Formes bilinéaires et quadratiques

– 0 – Prolégomènes[1]

Caractéristique d'un corps

Si $(\mathbb{K}, +, \cdot)$ est un corps commutatif, alors l'application $\varphi : n \mapsto n \cdot 1_{\mathbb{K}}$, où $1_{\mathbb{K}}$ est l'élément neutre de $\mathbb{K}$ pour le produit, est un morphisme d'anneaux de $\mathbb{Z}$ dans $\mathbb{K}$ et son noyau est un sous-groupe de $\mathbb{Z}$, il existe donc un unique entier naturel p tel que :

$$\ker(\varphi) = \{n \in \mathbb{Z} \mid n \cdot 1_{\mathbb{K}} = 0_{\mathbb{K}}\} = p\mathbb{Z}$$

Cet entier p est la caractéristique de $\mathbb{K}$.

Comme $1 \cdot 1_{\mathbb{K}} = 1_{\mathbb{K}} \neq 0_{\mathbb{K}}$, on a $p \neq 1$.

On a donc $p = 0$ ou $p \geq 2$ et dans ce cas $p = \inf\{n \in \mathbb{N} \setminus \{0, 1\} \mid n \cdot 1_{\mathbb{K}} = 0_{\mathbb{K}}\}$.

Formes bilinéaires

Dans ce qui suit, E est un espace vectoriel non réduit à $\{0\}$ sur un corps $\mathbb{K}$ de caractéristique différente de 2.

On désigne par E^* l'espace dual de E, c'est-à-dire l'espace vectoriel des formes linéaires sur E.

Si E est de dimension $n \geq 1$ et $\mathcal{B} = (e_i)_{1 \leq i \leq n}$ est une base de E, on associe alors à tout vecteur $x = \sum_{i=1}^{n} x_i e_i$ de E, le vecteur colonne $X = (x_i)_{1 \leq i \leq n}$ dans $\mathbb{K}^n$.

On rappelle qu'une forme bilinéaire sur E est une application :

$$\begin{array}{rccc} \varphi : & E \times E & \to & \mathbb{K} \\ & (x, y) & \mapsto & \varphi(x, y) \end{array}$$

telle que pour tout x dans E l'application $y \mapsto \varphi(x, y)$ est linéaire et pour tout y dans E l'application $x \mapsto \varphi(x, y)$ est linéaire.

On dit que φ est symétrique si $\varphi(y, x) = \varphi(x, y)$ pour tous x, y dans E.

On dit que φ est anti-symétrique (ou alternée) si $\varphi(y, x) = -\varphi(x, y)$ pour tous x, y dans E.

On notera respectivement $Bil(E)$, $Bil_s(E)$ et $Bil_a(E)$ l'ensemble des formes bilinéaires, bilinéaires symétriques et bilinéaires alternées sur E.

On vérifie facilement que $Bil(E)$ est un espace vectoriel et que $Bil_s(E)$ et $Bil_a(E)$ sont des sous-espaces vectoriels de $Bil(E)$.

Si E est de dimension n et $\mathcal{B} = (e_i)_{1 \leq i \leq n}$ est une base de E, alors la matrice d'une forme bilinéaire φ dans $\mathcal{B}$ est la matrice carrée d'ordre n :

$$A = ((\varphi(e_i, e_j)))_{1 \leq i,j \leq n}$$

et pour tous x, y dans E, on a :

$$\varphi(x, y) = {}^tXAY$$

La forme bilinéaire φ est symétrique [resp. alternée] si, et seulement si, A symétrique [resp. alternée].

Si $\mathcal{B}'$ est une autre base de E et P la matrice de passage de $\mathcal{B}$ à $\mathcal{B}'$, alors la matrice de φ dans $\mathcal{B}'$ est $A' = {}^tPAP$.

Le discriminant dans $\mathcal{B} = (e_i)_{1 \leq i \leq n}$ de φ est le déterminant de la matrice de φ dans cette base. On le note $\Delta_{\mathcal{B}}(\varphi)$.

Si $\mathcal{B}'$ est une autre base de E et P la matrice de passage de $\mathcal{B}$ à $\mathcal{B}'$, on a alors $\Delta_{\mathcal{B}'}(\varphi) = (\det(P))^2 \Delta_{\mathcal{B}}(\varphi)$.

Formes quadratiques

[1]Longue préface explicative en tête d'un livre. Exposé des principes dont la connaissance est nécessaire à l'étude d'une science.

Une forme quadratique sur E est une application q définie de E dans $\mathbb{K}$ par :

$$\forall x \in E,\ q(x) = \varphi(x, x)$$

où φ est une forme bilinéaire symétrique.

L'ensemble $Q(E)$ des formes quadratiques sur E est un espace vectoriel et l'application qui associe à une forme quadratique q sa forme polaire φ réalise un isomorphisme d'espaces vectoriels de $Q(E)$ sur l'espace $Bil_s(E)$ des formes bilinéaires symétriques sur E.

Dans le cas ou E est de dimension $n \geq 1$, le choix d'une base permet d'écrire une forme quadratique sous la forme :

$$q(x) = \varphi(x, x) = {}^tXAX = \sum_{1 \leq i,j \leq n} a_{ij} x_i x_j = \sum_{i=1}^{n} a_{ii} x_i^2 + 2 \sum_{1 \leq i < j \leq n} a_{ij} x_i x_j$$

Réciproquement une fonction q ainsi définie dans une base $\mathcal{B}$ de E est une forme quadratique de matrice $A = ((a_{ij}))_{1 \leq i,j \leq n}$ dans cette base.

Le choix d'une base de E permet donc de réaliser un isomorphisme d'espaces vectoriels de $Q(E)$ sur l'espace des polynômes homogènes de degré 2 à n variables.

