left|e^{-zt}\right| = e^{-xt} \underset{t\to+\infty}{\to} +\infty$$

et la fonction $t \mapsto e^{-zt}$, n'a pas de limite quand t tend vers $+\infty$, donc $\mathcal{L}(f)(z)$ n'est pas défini.
Pour $x = y = 0$, la fonction $\Phi_0 : t \mapsto t$ n'a pas de limite quand t tend vers $+\infty$, donc $\mathcal{L}(f)(z)$ n'est pas défini.
Pour $x = 0$ et $y \neq 0$, on vérifie que la fonction $t \mapsto e^{-iyt}$, n'a pas de limite quand t tend vers $+\infty$. En effet, en utilisant la suite $(t_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par $t_n = \dfrac{n\pi}{y}$, on a $\lim\limits_{n\to+\infty} t_n = +\infty$, alors que la suite $\left(e^{-iyt_n}\right)_{n\in\mathbb{N}} = \left((-1)^n\right)_{n\in\mathbb{N}}$ est divergente. Il en résulte que $\mathcal{L}(f)(z)$ n'est pas défini.
En définitive, le domaine de définition de $\mathcal{L}(f)$ est :

$$P_0 = \{z \in \mathbb{C} \mid \Re(z) > 0\}$$

et :

$$\forall z \in P_0,\ \mathcal{L}(f)(z) = \frac{1}{z}$$

2. Pour tout nombre complexe $z = x + iy$ et tout nombre réel $t \geq 0$, on a :

$$e^{-zt} f(t) = e^{-(z-\lambda)t} \cdot 1$$

donc $\mathcal{L}(f)(z)$ est défini si, et seulement si, $\mathcal{L}(1)(z - \lambda)$ est défini, ce qui équivaut à $\Re(z - \lambda) > 0$. Il en résulte que le domaine de définition de $\mathcal{L}(f)$ est :

$$\{z \in \mathbb{C} \mid \Re(z) > \Re(\lambda)\} = P_{\Re(\lambda)}$$

et :

$$\forall z \in P_{\Re(\lambda)},\ \mathcal{L}(f)(z) = \mathcal{L}(1)(z - \lambda) = \frac{1}{z - \lambda}$$

3. On rappelle que pour $-\infty < a < b \leq +\infty$ et f fonction continue par morceaux de $[a, b[$ dans $\mathbb{C}$, L'intégrale de f sur $[a, b[$ est convergente si, et seulement si, pour toute suite $(x_k)_{k\in\mathbb{N}}$ de points de $[a, b[$ qui converge vers b, la série $\sum \int_{x_k}^{x_{k+1}} f(t)\, dt$ est convergente.

Donc pour montrer la divergence de $\displaystyle\int_a^b f(t)\, dt$ il suffit de trouver une suite strictement croissante $(x_k)_{k\in\mathbb{N}}$ de points de $[a, b[$ qui converge vers b telle que la série $\sum \int_{x_k}^{x_{k+1}} f(t)\, dt$ soit

divergente.
Pour f à valeurs réelles, le théorème des accroissements finis nous permet d'écrire que :

$$\int_{x_k}^{x_{k+1}} f(t)\,dt = F(x_{k+1}) - F(x_k) = (x_{k+1} - x_k) f(\xi_k)$$

où $x_k < \xi_k < x_{k+1}$ et F est une primitive de f.

(a) Soit $z = x + iy \in \mathbb{C}$ avec $y > 0$. Pour tout entier $k \geq 0$, on a :

$$\begin{aligned} u_k &= \int_{\frac{k\pi}{y}}^{\frac{(k+1)\pi}{y}} e^{-xt} \sin(yt)\, t^n dt = \int_{k\pi}^{(k+1)\pi} e^{-\frac{x}{y}u} \sin(u) \frac{u^n}{y^{n+1}} du \\ &= \frac{(-1)^n e^{-\frac{x}{y}k\pi}}{y^{n+1}} \int_0^{\pi} e^{-\frac{x}{y}t} \sin(t) (k\pi + t)^n\, dt \end{aligned}$$

et pour $x \leq 0$:

$$|u_k| = \frac{e^{-\frac{x}{y}k\pi}}{y^{n+1}} \int_0^{\pi} e^{-\frac{x}{y}t} \sin(t) (k\pi + t)^n\, dt \geq \frac{1}{y^{n+1}} \int_0^{\pi} e^{-\frac{x}{y}t} \sin(t)\, t^n dt > 0$$

donc la suite $(u_k)_{k\in\mathbb{N}}$ ne tend pas vers 0 et l'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty} e^{-xt} \sin(yt)\, t^n dt$ est divergente.
Comme la fonction sin est impaire, cela est encore vrai pour $y < 0$ et $x \leq 0$.
Il en résulte que $\displaystyle\int_0^{+\infty} e^{-zt} t^n dt$ est divergente pour $x \leq 0$ et $y \neq 0$. Sinon $\displaystyle\int_0^{+\infty} e^{-zt} t^n dt$ et $\displaystyle\int_0^{+\infty} e^{-\overline{z}t} t^n dt$ son convergentes et aussi $\displaystyle\int_0^{+\infty} e^{-xt} \sin(yt)\, t^n dt$.

(b) Pour $x \in \mathbb{R}$ et $y = 0$, en utilisant le théorème des accroissements finis, on obtient l'existence, pour tout réel x et tout entier naturel k, d'un réel $c_k \in]k, k+1[$ tel que :

$$\int_k^{k+1} e^{-xt} t^n dt = e^{-xc_k} c_k^n$$

et pour $x \leq 0$, on a :

$$\int_k^{k+1} e^{-xt} t^n dt = e^{-xc_k} c_k^n \geq k^n \geq 1$$

donc la suite $\displaystyle\left(\int_k^{k+1} e^{-xt} t^n dt\right)_{k\in\mathbb{N}}$ ne tend pas vers 0 et l'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty} e^{-xt} t^n dt$ est divergente.

(c) On a donc ainsi montré que $\displaystyle\int_0^{+\infty} e^{-zt} t^n dt$ est divergente pour tout $z \in \mathbb{C}$ tel que $x = \Re(z) \leq 0$.

(d) Pour $z \in \mathbb{C}$ tel que $x = \Re(z) > 0$, avec $\displaystyle\lim_{t\to+\infty} t^2 \left|e^{-zt} t^n\right| = e^{-xt} t^{n+2} = 0$, on déduit que l'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty} e^{-zt} t^n dt$ est absolument convergente.

(e) En définitive, $\mathcal{DL}(f) = P_0$.

(f) On note $f_n(t) = t^n$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.
Pour $n = 0$, on a $f_0(t) = 1$ pour tout $t \geq 0$ et on a vu que $\mathcal{L}(f_0)(z) = \dfrac{1}{z}$ pour tout $z \in P_0$.
Supposons que l'on ait, pour $n \geq 1$:

$$\forall z \in P_0,\ \mathcal{L}(f_{n-1})(z) = \frac{(n-1)!}{z^n}$$

En effectuant une intégration par parties, on a, pour tout nombre complexe $z = x + iy$ et tout nombre réel $T > 0$:

$$\begin{aligned}\int_0^T e^{-zt}t^{n-1}dt &= \left[e^{-zt}\frac{t^n}{n}\right]_0^T + \frac{z}{n}\int_0^T e^{-zt}t^n dt \\ &= e^{-zT}\frac{T^n}{n} + \frac{z}{n}\int_0^T e^{-zt}t^n dt\end{aligned}$$

Et pour $x > 0$, on a :

$$\lim_{T\to+\infty}\left|e^{-zT}\frac{T^n}{n}\right| = \lim_{T\to+\infty} e^{-xT}\frac{T^n}{n} = 0$$

donc l'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty} e^{-zt}t^n dt$ est convergente avec :

$$\int_0^{+\infty} e^{-zt}t^n dt = \frac{n}{z}\int_0^{+\infty} e^{-zt}t^{n-1}dt = \frac{n!}{z^{n+1}}$$

On a donc ainsi montré que, pour tout entier naturel n, le domaine de définition de $\mathcal{L}(f_n)$ est P_0 avec $\mathcal{L}(f_n)(z) = \dfrac{n!}{z^{n+1}}$ pour tout $z \in P_0$.

4. Pour tout nombre complexe z et tout réel $t \geq 0$, on a $e^{-zt}f(t) = e^{-(z-\lambda)t}t^n$. Donc $\mathcal{L}(f)(z)$ est défini si, et seulement si, $\mathcal{L}(f_n)(z-\lambda)$ est défini, ce qui équivaut à $\Re(z-\lambda) > 0$. Il en résulte que le domaine de définition de $\mathcal{L}(f)$ est :

$$\{z \in \mathbb{C} \mid \Re(z) > \Re(\lambda)\} = P_{\Re(\lambda)}$$

et :

$$\forall z \in P_{\Re(\lambda)},\ \mathcal{L}(f)(z) = \mathcal{L}(f_n)(z-\lambda) = \frac{n!}{(z-\lambda)^{n+1}}$$

5. On note $f_n(t) = t^n\cos(\omega t)$ et $g_n(t) = t^n\sin(\omega t)$.

   Prenant $\lambda = \pm i\omega$ dans la question précédente, on déduit que chaque intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty} e^{-zt}e^{\pm i\omega t}t^n dt$ est convergente si, et seulement si, $\Re(z) > 0$. Il en résulte que les intégrales $\mathcal{L}(f_n)(z) = \displaystyle\int_0^{+\infty} t^n e^{-zt}\cos(\omega t)\,dt$ et $\mathcal{L}(g_n)(z) = \displaystyle\int_0^{+\infty} t^n e^{-zt}\sin(\omega t)\,dt$ sont convergentes si, et seulement si, $\Re(z) > 0$. Et pour $\Re(z) > 0$:

$$\begin{aligned}\mathcal{L}(f_n)(z) &= \frac{1}{2}\left(\mathcal{L}\left(e^{i\omega t}t^n\right)(z) + \mathcal{L}\left(e^{-i\omega t}t^n\right)(z)\right) \\ &= \frac{n!}{2}\left(\frac{1}{(z-i\omega)^{n+1}} + \frac{1}{(z+i\omega)^{n+1}}\right) \\ &= \frac{n!}{2}\frac{(z+i\omega)^{n+1} + (z-i\omega)^{n+1}}{(z^2+\omega^2)^{n+1}}\end{aligned}$$

et :

$$\begin{aligned}\mathcal{L}(g_n)(z) &= \frac{1}{2i}\left(\mathcal{L}\left(e^{i\omega t}t^n\right)(z) - \mathcal{L}\left(e^{-i\omega t}t^n\right)(z)\right) \\ &= \frac{n!}{2i}\left(\frac{1}{(z-i\omega)^{n+1}} - \frac{1}{(z+i\omega)^{n+1}}\right) \\ &= \frac{n!}{2i}\frac{(z+i\omega)^{n+1} - (z-i\omega)^{n+1}}{(z^2+\omega^2)^{n+1}}\end{aligned}$$

En particulier :

$$\mathcal{L}(f_0)(z) = \frac{z}{z^2+\omega^2},\ \mathcal{L}(f_1)(z) = \frac{z^2-\omega^2}{\left(z^2+\omega^2\right)^2}$$
$$\mathcal{L}(g_0)(z) = \frac{\omega}{z^2+\omega^2},\ \mathcal{L}(g_1)(z) = \frac{2\omega z}{\left(z^2+\omega^2\right)^2}$$

– II – Abscisse de convergence. Continuité de $L(f)$

1.