Pour $\mathbb{K} = \mathbb{R}$, on dit qu'un forme bilinéaire symétrique φ (ou de manière équivalente que la forme quadratique q) est positive [resp. négative] si $q(x) \geq 0$ [resp. $q(x) \leq 0$] pour tout x dans E.

On dit qu'une forme quadratique q sur E est définie si $q(x) \neq 0$ pour tout $x \in E \setminus \{0\}$.

Orthogonalité, noyau et rang d'une forme quadratique

φ est une forme bilinéaire symétrique sur E et q la forme quadratique associée.

On dit que deux vecteurs x, y de E sont orthogonaux relativement à φ si $\varphi(x, y) = 0$.

Si X est une partie non vide E, l'orthogonal de X relativement à φ est le sous-ensemble de E formé des vecteurs orthogonaux à tous les vecteurs de X. On le note $X^\perp$ et on a :

$$X^\perp = \{y \in E \mid \forall x \in X,\ \varphi(x, y) = 0\}.$$

Le noyau de q (ou de φ) est l'orthogonal de E. On le note $\ker(q)$ et on a :

$$\ker(q) = E^\perp = \{y \in E \mid \forall x \in E,\ \varphi(x, y) = 0\}$$

Ce noyau est un sous-espace vectoriel de E.

On dit que q (ou φ) est non dégénérée si son noyau est réduit à $\{0\}$.

Si E est de dimension n, le rang de q (ou de φ) est l'entier :

$$\mathrm{rg}(q) = n - \dim(\ker(q)).$$

Dans le cas où E est de dimension n, on dit qu'une base $(e_i)_{1 \leq i \leq n}$ est orthogonale relativement à q (ou à φ, ou q-orthogonale), si $\varphi(e_i, e_j) = 0$ pour tous $i \neq j$ compris entre 1 et n.

1 Énoncé

– I – Généralités

1. Soit $\mathbb{K}$ un corps commutatif de caractéristique p.
   (a) Montrer que p est soit nulle soit un nombre premier.
   (b) Dans le cas où $p = 0$, montrer que le corps $\mathbb{Q}$ des rationnels s'injecte dans $\mathbb{K}$ et $\mathbb{K}$ est infini.
   (c) Dans le cas où $p \geq 2$ est un nombre premier, montrer que le corps fini $\dfrac{\mathbb{Z}}{p\mathbb{Z}}$ s'injecte dans $\mathbb{K}$. En déduire qu'un corps fini est de cardinal p^n où p est un nombre premier égal à la caractéristique de $\mathbb{K}$.
2. Montrer que :
$$Bil(E) = Bil_s(E) \oplus Bil_a(E)$$
3. Montrer que si E est de dimension n, alors :
$$\dim_{\mathbb{K}}(Bil(E)) = n^2,\ \dim(Bil_s(E)) = \frac{n(n+1)}{2},\ \dim(Bil_a(E)) = \frac{n(n-1)}{2}$$
4. Montrer que pour tout sous-espace vectoriel F de E, la restriction d'une forme quadratique q à F est une forme quadratique sur F et que cette restriction est non dégénérée si, et seulement si, $F \cap F^{\perp} = \{0\}$.
5. Si E est de dimension $n \geq 1$, $\mathcal{B} = (e_i)_{1 \leq i \leq n}$ est une base de E, A la matrice de la forme quadratique q dans la base $\mathcal{B}$ et u l'endomorphisme de E de matrice A dans la base $\mathcal{B}$, montrer alors que :
$$\ker(q) = \ker(u).$$
6. On suppose que E est de dimension $n \geq 1$, q est une forme quadratique sur E et F est un sous-espace vectoriel de E.
   (a) Montrer que :
$$\dim(F) + \dim\left(F^{\perp}\right) \geq \dim(E)$$
   l'égalité étant réalisée pour q non dégénérée.
   (b) Montrer que $E = F \oplus F^{\perp}$ si, et seulement si, la restriction de q à F est non dégénérée.
7. Soient E, F deux espaces vectoriels, u une application linéaire de E dans F et φ une forme bilinéaire sur F.
   (a) Montrer que l'application ψ définie sur E^2 par :
$$\forall (x, y) \in E^2,\ \psi(x, y) = \varphi(u(x), u(y))$$
   est bilinéaire.
   (b) En supposant E et F de dimension finie et en désignant par $\mathcal{B}_1$ une base de E, $\mathcal{B}_2$ une base de F, A la matrice de u dans les bases $\mathcal{B}_1$ et $\mathcal{B}_2$ et par B la matrice de φ dans la base $\mathcal{B}_2$, déterminer la matrice de ψ dans la base $\mathcal{B}_1$.
   (c) On suppose ici que E est de dimension $n \geq 1$ et que φ est une forme bilinéaire sur E.
   On appelle matrice de Gram d'une famille $(x_i)_{1 \leq i \leq n}$ de vecteurs de E, la matrice :
$$G(x_1, \cdots, x_n) = ((\varphi(x_i, x_j)))_{1 \leq i,j \leq n}$$
   et le déterminant de cette matrice, noté $g(x_1, \cdots, x_n)$, est appelé déterminant de Gram de la famille $(x_i)_{1 \leq i \leq n}$.

i. En désignant par $\mathcal{B} = (e_i)_{1\leq i\leq n}$ une base de E, montrer que :

$$g(x_1, \cdots, x_n) = (\det_{\mathcal{B}}(x_1, \cdots, x_n))^2 \Delta_{\mathcal{B}}(\varphi)$$

ii. Montrer que pour tout endomorphisme u de E, on a :

$$g(u(x_1), \cdots, u(x_n)) = (\det(u))^2 g(x_1, \cdots, x_n)$$

8. Montrer que si q est une forme quadratique sur $\mathbb{R}^n$, alors sa forme polaire φ est donnée par :

$$\varphi(x, y) = \frac{1}{2}\sum_{j=1}^{n} \frac{\partial q}{\partial x_j}(x) y_j = \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n} \frac{\partial q}{\partial y_i}(y) x_i$$

9. On suppose que E est de dimension $n \geq 1$. Montrer que pour toute base $(\ell_i)_{1\leq i\leq n}$ de l'espace dual E^*, il existe une unique base $(f_i)_{1\leq i\leq n}$ de E telle que :

$$\ell_i(f_j) = \delta_{ij}\begin{cases} 1 \text{ si } i = j \\ 0 \text{ si } i \neq j \end{cases} \quad (1 \leq i, j \leq n)$$

(on dit que $(f_i)_{1\leq i\leq n}$ est la base anté-duale de $(\ell_i)_{1\leq i\leq n}$).