(a) La fonction F_0 est la primitive nulle en 0 de la fonction définie sur $\mathbb{R}^+$ par $t \mapsto e^{-z_0 t} f(t)$. Pour tout nombre complexe z et tout réel $T > 0$, une intégration par parties nous donne :

$$\begin{aligned}\int_0^T e^{-zt} f(t)\,dt &= \int_0^T e^{-z_0 t} f(t)\, e^{-(z-z_0)t} dt = \int_0^T F_0'(t)\, e^{-(z-z_0)t} dt \\ &= \left[F_0(t)\, e^{-(z-z_0)t}\right]_0^T + (z-z_0)\int_0^T F_0(t)\, e^{-(z-z_0)t} dt \\ &= F_0(T)\, e^{-(z-z_0)T} + (z-z_0)\int_0^T F_0(t)\, e^{-(z-z_0)t} dt\end{aligned}$$

Comme :

$$F_0(T) = \int_0^T e^{-z_0 t} f(t)\,dt \underset{T\to+\infty}{\to} \int_0^{+\infty} e^{-z_0 t} f(t)\,dt = \mathcal{L}(f)(z_0)$$

cette fonction F_0 est bornée, c'est-à-dire qu'il existe un réel $M_0 > 0$ tel que :

$$\forall t \in \mathbb{R}^+,\ |F_0(t)| \leq M_0$$

et pour $z \in P_{x_0}$, on a :

$$\left|F_0(T)\, e^{-(z-z_0)T}\right| = |F_0(T)|\, e^{-(x-x_0)T} \leq M_0 e^{-(x-x_0)T} \underset{T\to+\infty}{\to} 0$$

puisque $x > x_0$.
Comme $\displaystyle\int_0^{+\infty} e^{-(x-x_0)t} dt$ est convergente pour $x > x_0$, l'inégalité précédente (valable pour tout $T > 0$) nous dit que l'intégrale $\displaystyle\int_0^T F_0(t)\, e^{-(z-z_0)t} dt$ est absolument convergente pour $z \in P_{x_0}$ et on peut écrire que :

$$\begin{aligned}\mathcal{L}(f)(z) &= \int_0^{+\infty} e^{-zt} f(t)\,dt = (z-z_0)\int_0^{+\infty} e^{-(z-z_0)t} F_0(t)\,dt \\ &= (z-z_0)\,\mathcal{L}(F_0)(z-z_0)\end{aligned}$$

Le domaine de définition de la fonction $\mathcal{L}(f)$ contient donc le demi-plan P_{x_0}.

(b)

i. Si, pour $z_0 \in \mathbb{C}$, l'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty} e^{-z_0 t} f(t)\,dt$ est convergente, la question **II.1a** nous dit alors que $\displaystyle\int_0^{+\infty} e^{-xt} f(t)\,dt$ est convergente pour tout $x > \Re(z_0)$ et $E(f) \neq \emptyset$.

Pour $f(t) = e^{t^2}$, en utilisant le théorème des accroissements finis, on obtient l'existence, pour tout réel x et tout entier naturel k, d'un réel $c_k \in]k, k+1[$ tel que :

$$u_k = \int_k^{k+1} e^{-xt} e^{t^2} dt = e^{-xc_k} e^{c_k^2} \underset{k \to +\infty}{\to} +\infty$$

(pour $x \leq 0$, on a $u_k \geq e^{k^2}$ et pour $x > 0$, $u_k \geq e^{-x(k+1)} e^{k^2}$), donc la suite $\left(\int_k^{k+1} e^{-xt} e^{t^2} dt \right)_{k \in \mathbb{N}}$ ne tend pas vers 0 et l'intégrale $\int_0^{+\infty} e^{-xt} e^{t^2} dt$ est divergente.
On a donc $E(f) = \emptyset$ dans ce cas et $\sigma(f) = +\infty$.

ii. Supposons $E(f)$ non vide et non minoré. Cela signifie que :

$$\forall m \in \mathbb{R},\ \exists x_0 \in E(f) \mid x_0 < m$$

Donc pour tout nombre complexe z, il existe donc un réel $x_0 \in E(f)$ tel que $x_0 < \Re(z)$ et la question **II.1a** nous dit que $\int_0^{+\infty} e^{-zt} f(t)\, dt$ est convergente. La fonction $\mathcal{L}(f)$ est donc définie sur tout $\mathbb{C}$.
La fonction identiquement nulle nous donne un exemple trivial.
Pour $f(t) = e^{-t^2}$ et $x \in \mathbb{R}$, on a $\lim\limits_{t \to +\infty} t^2 e^{-xt} e^{-t^2} = 0$, donc l'intégrale $\int_0^{+\infty} e^{-xt} e^{-t^2} dt$ est convergente.
On a donc $E(f) = \mathbb{R}$ dans ce cas et $\sigma(f) = -\infty$.

iii. Si $E(f)$ est non vide et minoré, il admet alors une borne inférieure :

$$\sigma(f) = \inf \left\{ x \in \mathbb{R} \mid \int_0^{+\infty} e^{-xt} f(t)\, dt \text{ est convergente} \right\}$$

Si $z \in \mathbb{C}$ est tel que $\Re(z) > \sigma(f)$, par définition de la borne inférieure, il existe alors un réel $\sigma_0 \in E(f)$ tel que $\sigma(f) \leq \sigma_0 < \Re(z)$ et $\mathcal{L}(f)(z)$ est défini.
Si $z \in \mathbb{C}$ est tel que $\Re(z) < \sigma(f)$, l'intégrale $\int_0^{+\infty} e^{-zt} f(t)\, dt$ est nécessairement divergente ; sinon pour $\sigma_0 \in]\Re(z), \sigma(f)[$ l'intégrale $\int_0^{+\infty} e^{-\sigma_0 t} f(t)\, dt$ est convergente, ce qui est en contradiction avec $\sigma(f) = \inf E(f)$ et $\sigma_0 < \sigma(f)$.

2. Si $z = x + iy \in P_{\sigma(f)}$, on a alors $x \in P_{\sigma(f)}$ et $\int_0^{+\infty} e^{-xt} f(t)\, dt$ est convergente (ce qui prouve au passage que $E(f) =]\sigma(f), +\infty[$ ou $E(f) = [\sigma(f), +\infty[$). Dans le cas où f est à valeurs réelles positives, on a $|e^{-zt} f(t)| = e^{-xt} f(t)$ et $\int_0^{+\infty} e^{-zt} f(t)\, dt$ est absolument convergente.

3. On note $M = \sup\limits_{n \in \mathbb{N}} |a_n|$.

(a) Comme la suite $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est bornée, la série $\sum a_n z^n$ à un rayon de convergence $R \geq 1$ et avec $\left| \frac{a_n}{n!} \right| \leq \frac{M}{n!}$, on déduit que le rayon de convergence de la deuxième série est infini et :

$$\forall z \in \mathbb{C},\ |f(z)| = \left| \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{a_n}{n!} z^n \right| \leq M e^{|z|}$$

(b) Pour $x > 1$ et $t \geq 0$, on a :

$$\left| e^{-xt} f(t) \right| = \left| e^{-xt} \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{a_n}{n!} t^n \right| \leq M e^{-xt} \left(\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{t^n}{n!} \right) = M e^{-(x-1)t}$$

et avec $\displaystyle\int_0^{+\infty} e^{-(x-1)t}dt < +\infty$, on déduit que l'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty} e^{-xt}f(t)\,dt$ est absolument convergente. On a donc $]1,+\infty[\subset E(f)$ et $\sigma(f) \leq 1$.

(c) Pour $z = x + iy \in \mathbb{C}$, on a :

$$\mathcal{L}(f)(z) = \int_0^{+\infty} e^{-zt}f(t)\,dt = \int_0^{+\infty} e^{-zt}\left(\sum_{k=0}^{+\infty}\frac{a_k}{k!}t^k\right)dt$$

et en notant :

$$R_n(t) = \sum_{k=n+1}^{+\infty}\frac{a_k}{k!}t^k$$

on a :

$$\begin{aligned}
\mathcal{L}(f)(z) &= \sum_{k=0}^{n}\frac{a_k}{k!}\int_0^{+\infty} e^{-zt}t^k dt + \int_0^{+\infty} e^{-zt}R_n(t)\,dt \\
&= \sum_{k=0}^{n}\frac{a_k}{k!}\mathcal{L}\left(t^k\right)(z) + \int_0^{+\infty} e^{-zt}R_n(t)\,dt \\
&= \sum_{k=0}^{n}\frac{a_k}{k!}\frac{k!}{z^{k+1}} + \int_0^{+\infty} e^{-zt}R_n(t)\,dt \\
&= \frac{1}{z}\sum_{k=0}^{n}a_k\left(\frac{1}{z}\right)^k + \int_0^{+\infty} e^{-zt}R_n(t)\,dt
\end{aligned}$$

Il s'agit donc de montrer que :

$$\forall z \in P_1,\ \lim_{n\to+\infty}\int_0^{+\infty} e^{-zt}R_n(t)\,dt = 0$$

Pour ce faire, on écrit que :

$$\begin{aligned}
\left|\int_0^{+\infty} e^{-zt}R_n(t)\,dt\right| &= \left|\int_0^{+\infty} e^{-zt}\left(\sum_{k=n+1}^{+\infty}\frac{a_k}{k!}t^k\right)dt\right| \\
&\leq M\int_0^{+\infty} e^{-xt}\left(\sum_{k=n+1}^{+\infty}\frac{t^k}{k!}\right)dt = M\int_0^{+\infty} e^{-xt}\left(e^t - \sum_{k=0}^{n}\frac{t^k}{k!}\right)dt \\
&\leq M\left(\int_0^{+\infty} e^{-(x-1)t}dt - \sum_{k=0}^{n}\frac{1}{k!}\int_0^{+\infty} e^{-xt}t^k du\right) \\
&\leq M\left(\frac{1}{x-1} - \sum_{k=0}^{n}\frac{1}{x^{k+1}}\right) = \frac{M}{x}\left(\frac{1}{1-\frac{1}{x}} - \sum_{k=0}^{n}\frac{1}{x^k}\right) \underset{n\to+\infty}{\rightarrow} 0
\end{aligned}$$

On peut aussi utiliser le théorème de convergence dominée.
On désigne, pour z fixé dans P_1, par $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite de fonctions définie par :

$$\forall t \in \mathbb{R}^+,\ u_n(t) = \frac{a_n}{n!}e^{-zt}t^n$$

Toutes ces fonctions sont continues sur $\mathbb{R}^+$ avec :

$$|u_n(t)| \leq \frac{|a_n|}{n!}e^{-xt}t^n$$

elles sont donc intégrables sur $\mathbb{R}^+$ et on a :

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \int_0^{+\infty} |u_n(t)|\, dt \leq \frac{1}{x} \sum_{n=0}^{+\infty} |a_n| \frac{1}{x^n} < +\infty$$

puisque $0 < \dfrac{1}{x} < R$. On déduit alors du théorème de convergence dominée que $u : t \mapsto e^{-zt} f(t) = \displaystyle\sum_{k=0}^{+\infty} u_n(t)$ est intégrable sur $\mathbb{R}^+$ avec :

$$\begin{aligned}
\mathcal{L}(f)(z) = \int_0^{+\infty} e^{-zt} f(t)\, dt &= \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{a_n}{n!} \int_0^{+\infty} e^{-zt} t^n dt \\
&= \frac{1}{z} \sum_{n=0}^{+\infty} a_n \frac{1}{z^n} = \frac{1}{z} g\left(\frac{1}{z}\right)
\end{aligned}$$

4.

(a) La fonction $(z,t) \mapsto e^{-zt} f(t)$ est continue sur $\mathbb{C} \times \mathbb{R}^+$ et l'intégration se fait sur un segment réel, donc la fonction $\varphi_n : z \mapsto \displaystyle\int_0^n e^{-zt} f(t)\, dt$ est continue sur $\mathbb{C}$.

(b) Pour montrer la continuité de $\mathcal{L}(f)$, on montre que la suite $(\varphi_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ converge uniformément vers $\mathcal{L}(f)$ sur tout compact de $P_{\sigma(f)}$.
Soit donc K un compact non vide dans le demi-plan $P_{\sigma(f)}$. Il existe des réels σ_1, σ_2 tels que $\sigma(f) < \sigma_1 < \sigma_2$ et un réel $b > 0$ tels que :

$$K \subset \{z = x + iy \in \mathbb{C} \mid \sigma_1 \leq x \leq \sigma_2,\ |y| \leq b\}$$

On se donne un réel σ_0 tel que $\sigma(f) < \sigma_0 < \sigma_1$ et on désigne, comme en **II.1a** par F_0 la fonction définie sur $\mathbb{R}^+$ par :

$$F_0(t) = \int_0^t e^{-\sigma_0 u} f(u)\, du$$

Pour $z \in K$ et $n \in \mathbb{N}^*$, on a :

$$\begin{aligned}
\mathcal{L}(f)(z) - \varphi_n(z) &= \int_n^{+\infty} e^{-zt} f(t)\, dt \\
&= \int_n^{+\infty} e^{-\sigma_0 t} f(t)\, e^{-(z-\sigma_0)t} dt = \int_n^{+\infty} F_0'(t)\, e^{-(z-\sigma_0)t} dt
\end{aligned}$$

et une intégration par parties nous donne pour $T > n$:

$$\begin{aligned}
\int_n^T F_0'(t)\, e^{-(z-\sigma_0)t} dt &= \left[F_0(t)\, e^{-(z-\sigma_0)t}\right]_n^T + (z - \sigma_0) \int_n^T F_0(t)\, e^{-(z-\sigma_0)t} dt \\
&= F_0(T)\, e^{-(z-\sigma_0)T} - F_0(n)\, e^{-(z-\sigma_0)n} + (z - \sigma_0) \int_n^T F_0(t)\, e^{-(z-\sigma_0)t} dt
\end{aligned}$$

En faisant tendre T vers l'infini, on obtient, compte tenu du fait que F_0 est bornée et l'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty} F_0(t)\, e^{-(z-\sigma_0)t} dt$ absolument convergente :

$$\mathcal{L}(f)(z) - \varphi_n(z) = -F_0(n)\, e^{-(z-\sigma_0)n} + (z - \sigma_0) \int_n^{+\infty} F_0(t)\, e^{-(z-\sigma_0)t} dt$$

ce qui nous donne :

$$\begin{aligned}\left|\mathcal{L}(f)(z)-\varphi_n(z)\right| &\leq M_0\left(e^{-(x-\sigma_0)n}+\left|z-\sigma_0\right|\int_n^T e^{-(x-\sigma_0)t}dt\right)\\ &\leq M_0\left(e^{-(\sigma_1-\sigma_0)n}+\sqrt{(\sigma_2-\sigma_0)^2+b^2}\int_n^T e^{-(\sigma_1-\sigma_0)t}dt\right)=\varepsilon_n\end{aligned}$$

avec $\lim\limits_{n\to+\infty}\varepsilon_n=0$. Il en résulte que la suite $(\varphi_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge uniformément vers $\mathcal{L}(f)$ sur tout compact de $P_{\sigma(f)}$.
Comme les fonctions φ_n sont toutes continues sur $\mathbb{C}$, on en déduit que la fonction $\mathcal{L}(f)$ est continue sur tout compact de $P_{\sigma(f)}$, donc sur $P_{\sigma(f)}$.

5. Il nous suffit de montrer que $\mathcal{L}(f)$ est continue sur tout demi-plan fermé $\overline{P_{\sigma_1}}$, où $\sigma_1>\sigma(f)$.
On se donne donc $\sigma_1>\sigma(f)$ et σ_0 tel que $\sigma(f)<\sigma_0<\sigma_1$. Pour tout $z\in\overline{P_{\sigma_1}}$, on a :

$$\mathcal{L}(f)(z)=(z-\sigma_0)\int_0^{+\infty}e^{-(z-\sigma_0)t}F_0(t)\,dt$$

où F_0 est définie par (1) et il s'agit alors de montrer que la fonction :

$$\Phi_0:z\mapsto\int_0^{+\infty}e^{-(z-\sigma_0)t}F_0(t)\,dt$$

est continue sur $\overline{P_{\sigma_1}}$.
La fonction $\varphi:(z,t)\mapsto e^{-(z-\sigma_0)t}F_0(t)$ est continue sur $\overline{P_{\sigma_1}}\times\mathbb{R}^+$ avec :

$$\forall(z,t)\in\overline{P_{\sigma_1}}\times\mathbb{R}^+,\ \left|\varphi(z,t)\right|\leq M_0e^{-(\sigma_1-\sigma_0)t}$$

et $\displaystyle\int_0^{+\infty}e^{-(\sigma_1-\sigma_0)t}dt<+\infty$. Le théorème de convergence dominée nous dit alors que Φ_0 est continue sur $\overline{P_{\sigma_1}}$.

6.

(a) Pour $\sigma(f)<\sigma_0<\Re(z)$ et $k\in\mathbb{N}$, on a pour tout réel $t\geq0$:

$$\left|e^{-(z-\sigma_0)t}t^kF_0(t)\right|\leq M_0t^ke^{-(\Re(z)-\sigma_0)t}$$

Comme $\Re(z)-\sigma_0>0$, l'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty}t^ke^{-(\Re(z)-\sigma_0)t}dt$ est convergente (on peut dire, par exemple, que $\lim\limits_{t\to+\infty}t^2t^ke^{-(\Re(z)-\sigma_0)t}=0$), donc l'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty}e^{-(z-\sigma_0)t}t^kF_0(t)\,dt$ est absolument convergente.

(b) Pour $k=0$, c'est fait. On suppose donc que $k\geq1$.
Pour $z\in P_{\sigma(f)}$, il existe un réel σ_0 tel que $\sigma(f)<\sigma_0<\Re(z)$ et pour tout réel $T>0$, on a :

$$\begin{aligned}\int_0^T e^{-zt}t^kf(t)\,dt=\int_0^T e^{-\sigma_0t}f(t)\,t^ke^{-(z-\sigma_0)t}dt&=\int_0^T F_0'(t)\,t^ke^{-(z-\sigma_0)t}dt\\ &=F_0(T)\,e^{-(z-\sigma_0)T}+(z-\sigma_0)\int_0^T F_0(t)\,t^ke^{-(z-\sigma_0)t}dt\\ &-k\int_0^T F_0(t)\,t^{k-1}e^{-(z-\sigma_0)t}dt\end{aligned}$$

avec :

$$\left|F_0(T)\,e^{-(z-\sigma_0)T}\right| \leq M_0 e^{-(\Re(z)-\sigma_0)T} \underset{T\to+\infty}{\to} 0$$

les deux intégrales qui suivent étant absolument convergentes. Il en résulte que $\displaystyle\int_0^{+\infty} e^{-zt}t^k f(t)\,dt$ est convergente. On a donc, $\sigma\left(t^k f\right) \leq \sigma(f)$ et pour tout $z \in P_{\sigma_0}$:

$$\mathcal{L}\left(t^k f\right)(z) = (z-\sigma_0)\int_0^{+\infty} F_0(t)\,t^k e^{-(z-\sigma_0)t}dt - k\int_0^{+\infty} F_0(t)\,t^{k-1}e^{-(z-\sigma_0)t}dt$$

7. Avec la linéarité de l'intégrale, on déduit que pour tout polynôme P on a $\displaystyle\int_a^b \varphi(x)\,P(x)\,dx = 0.$ Le théorème de Weierstrass nous dit que la fonction continue $\overline{\varphi}$ est limite uniforme sur le compact $[a,b]$ d'une suite $(P_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de polynômes. Comme φ est continue sur le compact $[a,b]$, elle y est bornée et avec $\|\varphi P_n - \varphi\overline{\varphi}\|_\infty \leq \|\varphi\|_\infty \|P_n - \overline{\varphi}\|_\infty$, on déduit que la suite $(\varphi P_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge uniformément vers $|\varphi|^2$. On peut donc écrire que :

$$\int_a^b |\varphi|^2(t)\,dt = \lim_{n\to+\infty}\int_a^b \varphi(t)\,P_n(t)\,dt = 0$$

et avec la continuité et la positivité de $|\varphi|^2$, il en résulte que φ est identiquement nulle.