10. Montrer que si q est une forme quadratique définie (dans le sens où $q(x) \neq 0$ pour tout $x \neq 0$) sur un espace vectoriel réel E de dimension finie, elle est alors positive ou négative.

11. Montrer que si q est une forme quadratique positive sur un espace vectoriel réel E, on a alors pour tous vecteurs x, y dans $\mathbb{R}^n$:

$$|\varphi(x, y)| \leq \sqrt{q(x)}\sqrt{q(y)},$$

(inégalité de Cauchy-Schwarz). En déduire que $\ker(q) = q^{-1}\{0\}$ (le noyau de q est égal à son cône isotrope).

– II – Réduction des formes quadratiques

E est de dimension $n \geq 1$, q est une forme quadratique non nulle sur E de forme polaire φ.

1. Montrer qu'il existe une base $(f_i)_{1\leq i\leq n}$ de E orthogonale pour q (théorème de réduction de Gauss).

2. Dans une telle base orthogonale, l'expression de q est :

$$\forall x = \sum_{i=1}^{n} y_i f_i \in E, \ q(x) = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i y_i^2$$

où $\lambda_i = q(f_i)$ et $y_i = \ell_i(x)$ pour i compris entre 1 et n, en désignant par $(\ell_i)_{1\leq i\leq n}$ la base duale de la base q-orthogonale $(f_i)_{1\leq i\leq n}$.

Comme q est non nulle, les λ_i ne sont pas tous nuls et on peut ordonner la base $(f_i)_{1\leq i\leq n}$ de sorte les λ_i pour i compris entre 1 et p soient tous non nuls et les autres nuls.

Montrer que l'entier p ainsi défini est le rang de q et que pour $1 \leq p \leq n-1$, on a :

$$\begin{aligned} \ker(q) &= \left\{x = \sum_{i=1}^{n} y_i f_i \in E \mid y_1 = \cdots = y_p = 0\right\} \\ &= \operatorname{Vect}\{e_{p+1}, \cdots, e_n\} \end{aligned}$$

(pour $p = n$, q est non dégénérée et $\ker(q) = \{0\}$).

3. Déduire de ce qui précède que pour toute matrice symétrique $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, il existe une matrice inversible P telle que ${}^tPAP$ soit diagonale.
4. Le théorème de réduction de Gauss peut aussi s'exprimer en disant que, pour q non nulle, il existe un entier p compris entre 1 et n, des scalaires non nuls $\lambda_1, \cdots, \lambda_p$ et des formes linéaires $\ell_1, \cdots, \ell_p$ indépendantes dans l'espace dual E^* tels que :

$$\forall x \in E,\ q(x) = \sum_{j=1}^{p} \lambda_j \ell_j^2(x)$$

Rappeler comment l'algorithme de Gauss permet de déterminer de tels scalaires λ_i et de telles formes linéaires ℓ_i.
5. En gardant toujours les mêmes notations, en déduire que la forme polaire φ de q est définie par :

$$\forall (x, y) \in E \times E,\ \varphi(x, y) = \sum_{j=1}^{p} \lambda_j \ell_j(x) \ell_j(y).$$

6. Expliquer comment l'algorithme de Gauss permet de déterminer une base q-orthogonale.
7. Soit q la forme quadratique définie sur $\mathbb{R}^3$ par :

$$q(x) = x^2 + (1+a) y^2 + \left(1 + a + a^2\right) z^2 + 2xy - 2ayz$$

où a est un scalaire donné.

   (a) Donner la matrice A de q dans la base canonique de $\mathbb{R}^3$.
   (b) Pour quelles valeurs de A la forme q est-elle non dégénérée ?
   (c) Réduire q et donner son rang en fonction de a.
   (d) Déterminer une base orthogonale pour q.
   (e) En déduire une matrice inversible P telle que $D = {}^tPAP$ soit diagonale.

8. On note $\mathcal{B} = (e_i)_{1 \le i \le n}$ la base canonique de $\mathbb{R}^n$ et on désigne par q la forme quadratique définie dans cette base par :

$$q(x) = \sum_{i=1}^{n} x_i^2 + \sum_{1 \le i < j \le n} x_i x_j.$$

   (a) Déterminer la matrice de q dans la base $\mathcal{B}$.
   (b) Déterminer le noyau et le rang de q.
   (c) On suppose que $n = 2$.
      i. Effectuer la décomposition en carrés de Gauss de q.
      ii. En déduire une base q-orthogonale de $\mathbb{R}^2$.
      iii. Écrire la matrice de q dans cette base.
   (d) On suppose que $n = 3$.
      i. Effectuer la décomposition en carrés de Gauss de q.
      ii. En déduire une base q-orthogonale de $\mathbb{R}^2$.
      iii. Écrire la matrice de q dans cette base.
   (e) On suppose que $n \ge 4$ et on note $f_1 = e_1$.
      i. Déterminer l'orthogonal relativement à q de e_1. On notera H cet orthogonal.

ii. Pour tout j compris entre 2 et n, on note $f_j = e_1 + \cdots + e_{j-1} - je_j$. Montrer que $(f_j)_{2\leq j\leq n}$ est une base de H.

iii. Calculer Af_j pour tout j compris entre 2 et n.

iv. Montrer que $\mathcal{B}' = (f_j)_{1\leq j\leq n}$ est une base q-orthogonale de $\mathbb{R}^n$.

v. Écrire la matrice de q dans la base $\mathcal{B}'$.

vi. En déduire une décomposition de q comme combinaison linéaire de carrés de formes linéaires indépendantes.