8. On a vu en **I.3** que pour tout entier naturel n, on a :

$$\forall z = x+iy \in P_0,\ \mathcal{L}(t^n)(z) = \int_0^{+\infty} e^{-zt}t^n dt = \frac{n!}{z^{n+1}}$$

ce qui nous donne :

$$\int_0^{+\infty} e^{-xt}\sin(yt)\,t^n dt = -\Im\left(\frac{n!}{z^{n+1}}\right)$$

En prenant $z = e^{i\frac{\pi}{4}} = \dfrac{\sqrt{2}}{2} + i\dfrac{\sqrt{2}}{2} \in P_0$, $n+1 = 4k$, on a :

$$z^{n+1} = e^{ik\pi} = (-1)^k \in \mathbb{R}$$

et :

$$\forall k \in \mathbb{N}^*,\ \int_0^{+\infty} e^{-\frac{\sqrt{2}}{2}t}\sin\left(\frac{\sqrt{2}}{2}t\right)t^{4k-1}dt = 0$$

En effectuant le changement de variable $u = t^4$, $du = 4t^3dt = 4u\dfrac{dt}{t}$ sur $]0,+\infty[$, cela nous donne :

$$\forall k \in \mathbb{N}^*,\ \int_0^{+\infty} e^{-\frac{\sqrt{2}}{2}u^{\frac{1}{4}}}\sin\left(\frac{\sqrt{2}}{2}u^{\frac{1}{4}}\right)u^{k-1}du = 0$$

On a donc une fonction $\varphi : u \mapsto e^{-\frac{\sqrt{2}}{2}u^{\frac{1}{4}}}\dfrac{\sin\left(\frac{\sqrt{2}}{2}u^{\frac{1}{4}}\right)}{u}$ continue non identiquement nulle sur $]0,+\infty[$ telle que $\displaystyle\int_0^{+\infty} u^k\varphi(u)\,du = 0$ pour tout entier naturel k.

9.

(a) Avec :

$$\lim_{t\to 0^+} F_0(-\ln(t)) = \lim_{T\to+\infty} F_0(T) = \mathcal{L}(f)(\sigma_0)$$

on déduit que la fonction φ se prolonge par continuité en 0.

(b) Pour $n \in \mathbb{N}$ et $0 < \varepsilon < T$, le changement de variable $u = e^{-t}$ nous donne :

$$\int_{\varepsilon}^{T} F_0(t) e^{-(n+1)t} dt = \int_{e^{-T}}^{e^{-\varepsilon}} u^{n+1} F_0(-\ln(u)) \frac{du}{u}$$

et faisant tendre (ε, T) vers $(0, +\infty)$, on obtient :

$$\int_0^1 u^n F_0(-\ln(u))\, du = \int_0^{+\infty} F_0(t) e^{-(n+1)t} dt = \frac{\mathcal{L}(f)(\sigma_0 + n + 1)}{n+1} = 0$$

ce qui équivaut à $F_0(-\ln(u)) = 0$ pour tout $u \in]0,1]$ d'après le théorème des moments. Il en résulte que $F_0(t) = 0$ pour tout $t \geq 0$ et comme $F_0'(t) = e^{-\sigma_0 t} f(t)$, on en déduit que $f = 0$.

10. On en déduit immédiatement que si $\mathcal{L}(f)(z) = 0$ pour tout $z \in P_{\sigma(f)}$, f est alors la fonction identiquement nulle.

11. On procède par récurrence sur $n \geq 1$.
Pour $n = 1$ et $z \in P_{\sigma(f)} \cap P_{\sigma(f')}$, une intégration par parties nous donne pour tout réel $T > 0$:

$$\int_0^T e^{-zt} f'(t)\, dt = \left[e^{-zt} f(t)\right]_0^T + z \int_0^T e^{-zt} f(t)\, dt$$

et tenant compte de $\lim\limits_{T \to +\infty} e^{-zT} f(T) = 0$, on en déduit que :

$$\int_0^{+\infty} e^{-zt} f'(t)\, dt = -f(0) + z \int_0^{+\infty} e^{-zt} f(t)\, dt$$

soit $\mathcal{L}(f')(z) = z\mathcal{L}(f)(z) - f(0)$.
Supposant le résultat acquis au rang $n-1$, une intégration par parties nous donne, de manière analogue, pour $z \in \bigcap\limits_{k=0}^{n} P_{\sigma\left(f^{(k)}\right)}$:

$$\int_0^{+\infty} e^{-zt} f^{(n)}(t)\, dt = -f^{(n-1)}(0) + z \int_0^{+\infty} e^{-zt} f^{(n-1)}(t)\, dt$$

soit $\mathcal{L}\left(f^{(n)}\right)(z) = z\mathcal{L}\left(f^{(n-1)}\right)(z) - f^{(n-1)}(0)$ et en utilisant l'hypothèse de récurrence :

$$\begin{aligned} \mathcal{L}\left(f^{(n)}\right)(z) &= z\left(z^{n-1}\mathcal{L}(f)(z) - \sum_{k=0}^{n-2} z^{n-2-k} f^{(k)}(0)\right) - f^{(n-1)}(0) \\ &= z^n \mathcal{L}(f)(z) - \sum_{k=0}^{n-1} z^{n-1-k} f^{(k)}(0) \end{aligned}$$

– III – Étude de la restriction de $\mathcal{L}(f)$ à l'intervalle réel $]\sigma(f), +\infty[$

1. Pour $x > \sigma_0 > \sigma(f)$, on a :

$$\mathcal{L}(f)(x) = (x - \sigma_0) \int_0^{+\infty} e^{-(x-\sigma_0)t} F_0(t)\, dt$$

Comme F_0 est continue en 0 avec $F_0(0) = 0$, pour tout réel $\varepsilon > 0$, on peut trouver un réel $\eta > 0$ tel que $|F_0(t)| < \varepsilon$ pour tout $t \in [0, \eta]$, ce qui nous donne :

$$\begin{aligned}
\left| \int_0^{+\infty} e^{-(x-\sigma_0)t} F_0(t)\, dt \right| &\leq \varepsilon \int_0^{\eta} e^{-(x-\sigma_0)t} dt + M_0 \int_{\eta}^{+\infty} e^{-(x-\sigma_0)t} dt \\
&\leq \varepsilon \frac{1 - e^{-(x-\sigma_0)\eta}}{x - \sigma_0} + M_0 \frac{e^{-(x-\sigma_0)\eta}}{x - \sigma_0} \\
&\leq \frac{\varepsilon}{x - \sigma_0} + M_0 \frac{e^{-(x-\sigma_0)\eta}}{x - \sigma_0}
\end{aligned}$$

et :

$$|\mathcal{L}(f)(x)| \leq \varepsilon + M_0 e^{-(x-\sigma_0)\eta} < 2\varepsilon$$

pour x assez grand puisque $\lim\limits_{x \to +\infty} e^{-(x-\sigma_0)\eta} = 0$. On a donc $\lim\limits_{x \to +\infty} \mathcal{L}(f)(x) = 0$.

2. Pour $x > 0$ et $x > \sigma(f)$, on a :

$$x\mathcal{L}(f)(x) - f(0) = x \int_0^{+\infty} e^{-xt} (f(t) - f(0))\, dt$$

Comme f est continue en 0, pour tout réel $\varepsilon > 0$, on peut trouver un réel $\eta > 0$ tel que $|f(t) - f(0)| < \varepsilon$ pour tout $t \in [0, \eta]$, ce qui nous donne :

$$\begin{aligned}
|x\mathcal{L}(f)(x) - f(0)| &\leq x \int_0^{\eta} e^{-xt} |f(t) - f(0)|\, dt + x \left| \int_{\eta}^{+\infty} e^{-xt} (f(t) - f(0))\, dt \right| \\
&\leq x\varepsilon \int_0^{\eta} e^{-xt} dt + x \left| \int_{\eta}^{+\infty} e^{-xt} (f(t) - f(0))\, dt \right| \\
&\leq x\varepsilon \int_0^{+\infty} e^{-xt} dt + \left| x \int_{\eta}^{+\infty} e^{-xt} f(t)\, dt - x f(0) \int_{\eta}^{+\infty} e^{-xt} dt \right| \\
&\leq \varepsilon + \left| x \int_{\eta}^{+\infty} e^{-xt} f(t)\, dt - f(0)\, e^{-x\eta} \right| \\
&\leq \varepsilon + |f(0)|\, e^{-x\eta} + \left| x \int_{\eta}^{+\infty} e^{-xt} f(t)\, dt \right|
\end{aligned}$$

Comme $\lim\limits_{x \to +\infty} e^{-x\eta} = 0$, on peut trouver, pour tout réel $\varepsilon > 0$, un réel $\sigma_0 > 0$ tel que $\sigma_0 > \sigma(f)$ et :

$$\forall x > \sigma_0,\ 0 \leq |f(0)|\, e^{-x\eta} \leq \varepsilon$$

Ensuite pour $x > \sigma_0$, on écrit que :

$$\begin{aligned}
\int_{\eta}^{+\infty} e^{-xt} f(t)\, dt = \int_{\eta}^{+\infty} e^{-\sigma_0 t} f(t)\, e^{-(x-\sigma_0)t} dt &= \int_{n}^{+\infty} F_0'(t)\, e^{-(x-\sigma_0)t} dt \\
&= \left[F_0(t)\, e^{-(x-\sigma_0)t} \right]_{\eta}^{+\infty} + (x - \sigma_0) \int_{\eta}^{+\infty} F_0(t)\, e^{-(x-\sigma_0)t} dt \\
&= -F_0(\eta)\, e^{-(x-\sigma_0)\eta} + (x - \sigma_0) \int_{\eta}^{+\infty} F_0(t)\, e^{-(x-\sigma_0)t} dt
\end{aligned}$$

ce qui nous donne :

$$\begin{aligned}
\left| x \int_{\eta}^{+\infty} e^{-xt} f(t)\, dt \right| &\leq x M_0 \left(e^{-(x-\sigma_0)\eta} + (x - \sigma_0) \int_{\eta}^{+\infty} e^{-(x-\sigma_0)t} dt \right) \\
&\leq 2x M_0 e^{-(x-\sigma_0)\eta} \underset{x \to +\infty}{\to} 0
\end{aligned}$$

On peut donc trouver $\sigma_1 > \sigma_0$ tel que :

$$\forall x > \sigma_1, \ \left| x \int_{\eta}^{+\infty} e^{-xt} f(t)\, dt \right| \leq \varepsilon$$

En définitive, on a :

$$\forall x > \sigma_1, \ \left| x\mathcal{L}(f)(x) - f(0) \right| \leq 3\varepsilon$$

On a donc montré que $\lim\limits_{x \to +\infty} x\mathcal{L}(f)(x) = f(0)$.