– III – Formes quadratiques réelles en dimension finie. Signature

q est une forme quadratique non nulle sur un espace vectoriel réel E de dimension $n \geq 1$ et on note φ sa forme polaire.

En désignant par $\mathcal{P}$ [resp. $\mathcal{N}$] l'ensemble de tous les sous-espaces vectoriels F de E tels que la restriction de q à F soit définie positive [resp. définie négative] ($\mathcal{P}$ ou $\mathcal{N}$ peut être vide), on définit la signature (s,t) de q par :

$$s = \begin{cases} 0 \text{ si } \mathcal{P} = \emptyset \\ \max\limits_{F\in\mathcal{P}} \dim(F) \text{ si } \mathcal{P} \neq \emptyset \end{cases}$$

et :

$$t = \begin{cases} 0 \text{ si } \mathcal{N} = \emptyset \\ \max\limits_{F\in\mathcal{N}} \dim(F) \text{ si } \mathcal{N} \neq \emptyset \end{cases}$$

1. Soient F, G deux sous-espaces vectoriels de E. Montrer que si la restriction de q à F est définie positive et la restriction de q à G est négative, alors $F \cap G = \{0\}$.
2. Soit $\mathcal{B} = (e_i)_{1\leq i\leq n}$ une base q-orthogonale de E. Montrer que :
$$s = \operatorname{card}\{i \in \{1,\cdots,n\} \mid q(e_i) > 0\}$$
$$t = \operatorname{card}\{i \in \{1,\cdots,n\} \mid q(e_i) < 0\}$$
et que $s + t = \operatorname{rg}(q)$.
3. Montrer que si q est de signature (s,t), on a la décomposition :
$$q = \sum_{j=1}^{s} \ell_j^2 - \sum_{j=s+1}^{s+t} \ell_j^2$$
où les ℓ_i sont des formes linéaires indépendantes et il existe une base q-orthogonale de E dans laquelle la matrice de q est :
$$D = \begin{pmatrix} I_s & 0 & 0 \\ 0 & -I_t & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$
(les blocs diagonaux I_s, $-I_t$ ou 0 n'existent pas si $s = 0$, $s = n$ ou $s + t = n$). Ce résultat est le théorème de Sylvester.
4. On désigne par $A = ((a_{ij}))_{1\leq i,j\leq n}$ la matrice de q dans une base $(e_i)_{1\leq i\leq n}$ de E. Montrer que q est définie positive si, et seulement si, tous les mineurs principaux de A sont strictement positifs (les mineurs principaux de A sont les déterminants des matrices extraites $A_k = ((a_{ij}))_{1\leq i,j\leq k}$ où k est compris entre 1 et n).
5. Montrer que l'ensemble $Q^{++}(E)$ des formes quadratiques définies positives sur E est un ouvert de $Q(E)$.

– IV – La forme quadratique $\mathrm{Tr}\,(M^2)$ sur $\mathcal{M}_n\,(\mathbb{R})$

Soient $E = \mathcal{M}_n\,(\mathbb{R})$ l'espace vectoriel des matrices carrées à coefficients réels d'ordre $n \geq 2$ et q l'application définie sur E par :

$$\forall M \in E,\ q\,(M) = \mathrm{Tr}\left(M^2\right).$$

1. En notant $M = ((x_{ij}))_{1 \leq i,j \leq n}$ un élément de E, donner une expression de q.
2. Montrer que q est une forme quadratique sur E.
3. Donner une expression la forme polaire φ de q.
4. Effectuer une réduction de q en combinaison linéaire de carrés de formes linéaires indépendantes dans le dual E^*.
5. Déterminer le rang, le noyau et la signature de q.
6. Soient $E_1 = \{M \in E \mid {}^tM = M\}$ le sous-espace vectoriel de E formé des matrices symétriques et $E_2 = \{M \in E \mid {}^tM = -M\}$ le sous-espace vectoriel de E formé des matrices antisymétriques.
   (a) Donner la dimension de E_1 en précisant une base.
   (b) Que dire des termes diagonaux d'une matrice $M = ((x_{ij}))_{1 \leq i,j \leq n} \in E_2$?
   (c) Donner la dimension de E_2 en précisant une base.
   (d) Montrer que $E = E_1 \oplus E_2$.
   (e) Montrer que $E_2 \subset E_1^{\perp}$, où $E_1^{\perp}$ désigne l'orthogonal de E_1 relativement à φ.
   (f) Déterminer $E_1^{\perp}$.
   (g) Montrer que la restriction de q à E_1 est définie positive et que la restriction de q à E_2 est définie négative.

– V – Formes quadratiques sur un corps fini

$\mathbb{K}$ est un corps fini (donc commutatif) de caractéristique $p \geq 3$, q une forme quadratique non nulle sur un $\mathbb{K}$-espace vectoriel E de dimension $n \geq 1$ et on note φ sa forme polaire.

Le cardinal de $\mathbb{K}$ est p^r avec $r \geq 1$.

On dit que $\lambda \in \mathbb{K}$ est un carré s'il existe $\mu \in \mathbb{K}$ tel que $\lambda = \mu^2$.