On en déduit que $\lim\limits_{x \to +\infty} x\mathcal{L}(F_0)(x) = F_0(0) = 0$ et :

$$\lim_{x \to +\infty} \mathcal{L}(f)(x) = \lim_{x \to +\infty} (x - \sigma_0)\, \mathcal{L}(F_0)(x - \sigma_0) = 0$$

3.

(a) Comme $\lim\limits_{t \to +\infty} f(t) = \ell$, la fonction f étant continue sur $\mathbb{R}^+$, on déduit qu'elle est bornée. Il existe donc un réel $M > 0$ tel que $|f(t)| \leq M$ pour tout $t \in \mathbb{R}^+$. On a alors, pour tout $x > 0$, $\left| e^{-xt} f(t) \right| \leq M e^{-xt}$ avec $\displaystyle\int_0^{+\infty} e^{-xt} dt < +\infty$, ce qui assure l'absolue convergence de $\displaystyle\int_0^{+\infty} e^{-xt} f(t)\, dt$. On a donc $\sigma(f) \leq 0$.

(b) Comme $\lim\limits_{t \to +\infty} f(t) = \ell$, on peut trouver, pour tout réel $\varepsilon > 0$, un réel $T_\varepsilon > 0$ tel que :

$$\forall t > T_\varepsilon, \ \left| f(t) - \ell \right| \leq \varepsilon$$

ce qui nous donne, pour $x > 0$:

$$\begin{aligned}
\left| x\mathcal{L}(f)(x) - \ell \right| &= \left| x \int_0^{+\infty} e^{-xt} (f(t) - \ell)\, dt \right| \\
&\leq x \int_0^{T_\varepsilon} e^{-xt} \left| f(t) - \ell \right| dt + x \int_{T_\varepsilon}^{+\infty} e^{-xt} \left| f(t) - \ell \right| dt \\
&\leq x (M + |\ell|) \int_0^{T_\varepsilon} e^{-xt} dt + x\varepsilon \int_{T_\varepsilon}^{+\infty} e^{-xt} dt \\
&\leq x (M + |\ell|)\, T_\varepsilon + x\varepsilon \int_0^{+\infty} e^{-xt} dt = x (M + |\ell|)\, T_\varepsilon + \varepsilon
\end{aligned}$$

et pour $0 < x < \dfrac{\varepsilon}{(M + |\ell|)\, T_\varepsilon}$, on a $\left| x\mathcal{L}(f)(x) - \ell \right| < 2\varepsilon$.

On a donc $\lim\limits_{x \to 0^+} x\mathcal{L}(f)(x) = \ell$.

4. Pour $\sigma_0 > \sigma(f)$ et $x > \sigma_0$, on a :

$$\mathcal{L}(f)(x) = (x - \sigma_0) \int_0^{+\infty} e^{-(x - \sigma_0)t} F_0(t)\, dt$$

et il s'agit alors de vérifier que la fonction Φ_0 définie par :

$$\forall x \in \left]\sigma_0, +\infty\right[, \ \Phi_0(x) = \int_0^{+\infty} e^{-(x - \sigma_0)t} F_0(t)\, dt$$

est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\left]\sigma_0, +\infty\right[$, ce qui prouvera que $\mathcal{L}(f)$ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\left]\sigma(f), +\infty\right[$ puisque $\sigma_0 > \sigma(f)$ est quelconque.

(a) On peut utiliser un théorème de convergence dominée.
Il nous suffit de montrer que Φ_0 est de classe $\mathcal{C}^1$ sur tout demi-plan fermé $\overline{P_{\sigma_1}}$, où $\sigma_1 > \sigma_0$.
On se donne donc $\sigma_1 > \sigma_0 > \sigma(f)$.
Pour tout $x \in \overline{P_{\sigma_1}}$, l'intégrale $\int_0^{+\infty} e^{-(x-\sigma_0)t} F_0(t)\,dt$ est convergente, la fonction φ : $(x,t) \mapsto e^{-(x-\sigma_0)t} F_0(t)$ est continue sur $\overline{P_{\sigma_1}} \times \mathbb{R}^+$ et admet une dérivée partielle $\dfrac{\partial \varphi}{\partial x}$: $(x,t) \mapsto -te^{-(x-\sigma_0)t} F_0(t)$ qui est continue sur $\overline{P_{\sigma_1}} \times \mathbb{R}^+$avec :

$$\forall (x,t) \in \overline{P_{\sigma_1}} \times \mathbb{R}^+, \ \left| \frac{\partial \varphi}{\partial x}(x,t) \right| \leq M_0 t e^{-(\sigma_1-\sigma_0)t}$$

et $\int_0^{+\infty} te^{-(\sigma_1-\sigma_0)t}dt < +\infty$. Le théorème de convergence dominée nous dit alors que Φ_0 est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\overline{P_{\sigma_1}}$ de dérivée :

$$\Phi_0'(x) = -\int_0^{+\infty} te^{-(x-\sigma_0)t} F_0(t)\,dt$$

Il en résulte que $\mathcal{L}(f)$ est dérivable en x de dérivée :

$$\mathcal{L}(f)'(x) = \int_0^{+\infty} e^{-(x-\sigma_0)t} F_0(t)\,dt - (x-\sigma_0)\int_0^{+\infty} te^{-(x-\sigma_0)t} F_0(t)\,dt$$

Mais en **II.6b** on a vu que :

$$\mathcal{L}(tf)(x) = (x-\sigma_0)\int_0^{+\infty} F_0(t)\, te^{-(x-\sigma_0)t}dt - \int_0^{+\infty} F_0(t)\, e^{-(x-\sigma_0)t}dt$$

ce qui nous donne bien :

$$\mathcal{L}(f)'(x) = -\mathcal{L}(tf)(x) = -\int_0^{+\infty} e^{-xt} tf(t)\,dt$$

La fonction $\mathcal{L}(tf)$ étant continue sur $P_{\sigma(tf)}$ avec $\sigma(tf) \leq \sigma(f)$, elle l'est sur $P_{\sigma(f)}$ et $\mathcal{L}(f)' = -\mathcal{L}(tf)$ est continue sur $]\sigma(f), +\infty[$.

(b) On peut aussi démontrer directement la dérivabilité de Φ_0 sur P_{σ_0}.
Soient $x > \sigma_0$ et $0 < \eta < x - \sigma_0$. Pour $0 < |h| < \eta$, on a $x + h > \sigma_0$ et :

$$\begin{aligned}
\tau(x,h) &= \frac{\Phi_0(x+h) - \Phi_0(x)}{h} + \int_0^{+\infty} te^{-(x-\sigma_0)t} F_0(t)\,dt \\
&= \int_0^{+\infty} \left(\frac{e^{-ht}-1}{h} + t \right) e^{-(x-\sigma_0)t} F_0(t)\,dt
\end{aligned}$$

En utilisant la formule de Taylor à l'ordre 2, on déduit qu'il existe, pour tout réel $t > 0$, un réel $\theta_{h,t} \in]0,1[$ tel que :

$$e^{-ht} - 1 = -ht + \frac{h^2t^2}{2} e^{-\theta_{h,t}ht}$$

ce qui nous donne :

$$\left| \frac{e^{-ht}-1}{h} + t \right| = \frac{|h|\, t^2}{2} e^{-\theta_{h,t}ht} < \frac{|h|\, t^2}{2} e^{\eta t}$$

(on a $-\theta_{h,t}ht \leq |\theta_{h,t}ht| < \theta_{h,t}\eta t < \eta t$) et :

$$\begin{aligned}
|\tau(x,h)| &= \left| \int_0^{+\infty} \left(\frac{e^{-ht}-1}{h} + t \right) e^{-(x-\sigma_0)t} F_0(t)\, dt \right| \\
&\leq M_0 \frac{|h|}{2} \int_0^{+\infty} t^2 e^{-(x-\eta-\sigma_0)t} dt \underset{h\to 0}{\to} 0
\end{aligned}$$

(comme $x-\eta-\sigma_0 > 0$, l'intégrale du second membre est convergente).
On a donc ainsi montré que Φ_0 est dérivable en x

5. Comme f et $t \cdot f$ vérifie les mêmes propriétés avec $\sigma(t\cdot f) \leq \sigma(f)$, on en déduit par récurrence que la fonction $\mathcal{L}(f)$ est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $]\sigma(f), +\infty[$ avec :

$$\forall k \in \mathbb{N},\ \forall x > \sigma(f),\ \mathcal{L}(f)^{(k)}(x) = (-1)^k \mathcal{L}\left(t^k f\right)(x) = (-1)^k \int_0^{+\infty} e^{-xt} t^k f(t)\, dt$$

6. Si $\lim\limits_{t\to+\infty} f(t) = \lambda$, pour tout réel $\varepsilon > 0$, il existe un réel $T_\varepsilon > 0$ tel que $|f(t)-\lambda| \leq \varepsilon$ pour tout $t > T_\varepsilon$ et pour tout $T \geq T_\varepsilon$, on a :

$$\begin{aligned}
\left| \frac{1}{T}\int_0^T f(t)\, dt - \lambda \right| &= \left| \frac{1}{T}\int_0^T (f(t)-\lambda)\, dt \right| \\
&\leq \frac{1}{T}\int_0^{T_\varepsilon} |f(t)-\lambda|\, dt + \frac{1}{T}\int_{T_\varepsilon}^T |f(t)-\lambda|\, dt \\
&\leq \frac{I_\varepsilon}{T} + \frac{T-T_\varepsilon}{T}\varepsilon \leq \frac{I_\varepsilon}{T} + \varepsilon
\end{aligned}$$

et pour $T > \max\left(T_\varepsilon, \dfrac{I_\varepsilon}{\varepsilon}\right)$, on a $\left| \dfrac{1}{T}\displaystyle\int_0^T f(t)\, dt - \lambda \right| \leq 2\varepsilon$.
On a donc $\lim\limits_{T\to+\infty} \dfrac{1}{T}\displaystyle\int_0^T f(t)\, dt = \lambda$.

7.
   (a) Si $\displaystyle\int_0^{+\infty} f(t)\, dt$ converge, on a alors $0 \in E(f)$ et $\sigma(f) \leq 0$ par définition de $\sigma(f)$ comme borne inférieure.

   (b) Comme $0 \in E(f)$, on peut écrire que :

$$\forall x > 0,\ \mathcal{L}(f)(x) = x\int_0^{+\infty} e^{-xt} F_0(t)\, dt$$

la fonction $F_0 : t \mapsto \displaystyle\int_0^t f(u)\, du$ étant continue, bornée sur $\mathbb{R}^+$ avec $F_0(0) = 0$. On a donc :

$$\forall x > 0,\ \mathcal{L}(f)(x) = x\mathcal{L}(F_0)(x)$$

Comme $F_0 \in \mathcal{C}$ et $\lim\limits_{t\to+\infty} F_0(t) = \displaystyle\int_0^{+\infty} f(t)\, dt$, on déduit de **III.3** que :

$$\lim_{x\to 0^+} x\mathcal{L}(F_0)(x) = \int_0^{+\infty} f(t)\, dt$$

soit :

$$\lim_{x\to 0^+} \mathcal{L}(f)(x) = \int_0^{+\infty} f(t)\, dt = \mathcal{L}(f)(0)$$

c'est-à-dire que $\mathcal{L}(f)$ est continue en 0. Comme on sait déjà qu'elle est continue sur $]0, +\infty[$ (qui est contenu dans $]\sigma(f), +\infty[$), on en déduit que $\mathcal{L}(f)$ est continue sur $\mathbb{R}^+$.

(c) Une intégration par parties nous donne pour tout $T > 0$:

$$\int_0^T tf(t)\,dt = \int_0^T tF_0'(t)\,dt = [tF_0(t)]_0^T - \int_0^T F_0(t)\,dt$$

et :

$$\frac{1}{T}\int_0^T tf(t)\,dt = F_0(T) - \frac{1}{T}\int_0^T F_0(t)\,dt$$

avec :

$$\lim_{T\to+\infty} \frac{1}{T}\int_0^T F_0(t)\,dt = \lim_{T\to+\infty} F_0(T) = \lim_{T\to+\infty} \int_0^T f(t)\,dt = \int_0^{+\infty} f(t)\,dt$$

(théorème de Cesàro) et en conséquence, $\lim\limits_{T\to+\infty} \dfrac{1}{T}\displaystyle\int_0^T tf(t)\,dt = 0.$

8. Si $\sigma(f) < 0$, $\mathcal{L}(f)(0)$ est alors défini et vaut ℓ puisque $\mathcal{L}(f)$ est continue sur $]\sigma(f), +\infty[$. Mais pour $\sigma(f) = 0$, la condition $\lim\limits_{x\to0^+} \mathcal{L}(f)(x) = \ell$ n'entraîne pas nécessairement la convergence de $\displaystyle\int_0^{+\infty} f(t)\,dt$.
Par exemple, pour $f \in \mathcal{C}$ définie par $f(t) = e^{it}$ pour tout $t \in \mathbb{R}^+$, la question **I.5** nous dit que $\sigma(f) = 0$ et :

$$\forall z \in P_0,\ \mathcal{L}(f)(z) = \frac{1}{z-i}$$

et on a :

$$\lim_{x\to0^+} \mathcal{L}(f)(x) = i$$

ce qui permet de prolonger $\mathcal{L}(f)$ par continuité en 0, alors que $\displaystyle\int_0^{+\infty} e^{it}dt$ est divergente (en **I.1** on a vu que $t \mapsto e^{it}$ n'a pas de limite à l'infini).

9. Comme $\sigma(f) \leq 0$, l'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty} e^{-xt} f(t)\,dt$ est convergente pour tout réel $x > 0$ et comme f est à valeurs positives, on a pour tout réel $T > 0$:

$$0 \leq \int_0^T e^{-xt} f(t)\,dt \leq \int_0^{+\infty} e^{-xt} f(t)\,dt = \mathcal{L}(f)(x)$$

Pour chaque $T > 0$ fixé, la fonction $x \mapsto \displaystyle\int_0^T e^{-xt} f(t)\,dt$ est continue sur $\mathbb{R}$ (la fonction $(x,t) \mapsto e^{-xt} f(t)$ est continue sur $\mathbb{R} \times \mathbb{R}^+$ et l'intégration se fait sur un segment), ce qui nous donne :

$$\forall T > 0,\ 0 \leq \lim_{x\to0^+} \int_0^T e^{-xt} f(t)\,dt = \int_0^T f(t)\,dt \leq \lim_{x\to0^+} \mathcal{L}(f)(x) = \ell$$

Il en résulte que l'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty} f(t)\,dt$ est convergente et la question **III.7** nous dit que :

$$\int_0^{+\infty} f(t)\,dt = \lim_{x\to0^+} \mathcal{L}(f)(x) = \ell$$

10.

(a) La fonction $f : t \mapsto \dfrac{\sin(t)}{t}$ est continue sur $\mathbb{R}^{+,*}$ et avec $\lim\limits_{t\to 0^+} \dfrac{\sin(t)}{t} = 1$, on déduit qu'elle est continue en 0. C'est donc un élément de $\mathcal{C}$, ainsi que f^2.
Avec $0 \leq \dfrac{\sin^2(t)}{t^2} \leq \dfrac{1}{t^2}$ pour tout $t > 0$, on déduit que $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{\sin^2(t)}{t^2} dt$ est convergente et aussi $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\sin^2(t)}{t^2} dt$.
Pour tous réel $T > \varepsilon > 0$, une intégration par parties faite en posant :

$$\begin{cases} u(t) = \dfrac{1}{t},\ u'(t) = -\dfrac{1}{t^2} \\ v'(t) = \sin(t),\ v(t) = 1 - \cos(t) \end{cases}$$

donne :

$$\begin{aligned} \int_\varepsilon^T \frac{\sin(t)}{t} dt &= \left[\frac{1-\cos(t)}{t}\right]_\varepsilon^T + \int_\varepsilon^T \frac{1-\cos(t)}{t^2} dt \\ &= \left[\frac{1-\cos(t)}{t}\right]_\varepsilon^T + 2\int_\varepsilon^T \frac{\sin^2\left(\frac{t}{2}\right)}{t^2} dt \\ &= \left[\frac{1-\cos(t)}{t}\right]_\varepsilon^T + \int_{\frac{\varepsilon}{2}}^{\frac{T}{2}} \frac{\sin^2(u)}{u^2} du \end{aligned}$$

puis avec :

$$\frac{1-\cos(t)}{t} \underset{t\to 0}{\sim} \frac{t}{2} \underset{t\to 0}{\to} \text{ et } 0 \leq \frac{1-\cos(t)}{t} \leq \frac{2}{t} \underset{t\to+\infty}{\to} 0$$

on déduit que $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\sin(t)}{t} dt$ converge et :

$$\int_0^{+\infty} \frac{\sin(t)}{t} dt = \int_0^{+\infty} \frac{\sin^2(t)}{t^2} dt$$

(b) De la question précédente, on déduit que $\sigma(f) \leq 0$ et avec $t \cdot f(t) = \sin(t)$, on déduit que $\sigma(f) \geq \sigma(t \cdot f) = \sigma(\sin) = 0$ (questions **III.5** et **III.6b**), donc $\sigma(f) = 0$.

(c) La fonction $\mathcal{L}(f)$ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}^{+,*}$ avec :

$$\forall x > 0,\ \mathcal{L}(f)'(x) = -\mathcal{L}(tf)(x) = -\mathcal{L}(\sin(t))(x) = -\frac{1}{x^2+1}$$

(question **I.5**), ce qui nous donne :

$$\forall x > 0,\ \mathcal{L}(f)(x) = -\arctan(x) + C$$

Puis avec $\lim\limits_{x\to+\infty} \mathcal{L}(f)(x) = 0$, on déduit que $C = \dfrac{\pi}{2}$, soit :

$$\forall x > 0,\ \mathcal{L}(f)(x) = \int_0^{+\infty} e^{-xt} \frac{\sin(t)}{t} dt = \frac{\pi}{2} - \arctan(x)$$

et avec la continuité de $\mathcal{L}(f)$ sur $\mathbb{R}^+$ (question **III.7**), on déduit que :

$$\int_0^{+\infty} \frac{\sin(t)}{t} dt = \lim_{x\to 0^+} \mathcal{L}(f)(x) = \frac{\pi}{2}$$

11.

(a) La fonction g est continue sur $\mathbb{R}^{+,*}$ et l'hypothèse $\lim_{t\to 0^+}\dfrac{f(t)}{t}=\ell$ nous dit qu'elle se prolonge par continuité en 0.

Comme $\displaystyle\int_0^{+\infty} g(t)\,dt$ est convergente, on a $\sigma(g)\leq 0$.

De $\lim_{t\to 0^+}\dfrac{f(t)}{t}=\ell$, on déduit que $f(0)=\lim_{t\to 0^+} f(t)=0$, on a donc $f=t\cdot g$ sur $\mathbb{R}^+$ et $\sigma(f)=\sigma(tg)\leq\sigma(g)\leq 0$.