1.
   (a) Déterminer le noyau du morphisme de groupes multiplicatifs :
   $$\begin{array}{rccc} f: & \mathbb{K}^* & \to & \mathbb{K}^* \\ & t & \mapsto & t^2 \end{array}$$
   (b) Montrer qu'il y a dans $\mathbb{K}$, $\dfrac{p^r+1}{2}$ carrés et $\dfrac{p^r-1}{2}$ non carrés.
   (c) Soient a, b, c dans $\mathbb{K}$ avec a et b non nuls. Montrer que l'équation $a\lambda^2 + b\mu^2 = c$ aux inconnues λ, μ dans $\mathbb{K}$, a au moins une solution. En prenant $a = b = 1$ et c quelconque dans $\mathbb{K}$, on déduit que tout élément de $\mathbb{K}$ est somme de deux carrés.
2. Montrer que si q est de rang r, on a alors l'une des décompositions :

$$q = \sum_{j=1}^{r} \ell_j^2$$

si le discriminant de q dans une base de E est un carré, ou :

$$q = \sum_{j=1}^{r-1} \ell_j^2 + \delta \ell_r^2$$

dans le cas contraire, où les ℓ_i sont des formes linéaires indépendantes et δ est non carré dans $\mathbb{K}^*$ pour le deuxième cas. En déduire qu'il existe une base q-orthogonale de E dans laquelle la matrice de q est de l'une des formes suivantes :

$$D = \begin{pmatrix} I_r & 0 \\ 0 & 0_{n-r} \end{pmatrix} \text{ ou } D = \begin{pmatrix} I_{r-1} & 0 & 0 \\ 0 & \delta & 0 \\ 0 & 0 & 0_{n-r} \end{pmatrix}$$

avec δ non carré dans $\mathbb{K}^*$ (le blocs diagonaux I_{r-1} n'existe pas si $r = 1$).

2 Solution

– I – Généralités

1. On note 0 et 1 les neutres de $\mathbb{K}$ pour la somme et le produit.
   (a) Supposons $\mathbb{K}$ de caractéristique $p \geq 2$. Si p n'est pas premier, il s'écrit $p = ab$ avec $a \geq 2$ et $b \geq 2$ et $0 = p \cdot 1 = ab \cdot 1 = (a \cdot 1)(b \cdot 1)$ entraîne $a \cdot 1 = 0$ ou $b \cdot 1 = 0$ dans $\mathbb{K}$, ce qui est incompatible avec $2 \leq a, b < p$. L'entier p est donc premier.
   (b) Si p est nul, l'application $\varphi : n \mapsto n \cdot 1$ est alors injective et $\mathbb{Z}$ s'injecte dans $\mathbb{K}$. Cette application induit une injection

$$\psi : \frac{a}{b} \mapsto (a \cdot 1)(b \cdot 1)^{-1} = \varphi(a)(\varphi(b))^{-1}$$

   de $\mathbb{Q}$ dans $\mathbb{K}$ (si $b \neq 0$ dans $\mathbb{Z}$, on a alors $\varphi(b) \neq 0$ dans $\mathbb{K}$, puisque φ est injective).
   On vérifie d'abord que cette application est bien définie : si $\frac{a}{b} = \frac{a'}{b'}$ dans $\mathbb{Q}$, on a alors $ab' - a'b = 0$ et $\varphi(a)\varphi(b') - \varphi(a')\varphi(b)$ avec $\varphi(b)$ et $\varphi(b')$ non nuls dans $\mathbb{K}$, ce qui équivaut à $\varphi(a)(\varphi(b))^{-1} = \varphi(a')(\varphi(b'))^{-1}$.
   On vérifie ensuite qu'on a bien un morphisme de corps : on a :

$$\psi(1_{\mathbb{Q}}) = \varphi(1_{\mathbb{Q}})(\varphi(1_{\mathbb{Q}}))^{-1} = 1_{\mathbb{K}}$$

   et pour $\frac{a}{b}$ et $\frac{a'}{b'}$ dans $\mathbb{Q}$, on a :

$$\begin{aligned}\psi\left(\frac{a}{b} + \frac{a'}{b'}\right) &= \psi\left(\frac{ab' + a'b}{bb'}\right) = \varphi(ab' + a'b)(\varphi(bb'))^{-1} \\ &= \varphi(a)(\varphi(b))^{-1} + \varphi(a')(\varphi(b'))^{-1} = \psi\left(\frac{a}{b}\right) + \psi\left(\frac{a'}{b'}\right)\end{aligned}$$

   et :

$$\begin{aligned}\psi\left(\frac{a}{b}\frac{a'}{b'}\right) &= \psi\left(\frac{aa'}{bb'}\right) = \varphi(aa')(\varphi(bb'))^{-1} \\ &= \varphi(a)(\varphi(b))^{-1} \cdot \varphi(a')(\varphi(b'))^{-1} = \psi\left(\frac{a}{b}\right)\psi\left(\frac{a'}{b'}\right)\end{aligned}$$

puisque $\mathbb{K}$ est commutatif.
Enfin ψ est injectif puisque tout morphisme de corps est injectif. En effet, si $\theta : \mathbb{L} \to \mathbb{K}$ est un morphisme de corps, pour $x \neq 0$ dans $\mathbb{L}$, on a :

$$1_{\mathbb{K}} = \theta(1_{\mathbb{L}}) = \theta\left(xx^{-1}\right) = \theta(x)\,\theta\left(x^{-1}\right)$$

et $\theta(x) \neq 0$, donc θ est injectif.
Comme $\mathbb{K}$ contient $\mathbb{Q}$, il est nécessairement infini.