(b) Comme $\sigma(g)\leq 0$, la fonction $\mathcal{L}(g)$ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}^{+,*}$ avec :

$$\forall x>0,\ \mathcal{L}(g)'(x)=-\mathcal{L}(tg)(x)=-\mathcal{L}(f)(x)$$

il existe donc une constante complexe C telle que :

$$\forall x>0,\ \mathcal{L}(g)(x)=-\int_0^x \mathcal{L}(f)(t)\,dt+C$$

Avec $\lim_{x\to+\infty}\mathcal{L}(g)(x)=0$ (question **III.1**), on déduit que $\displaystyle\int_0^{+\infty}\mathcal{L}(f)(t)\,dt$ converge et $C=\displaystyle\int_0^{+\infty}\mathcal{L}(f)(t)\,dt$, ce qui nous donne :

$$\forall x>0,\ \mathcal{L}(g)(x)=-\int_0^x\mathcal{L}(f)(t)\,dt+\int_0^{+\infty}\mathcal{L}(f)(t)\,dt=\int_x^{+\infty}\mathcal{L}(f)(t)\,dt$$

Comme $\mathcal{L}(g)(0)$ est définie, la fonction $\mathcal{L}(g)$ est continue sur $\mathbb{R}^+$ (question **III.7**) et :

$$\mathcal{L}(g)(0)=\int_0^{+\infty}\frac{f(t)}{t}dt=\lim_{x\to 0^+}\mathcal{L}(g)(x)=\int_0^{+\infty}\mathcal{L}(f)(t)\,dt$$

Pour $f(t)=\sin(t)$, on retrouve :

$$\mathcal{L}(g)(x)=\int_x^{+\infty}\mathcal{L}(f)(t)\,dt=\int_x^{+\infty}\frac{dt}{t^2+1}dt=\frac{\pi}{2}-\arctan(x)$$

et $\mathcal{L}(g)(0)=\dfrac{\pi}{2}$.

(c) Pour $f(t)=|\sin(t)|$, on a pour $x>0$:

$$\begin{aligned}\mathcal{L}(f)(x)&=\int_0^{+\infty}e^{-xt}|\sin(t)|\,dt=\lim_{n\to+\infty}\int_0^{n\pi}e^{-xt}|\sin(t)|\,dt\\&=\sum_{n=0}^{+\infty}\int_{n\pi}^{(n+1)\pi}e^{-xt}|\sin(t)|\,dt=\sum_{n=0}^{+\infty}\int_0^{\pi}e^{-x(t+n\pi)}|\sin(t+n\pi)|\,dt\\&=\left(\sum_{n=0}^{+\infty}\left(e^{-x\pi}\right)^n\right)\int_0^{\pi}e^{-xt}\sin(t)\,dt=\frac{1}{1-e^{-x\pi}}\int_0^{\pi}e^{-xt}\sin(t)\,dt\end{aligned}$$

avec :

$$\begin{aligned}\int_0^{\pi}e^{-xt}\sin(t)\,dt&=\Im\left(\int_0^{\pi}e^{(i-x)t}dt\right)=\Im\left(\frac{e^{(i-x)\pi}-1}{i-x}\right)\\&=\Im\left(\frac{e^{-x\pi}+1}{x-i}\right)=\frac{e^{-x\pi}+1}{x^2+1}\end{aligned}$$

Donc :

$$\begin{aligned}\mathcal{L}(f)(x) &= \frac{1}{x^2+1}\frac{1+e^{-x\pi}}{1-e^{-x\pi}} = \frac{1}{x^2+1}\frac{e^{\frac{x\pi}{2}}+e^{-\frac{x\pi}{2}}}{e^{\frac{x\pi}{2}}-e^{-\frac{x\pi}{2}}} \\ &= \frac{1}{x^2+1}\frac{\operatorname{ch}\left(\frac{x\pi}{2}\right)}{\operatorname{sh}\left(\frac{x\pi}{2}\right)} = \frac{1}{x^2+1}\frac{1}{\operatorname{th}\left(\frac{x\pi}{2}\right)}\end{aligned}$$

et :

$$\mathcal{L}(g)(x) = \int_x^{+\infty} \frac{1}{t^2+1}\frac{1+e^{-t\pi}}{1-e^{-t\pi}}dt = \int_x^{+\infty}\frac{1}{t^2+1}\frac{1}{\operatorname{th}\left(\frac{t\pi}{2}\right)}dt =$$

– IV – Théorèmes taubériens

1. Si $f(t) = \underset{t\to+\infty}{O}\left(\frac{1}{t}\right)$, il existe alors un réel $M>0$ tel que $|t\cdot f(t)| \leq M$ pour tout $t \geq 0$. Pour tous nombres réels $x>0$ et $t>0$, on a alors :

$$\left|e^{-xt}f(t)\right| \leq M\frac{e^{-xt}}{t}$$

avec $\int_1^{+\infty}\frac{e^{-xt}}{t}dt < +\infty$ puisque $x>0$ (on peut le justifier avec $\lim\limits_{t\to+\infty}\left(t^2\frac{e^{-xt}}{t}\right)=0$), donc l'intégrale $\int_1^{+\infty} e^{-xt}f(t)\,dt$ est absolument convergente et aussi $\int_0^{+\infty} e^{-xt}f(t)\,dt$ puisque f est continue sur $\mathbb{R}^+$.
On a donc $\sigma(f) \leq 0$.

2.
   (a) Si $f(t) = \underset{t\to+\infty}{o}\left(\frac{1}{t}\right)$, on a alors $f(t) = \underset{t\to+\infty}{O}\left(\frac{1}{t}\right)$ et $\sigma(f) \leq 0$ d'après la question précédente.

   (b) Si $\lim\limits_{t\to+\infty}(t\cdot f(t)) = 0$, on a alors $\lim\limits_{t\to+\infty}(t\cdot|f(t)|) = 0$ et le théorème de Cesàro (question **III.6**) nous dit que $\lim\limits_{T\to+\infty}\frac{1}{T}\int_0^T t\,|f(t)|\,dt = 0$.

   (c) Comme $\lim\limits_{t\to+\infty}(t\cdot f(t)) = 0$, la fonction $t\cdot f$ est bornée et on peut poser $M_T = \sup\limits_{t\geq T}(t\,|f(t)|)$.
   Pour $x>0$ et $T>0$, on a :

$$\left|\int_T^{+\infty} e^{-xt}f(t)\,dt\right| \leq \int_T^{+\infty}\frac{e^{-xt}}{t}t\,|f(t)|\,dt \leq \frac{M_T}{T}\int_T^{+\infty}e^{-xt}dt = \frac{M_T}{T}\frac{e^{-xT}}{x}$$

   (d) Pour $x>0$ et $T>0$, on a :

$$\begin{aligned}\left|\mathcal{L}(f)(x) - \int_0^T f(t)\,dt\right| &= \left|\int_0^{+\infty} e^{-xt}f(t)\,dt - \int_0^T f(t)\,dt\right| \\ &\leq \int_0^T\left(1-e^{-xt}\right)|f(t)|\,dt + \left|\int_T^{+\infty}e^{-xt}f(t)\,dt\right| \\ &\leq \int_0^T\left(1-e^{-xt}\right)|f(t)|\,dt + \frac{e^{-xT}}{xT}\sup_{t\geq T}(t\,|f(t)|)\end{aligned}$$

Prenons $x=\dfrac{1}{T}$ avec $T>0$ destiné à tendre vers l'infini. Cela nous donne :

$$\begin{aligned}\left|\mathcal{L}(f)\left(\frac{1}{T}\right)-\int_0^T f(t)\,dt\right| &\leq \int_0^T \left(1-e^{-\frac{t}{T}}\right)|f(t)|\,dt+\frac{1}{e}\sup_{t\geq T}\left(t\,|f(t)|\right)\\ &\leq \int_0^T \left(1-e^{-\frac{t}{T}}\right)|f(t)|\,dt+\sup_{t\geq T}\left(t\,|f(t)|\right)\end{aligned}$$

Pour $\varepsilon>0$, on peut trouver $T_\varepsilon>0$ tel que $t\,|f(t)|<\varepsilon$ pour tout $t\geq T_\varepsilon$ et pour $T>T_\varepsilon$, on a :

$$\left|\mathcal{L}(f)\left(\frac{1}{T}\right)-\int_0^T f(t)\,dt\right| \leq \int_0^T \left(1-e^{-\frac{t}{T}}\right)|f(t)|\,dt+\varepsilon$$

En utilisant le fait que :

$$\forall u\geq 0,\ 1-e^{-u}=\int_0^u e^{-t}dt\leq u$$

on en déduit que :

$$\left|\mathcal{L}(f)\left(\frac{1}{T}\right)-\int_0^T f(t)\,dt\right| \leq \frac{1}{T}\int_0^T t\,|f(t)|\,dt+\varepsilon$$

et sachant que $\lim\limits_{T\to+\infty}\dfrac{1}{T}\displaystyle\int_0^T t\,|f(t)|\,dt=0$, on peut trouver $T'_\varepsilon\geq T_\varepsilon$ tel que $\dfrac{1}{T}\displaystyle\int_0^T t\,|f(t)|\,dt<\varepsilon$ pour tout $T>T'_\varepsilon$, ce qui nous donne $\left|\mathcal{L}(f)\left(\dfrac{1}{T}\right)-\displaystyle\int_0^T f(t)\,dt\right|\leq 2\varepsilon$.

On a donc ainsi montré que $\displaystyle\int_0^{+\infty} f(t)\,dt$ est convergente avec :

$$\int_0^{+\infty} f(t)\,dt=\lim_{T\to+\infty}\int_0^T f(t)\,dt=\lim_{T\to+\infty}\mathcal{L}(f)\left(\frac{1}{T}\right)=\lim_{x\to 0^+}\mathcal{L}(f)(x)$$

et $\mathcal{L}(f)$ est continue sur $\mathbb{R}^+$.

3. Si $\displaystyle\int_0^{+\infty} f(t)\,dt$ converge, on a vu que $\lim\limits_{x\to 0^+}\mathcal{L}(f)(x)=\displaystyle\int_0^{+\infty} f(t)\,dt$ (l'hypothèse $f(t)=\underset{t\to+\infty}{o}\left(\dfrac{1}{t}\right)$ n'est pas utilisée ici).

   Réciproquement si $\lim\limits_{x\to 0^+}\mathcal{L}(f)(x)=\ell$, on vient de voir que l'hypothèse $f(t)=\underset{t\to+\infty}{o}\left(\dfrac{1}{t}\right)$ nous dit que $\displaystyle\int_0^{+\infty} f(t)\,dt=\ell$.

4.
   (a) Pour $t>0$, on a :

   $$g(t)=\frac{1}{t^2}\int_0^t u\,(f(u)-f(0))\,du+\frac{f(0)}{2}$$

   et comme f est continue en 0, pour tout réel $\varepsilon>0$, il existe un réel $\eta>0$ tel que $|f(u)-f(0)|<\varepsilon$ pour tout $u\in[0,\eta]$. Il en résulte que pour $t\in\,]0,\eta]$, on a :

   $$\left|\frac{1}{t^2}\int_0^t u\,(f(u)-f(0))\,du\right|\leq\frac{\varepsilon}{t^2}\int_0^t udu=\frac{\varepsilon}{2}$$

   On a donc $\lim\limits_{t\to 0^+}\dfrac{1}{t^2}\displaystyle\int_0^t u\,(f(u)-f(0))\,du=0$ et $\lim\limits_{t\to 0^+}g(t)=\dfrac{f(0)}{2}$.
   La fonction g est donc continue sur $\mathbb{R}^+$, c'est donc un élément de $\mathcal{C}$.