(c) Si la caractéristique de $\mathbb{K}$ est un nombre premier $p \geq 2$, l'application φ induit alors un morphisme de corps de $\dfrac{\mathbb{Z}}{p\mathbb{Z}}$ dans $\mathbb{K}$:

$$\theta : \dot{k} \mapsto k \cdot 1$$

puisque $\ker(\varphi) = p\mathbb{Z}$ (si $\dot{k} = \dot{j}$, on a alors $k - j \in p\mathbb{Z} = \ker(\varphi)$ et $\varphi(k) = \varphi(j)$) et ce morphisme est injectif.
Donc $\mathbb{K}$ contient $\{k \cdot 1 \mid 0 \leq k \leq p-1\}$ comme sous corps isomorphe à $\dfrac{\mathbb{Z}}{p\mathbb{Z}}$.
Dans le cas où le corps $\mathbb{K}$ est fini (donc commutatif), il de caractéristique p non nulle et peut être muni d'une structure de $\dfrac{\mathbb{Z}}{p\mathbb{Z}}$-espace vectoriel de dimension finie, il est donc isomorphe) $\left(\dfrac{\mathbb{Z}}{p\mathbb{Z}}\right)^n$ et en conséquence de cardinal p^n.

2. Pour tout $\varphi \in Bil(E)$, les applications φ_1 et φ_2 définies sur E^2 par :

$$\begin{cases} \varphi_1(x,y) = \frac{1}{2}(\varphi(x,y) + \varphi(y,x)) \\ \varphi_2(x,y) = \frac{1}{2}(\varphi(x,y) - \varphi(y,x)) \end{cases}$$

(φ_1 et φ_1 sont bien définies puisque $\mathbb{K}$ est de caractéristique différente de 2) sont bilinéaires, φ_1 étant symétrique, φ_2 alternée et on a $\varphi = \varphi_1 + \varphi_2$.
Si $\varphi \in Bil_s(E) \cap Bil_a(E)$, on a pour tout $(x,y) \in E^2$:

$$\varphi(x,y) = \varphi(y,x) = -\varphi(x,y)$$

ce qui équivaut à $\varphi(x,y) = 0$ puisque $\mathbb{K}$ est de caractéristique différente de 2.

3. L'application qui associe à une forme bilinéaire φ sur un espace vectoriel E de dimension n sa matrice $A = ((\varphi(e_i, e_j)))_{1 \leq i,j \leq n}$ dans une base $\mathcal{B} = (e_i)_{1 \leq i \leq n}$ de E réalise un isomorphisme de $Bil(E)$ sur l'espace $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ des matrices carrées d'ordre n. Cet espace étant de dimension n^2, on en déduit que :

$$\dim_{\mathbb{K}}(Bil(E)) = n^2.$$

Si φ est symétrique, on a en particulier $\varphi(e_i, e_j) = \varphi(e_j, e_i)$ pour tous i, j compris entre 1 et n, ce qui signifie que la matrice A de φ dans $\mathcal{B}$ est symétrique.
Réciproquement si cette matrice est symétrique, on a alors pour tous x, y dans E :

$$\varphi(y,x) = {}^tYAX = {}^t\left({}^tYAX\right) = {}^tX\,{}^tAY = {}^tXAY = \varphi(x,y)$$

(le produit matriciel $T = {}^tYAX$ étant un scalaire, on a bien ${}^tT = T$).
Il en résulte que $Bil_s(E)$ est isomorphe au sous-espace $\mathcal{S}_n(\mathbb{K})$ de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ formé des matrices symétriques, cet espace étant de dimension $\dfrac{n(n+1)}{2}$.
L'espace $Q(E)$ des formes quadratiques sur E étant isomorphe à $Bil_s(E)$ (unicité de la forme

polaire), on en déduit que $\dim(Q(E)) = \dfrac{n(n+1)}{2}$.
Puis de $Bil(E) = Bil_s(E) \oplus Bil_a(E)$, on déduit que :

$$\dim(Bil_a(E)) = n^2 - \frac{n(n+1)}{2} = \frac{n(n-1)}{2}.$$

4. On vérifie facilement que $q_{|F}$ est la forme quadratique associée à la forme bilinéaire $\varphi_{|F\times F}$.
Il suffit ensuite de montrer que $\ker\left(q_{|F}\right) = F \cap F^{\perp}$, ce qui peut se faire comme suit :

$$\begin{aligned}\left(x \in \ker\left(q_{|F}\right)\right) &\Leftrightarrow (x \in F \text{ et } \forall y \in F,\ \varphi(x,y) = 0)\\ &\Leftrightarrow \left(x \in F \text{ et } x \in F^{\perp}\right) \Leftrightarrow \left(x \in F \cap F^{\perp}\right)\end{aligned}$$

5. Un vecteur x est dans le noyau de φ si, et seulement si, il est orthogonal à tout vecteur de E, ce qui équivaut à dire du fait de la linéarité à droite de φ que x est orthogonal à chacun des vecteurs de la base $\mathcal{B}$, soit :

$$x \in \ker(\varphi) \Leftrightarrow (\forall i \in \{1, 2, \cdots, n\},\ \varphi(x, e_i) = 0)$$

ce qui revient à dire les coordonnées $x_1, x_2, \cdots, x_n$ de x dans la base $\mathcal{B}$ sont solutions du système linéaire de n équations à n inconnues :

$$\varphi\left(\sum_{j=1}^{n} x_j e_j, e_i\right) = \sum_{j=1}^{n} x_j \varphi(e_j, e_i) = \sum_{j=1}^{n} \varphi(e_i, e_j) x_j = 0 \ \ (1 \leq i \leq n)$$

Ce système s'écrit $AX = 0$ où $A = ((\varphi(e_i, e_j)))_{1\leq i,j\leq n}$ où A est la matrice de φ dans $\mathcal{B}$ et X le vecteur colonne formé des composantes de x dans cette base. Ce système est encore équivalent à $u(x) = 0$, où u l'endomorphisme de E de matrice A dans $\mathcal{B}$, ce qui revient à dire que $x \in \ker(u)$.

6.

(a) Si $F = \{0\}$, on a alors $F^{\perp} = E$ et $\dim(F) + \dim\left(F^{\perp}\right) = \dim(E)$ (ce qui montre au passage que l'égalité peut être réalisée avec q dégénérée).
Si $F \neq \{0\}$, en désignant par $(e_i)_{1\leq i\leq p}$ une base de F et par $(\ell_i)_{1\leq i\leq p}$ la famille de formes linéaires définies par :

$$\forall x \in E,\ \ell_i(x) = \varphi(x, e_i)$$

on a :

$$\begin{aligned}F^{\perp} &= \{x \in E \mid \forall y \in F,\ \varphi(x,y) = 0\}\\ &= \{x \in E \mid \forall i \in \{1, \cdots, p\},\ \varphi(x, e_i) = 0\}\\ &= \bigcap_{i=1}^{p} \ker(\ell_i) = \ker(f)\end{aligned}$$

où $f : E \to \mathbb{K}^p$ est l'application linéaire définie par :

$$\forall x \in E,\ f(x) = (\ell_1(x), \cdots, \ell_p(x))$$

Il en résulte que :

$$\begin{aligned}\dim\left(F^{\perp}\right) &= \dim(\ker(f)) = \dim(E) - \operatorname{rg}(f)\\ &= \dim(E) - \operatorname{rg}(\ell_1, \cdots, \ell_p) \geq \dim(E) - p\end{aligned}$$

soit $\dim\left(F^{\perp}\right) \geq \dim(E) - \dim(F)$.

Dans le cas où q est non dégénérée, la famille $(\ell_i)_{1\leq i\leq p}$ est libre, donc de rang p et $\dim\left(F^{\perp}\right) = \dim(E) - \dim(F)$. En effet, en complétant $(e_i)_{1\leq i\leq p}$ en une base $\mathcal{B} = (e_i)_{1\leq i\leq n}$ de E, la famille de formes linéaires associées $(\ell_i)_{1\leq i\leq n}$ est une base du dual E^* puisque la matrice de passage de la base duale $\mathcal{B}^* = (e_i^*)_{1\leq i\leq n}$ à $(\ell_i)_{1\leq i\leq n}$ est la matrice de q dans $\mathcal{B}$:

$$\ell_i(x) = \varphi(x, e_i) = \sum_{j=1}^{n} \varphi(e_j, e_i) x_j = \sum_{j=1}^{n} \varphi(e_j, e_i) e_j^*(x)$$

Pour q dégénérée et $F = E$, on a $F^{\perp} = \ker(q) \neq \{0\}$ et $\dim(F) + \dim\left(F^{\perp}\right) > \dim(E)$.

(b) Supposons $q_{|F}$ non dégénérée. On a $F \neq \{0\}$ et pour toute base $(e_i)_{1\leq i\leq p}$ de F la famille $(\ell_i)_{1\leq i\leq p}$ de formes linéaires définies sur E par :

$$\forall x \in E,\ \ell_i(x) = \varphi(x, e_i)$$

est libre. En effet, si $\sum\limits_{i=1}^{p} \lambda_i \ell_i = 0$ dans E^*, on a $\sum\limits_{i=1}^{p} \lambda_i \varphi(x, e_i) = 0$ pour tout $x \in E$ et en particulier $\varphi\left(\sum\limits_{i=1}^{p} \lambda_i e_i, x\right) = 0$ pour tout $x \in F$, ce qui entraîne $\sum\limits_{i=1}^{p} \lambda_i e_i \in F \cap F^{\perp} = \{0\}$ (puisque $q_{|F}$ non dégénérée) et tous les λ_i sont nuls.

Il en résulte que :

$$\begin{aligned}\dim\left(F^{\perp}\right) &= \dim\left(\bigcap_{i=1}^{p} \ker(\ell_i)\right) = \dim(E) - \operatorname{rg}(\ell_1, \cdots, \ell_p) \\ &= \dim(E) - p = \dim(E) - \dim(F).\end{aligned}$$

et $E = F \oplus F^{\perp}$ puisque $F \cap F^{\perp} = \{0\}$.

Réciproquement si $E = F \oplus F^{\perp}$, on a en particulier $F \cap F^{\perp} = \{0\}$, ce qui signifie que $q_{|F}$ est non dégénérée.

7.

(a) Pour x [resp. y] fixé dans E, l'application $y \mapsto \varphi(u(x), u(y))$ [resp. $x \mapsto \varphi(u(x), u(y))$] est linéaire comme composée de deux applications linéaires. L'application ψ est donc bilinéaire sur E.

(b) On note, pour tout vecteur x de E, X le vecteur colonne formé des composantes de x dans la base $\mathcal{B}_1$. Pour x, y dans E, on a :

$$\varphi(u(x), u(y)) = {}^t(AX)\, B\, (AY) = {}^tX \left({}^tABA\right) Y$$

et en conséquence ${}^tABA$ est la matrice de ψ dans la base $\mathcal{B}_1$.

(c)

i. Soient $u \in \mathcal{L}(E)$ défini par $u(e_i) = x_i$ pour tout i compris entre 1 et n et ψ la forme bilinéaire définie sur E^2 par :

$$\forall (x, y) \in E^2,\ \psi(x, y) = \varphi(u(x), u(y))$$

On a :

$$\begin{aligned}\Delta_{\mathcal{B}}(\psi) &= \det\left(((\psi(e_i, e_j)))_{1\leq i,j\leq n}\right) \\ &= \det\left(((\varphi(u(e_i), u(e_j))))_{1\leq i,j\leq n}\right) \\ &= \det\left(((\varphi(x_i, x_j)))_{1\leq i,j\leq n}\right) \\ &= g(x_1, \cdots, x_n)\end{aligned}$$

et on a aussi :

$$\begin{aligned}\Delta_{\mathcal{B}}(\psi) &= \det\left({}^{t}ABA\right) = (\det(A))^2 \det(B) \\ &= (\det_{\mathcal{B}}(x_1, \cdots, x_n))^2 \Delta_{\mathcal{B}}(\varphi)\end{aligned}$$