(b) On a $g \in \mathcal{C}$ et :

$$\lim_{t \to +\infty} (t \cdot g(t)) = \lim_{t \to +\infty} \frac{1}{t} \int_0^t u f(u)\, du = 0$$

(c'est la troisième hypothèse faite sur f), soit $g(t) \underset{t \to +\infty}{=} o\left(\frac{1}{t}\right)$ et $\sigma(g) \leq 0$ (question **IV.2a**).

(c) Comme $\sigma(tg) \leq \sigma(g) \leq 0$, $\mathcal{L}(t \cdot g)(x)$ est bien défini pour $x > 0$.
Avec $\lim\limits_{t \to +\infty} (t \cdot g(t)) = 0$, on déduit que pour $\varepsilon > 0$, il existe $T_\varepsilon > 0$ tel que $|t \cdot g(t)| < \varepsilon$ pour $t \geq T_\varepsilon$ et en conséquence :

$$\begin{aligned} |\mathcal{L}(t \cdot g)(x)| &= \left| \int_0^{T_\varepsilon} e^{-xt} t \cdot g(t)\, dt + \int_{T_\varepsilon}^{+\infty} e^{-xt} t \cdot g(t)\, dt \right| \\ &\leq \int_0^{T_\varepsilon} t \cdot |g(t)|\, dt + \varepsilon \int_{T_\varepsilon}^{+\infty} e^{-xt} dt = I_\varepsilon + \varepsilon \frac{e^{-xT_\varepsilon}}{x} = I_\varepsilon + \frac{\varepsilon}{x} \end{aligned}$$

ce qui nous donne :

$$|x \mathcal{L}(t \cdot g)(x)| \leq x I_\varepsilon + \varepsilon \leq 2\varepsilon$$

pour $0 < x < \dfrac{\varepsilon}{I_\varepsilon}$ (si $I_\varepsilon > 0$, sinon l'inégalité est automatiquement vérifiée).

(d) Pour $x > 0$ et $0 < \varepsilon < T$, une intégration par parties nous donne, en tenant compte de $\left(t^2 g(t)\right)' = t \cdot f(t)$:

$$\begin{aligned} \int_\varepsilon^T e^{-xt} f(t)\, dt &= \int_\varepsilon^T \frac{e^{-xt}}{t} t \cdot f(t)\, dt = \int_\varepsilon^T \frac{e^{-xt}}{t} \left(t^2 g(t)\right)' dt \\ &= \left[\frac{e^{-xt}}{t} t^2 g(t)\right]_\varepsilon^T - \int_\varepsilon^T \left(-x \frac{e^{-xt}}{t} - \frac{e^{-xt}}{t^2}\right) t^2 g(t)\, dt \\ &= \left[e^{-xt} \cdot t \cdot g(t)\right]_\varepsilon^T + x \int_\varepsilon^T e^{-xt} \cdot t \cdot g(t)\, dt + \int_\varepsilon^T e^{-xt} g(t)\, dt \end{aligned}$$

et faisant tendre ε vers 0, on obtient :

$$\int_0^T e^{-xt} f(t)\, dt = e^{-xT} \cdot T \cdot g(T) + x \int_0^T e^{-xt} \cdot t \cdot g(t)\, dt + \int_0^T e^{-xt} g(t)\, dt$$

avec $\lim\limits_{T \to +\infty} (T \cdot g(T)) = 0 = \lim\limits_{T \to +\infty} e^{-xT}$, $\sigma(f) \leq 0$ et $\sigma(tg) \leq \sigma(g) \leq 0$. Il en résulte que :

$$\mathcal{L}(f)(x) = \mathcal{L}(g)(x) + x \mathcal{L}(t \cdot g)(x)$$

(e) Avec $\lim\limits_{x \to 0^+} x \mathcal{L}(t \cdot g)(x) = 0$ (question **IV.4c**), on en déduit que :

$$\lim_{x \to 0^+} \mathcal{L}(g)(x) = \lim_{x \to 0^+} \mathcal{L}(f)(x) = \ell.$$

(f) Comme $g \in \mathcal{C}$ est telle que $\lim\limits_{t \to +\infty} (t \cdot g(t)) = 0$, $\lim\limits_{x \to 0^+} \mathcal{L}(g)(x) = \ell$, le théorème de Tauber faible (question **IV.2**) nous dit que :

$$\int_0^{+\infty} g(t)\, dt = \lim_{x \to 0^+} \mathcal{L}(g)(x) = \ell$$

L'intégration par parties faite précédemment est encore valable pour $x=0$:

$$\begin{aligned}\int_{\varepsilon}^{T} f(t)\,dt &= \int_{\varepsilon}^{T} \frac{1}{t} t \cdot f(t)\,dt = \int_{\varepsilon}^{T} \frac{1}{t}\left(t^2 g(t)\right)'\,dt \\ &= \left[\frac{1}{t}t^2 g(t)\right]_{\varepsilon}^{T} + \int_{\varepsilon}^{T} \frac{1}{t^2} t^2 g(t)\,dt \\ &= \left[t \cdot g(t)\right]_{\varepsilon}^{T} + \int_{\varepsilon}^{T} g(t)\,dt\end{aligned}$$

et faisant tendre (ε, T) vers $(0,+\infty)$, on en déduit que l'intégrale $\int_{0}^{+\infty} f(t)\,dt$ est convergente avec :

$$\int_{0}^{+\infty} f(t)\,dt = \int_{0}^{+\infty} g(t)\,dt = \ell$$

5. Comme $\lim\limits_{x\to 0^+} \varphi(x) = \gamma$, la fonction φ se prolonge par continuité en 0, donc $\varphi \in \mathcal{C}$.
La formule de Taylor à l'ordre 2 nous donne pour $0 < \alpha < x$:

$$\varphi(\alpha) = \varphi(x) + (\alpha - x)\varphi'(x) + \frac{(\alpha - x)^2}{2}\varphi''(c_{\alpha,x})$$

avec $\alpha < c_{\alpha,x} < x$, donc :

$$(x-\alpha)\varphi'(x) = \varphi(x) - \varphi(\alpha) + \frac{(\alpha - x)^2}{2}\varphi''(c_{\alpha,x})$$

(la fonction φ n'étant pas supposée de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[0,x]$, on ne peut utiliser la formule de Taylor à l'ordre 2 sur cet intervalle) et :

$$\begin{aligned}\left|(x-\alpha)\varphi'(x)\right| &\leq \left|\varphi(x) - \varphi(\alpha)\right| + \frac{(\alpha - x)^2}{2}\frac{M}{c_{\alpha,x}^2} \\ &\leq \left|\varphi(x) - \varphi(\alpha)\right| + \frac{(\alpha - x)^2}{2}\frac{M}{\alpha^2} = \left|\varphi(x) - \varphi(\alpha)\right| + \frac{M}{2}\left(1 - \frac{x}{\alpha}\right)^2\end{aligned}$$

Prenant $\alpha = \lambda x$ avec $0 < \lambda < 1$, on obtient :

$$(1-\lambda)\left|x \cdot \varphi'(x)\right| \leq \left|\varphi(x) - \varphi(\lambda x)\right| + \frac{M}{2}(1-\lambda)^2$$

soit :

$$\left|x \cdot \varphi'(x)\right| \leq \frac{\left|\varphi(x) - \varphi(\lambda x)\right|}{1-\lambda} + \frac{M}{2}(1-\lambda)$$

Pour $\varepsilon > 0$ donné, on choisit $\lambda \in \left]0,1\right[$ tel que $\frac{M}{2}(1-\lambda) < \varepsilon$ et pour λ ainsi fixé, on a $\lim\limits_{x\to 0^+} \frac{\left|\varphi(x) - \varphi(\lambda x)\right|}{1-\lambda} = 0$, on peut donc trouver un réel $\eta > 0$ tel que $\frac{\left|\varphi(x) - \varphi(\lambda x)\right|}{1-\lambda} < \varepsilon$ pour tout $t \in [0,\eta]$, ce qui nous donne $\left|x \cdot \varphi'(x)\right| < \varepsilon$ pour tout $x \in [0,\eta]$.
On a donc $\lim\limits_{x\to 0^+} x \cdot \varphi'(x) = 0$.

6.

(a) Comme $\sigma(f) \leq 0$, la fonction $\mathcal{L}(f)$ est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}^{+,*}$ avec :

$$\forall x > 0,\ \mathcal{L}(f)''(x) = \mathcal{L}\left(t^2 f\right)(x)$$

Comme $f(t) = \underset{t \to +\infty}{O}\left(\frac{1}{t}\right)$, et pour tout $x > 0$, on a :

$$\begin{aligned} x^2 \left|\mathcal{L}(f)''(x)\right| &= x^2 \left|\int_0^{+\infty} e^{-xt} t^2 f(t)\, dt\right| \\ &\leq M x^2 \int_0^{+\infty} t \cdot e^{-xt} dt = M x^2 \mathcal{L}(t)(x) = M \end{aligned}$$

Enfin avec $\lim_{x \to 0^+} \mathcal{L}(f)(x) = \ell$, on déduit du lemme de Littlewood que $\lim_{x \to 0^+} x \cdot \mathcal{L}(f)'(x) = 0$.

(b) La fonction φ est dans $\mathcal{C}$ et à valeurs positives avec :

$$\forall x > 0,\ \mathcal{L}(\varphi)(x) = \mathcal{L}(M)(x) - \mathcal{L}(t \cdot f)(x) = \frac{M}{x} + \mathcal{L}(f)'(x)$$

soit :

$$\forall x > 0,\ x \cdot \mathcal{L}(\varphi)(x) = M + x \cdot \mathcal{L}(f)'(x) \underset{x \to 0^+}{\to} M$$

On déduit alors de **IV.**(R) que :

$$\lim_{T \to +\infty} \frac{1}{T} \int_0^T \varphi(t)\, dt = M - \lim_{T \to +\infty} \frac{1}{T} \int_0^T t \cdot f(t)\, dt = M$$

et $\lim_{T \to +\infty} \frac{1}{T} \int_0^T t \cdot f(t)\, dt = 0$.

On déduit alors de **IV.4** que $\int_0^{+\infty} f(t)\, dt = \ell$.