Pour φ non dégénérée, on a $\Delta_{\mathcal{B}}(\varphi) \neq 0$ et la famille $(x_1, \cdots, x_n)$ est une base de E si, et seulement si, $g(x_1, \cdots, x_n) \neq 0$.

ii. On a :

$$g(u(x_1), \cdots, u(x_n)) = (\det_{\mathcal{B}}(u(x_1), \cdots, u(x_n)))^2 \Delta_{\mathcal{B}}(\varphi)$$

avec :

$$\det_{\mathcal{B}}(u(x_1), \cdots, u(x_n)) = \det(u) \det_{\mathcal{B}}(x_1, \cdots, x_n)$$

ce qui donne :

$$\begin{aligned}g(u(x_1), \cdots, u(x_n)) &= (\det(u))^2 (\det_{\mathcal{B}}(x_1, \cdots, x_n))^2 \Delta_{\mathcal{B}}(\varphi) \\ &= (\det(u))^2 g(x_1, \cdots, x_n)\end{aligned}$$

8. En notant $A = ((a_{ij}))_{1 \leq i,j \leq n}$ la matrice de q dans la base canonique, on a :

$$q(x) = \sum_{i=1}^{n} a_{ii} x_i^2 + 2 \sum_{1 \leq i < j \leq n} a_{ij} x_i x_j = \sum_{1 \leq i,j \leq n} a_{ij} x_i x_j$$

et la forme polaire de q est définie par :

$$\varphi(x, y) = \sum_{1 \leq i,j \leq n} a_{ij} x_i y_j.$$

Pour tout entier k compris entre 1 et n, on a alors :

$$\begin{aligned}\frac{\partial q}{\partial x_k}(x) &= \frac{\partial}{\partial x_k}\left(\sum_{i=1}^{n} x_i \sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j\right) = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial}{\partial x_k}\left(x_i \sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j\right) \\ &= \frac{\partial}{\partial x_k}\left(x_k \sum_{j=1}^{n} a_{kj} x_j\right) + \sum_{\substack{i=1 \\ i \neq k}}^{n} \frac{\partial}{\partial x_k}\left(x_i \sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j\right) \\ &= \sum_{j=1}^{n} a_{kj} x_j + x_k a_{kk} + \sum_{\substack{i=1 \\ i \neq k}}^{n} x_i a_{ik} = \sum_{j=1}^{n} a_{kj} x_j + \sum_{i=1}^{n} a_{ik} x_i \\ &= \sum_{j=1}^{n} a_{jk} x_j + \sum_{i=1}^{n} a_{ki} x_i = 2 \sum_{i=1}^{n} a_{ik} x_i\end{aligned}$$

(les égalités $a_{kj} = a_{jk}$ sont justifiées par la symétrie de la matrice A). On en déduit alors que :

$$\begin{aligned}\varphi(x, y) &= \sum_{1 \leq i,j \leq n} a_{ij} x_i y_j = \sum_{j=1}^{n} \left(\sum_{i=1}^{n} a_{ij} x_i\right) y_j \\ &= \frac{1}{2} \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial q}{\partial x_j}(x) y_j\end{aligned}$$

Par symétrie, on a la deuxième formule.

9. En notant, pour tout entier i compris entre 1 et n et tout vecteur $x \in E$:

$$\ell_i(x) = \alpha_{i1}x_1 + \cdots + \alpha_{in}x_n$$

l'expression de ℓ_i dans une base $\mathcal{B} = (e_i)_{1\leq i\leq n}$, la matrice $Q = ((\alpha_{ij}))_{1\leq i,j\leq n}$ est inversible puisque les ℓ_i forment une base de E^* (la ligne i de Q est la matrice de ℓ_i dans la base $\mathcal{B}$ et donne les composantes de ℓ_i dans la base duale $\mathcal{B}^*$ de $\mathcal{B}$, ce qui signifie que ${}^tQ$ est la matrice de passage de $\mathcal{B}^*$ à $(\ell_i)_{1\leq i\leq n}$). Il en résulte que pour tout vecteur colonne $\beta = (\beta_i)_{1\leq i\leq n}$ dans $\mathbb{K}^n$ le système linéaire $QX = \beta$ a une unique solution et pour j compris entre 1 et n, la solution $X_j = (x_{ij})_{1\leq i\leq n}$ de $QX = (\delta_{ij})_{1\leq i\leq n}$ et le vecteur $f_j = \sum\limits_{i=1}^{n} x_{ij}e_i$ de E solution de $\ell_i(f_j) = \delta_{ij}$ pour i compris entre 1 et n.
Avec $Q(X_1, \cdots, X_n) = I_n$, on voit que la matrice $(X_1, \cdots, X_n)$ est l'inverse de Q.
10. La fonction q est continue de E dans $\mathbb{R}$ et en conséquence, elle transforme le connexe $\mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ en un connexe de $\mathbb{R}^*$, donc $q(\mathbb{R}^n \setminus \{0\})$ est contenu dans $\mathbb{R}^{-,*}$ ou $\mathbb{R}^{+,*}$ puisque les connexes de $\mathbb{R}$ sont les intervalles et q est définie positive ou définie négative.
11. Si q est positive, la fonction P définie par :

$$P(t) = q(y + tx) = q(x)t^2 + 2\varphi(x, y)t + q(y)$$

est alors polynomiale de degré au plus égal à 2 et à valeurs strictement positives.
Si $q(x) = 0$, on a alors $2\varphi(x, y)t + q(y) \geq 0$ pour tout réel t et nécessairement $\varphi(x, y) = 0$ (une fonction affine non constante change de signe).
Si $q(x) \neq 0$, P est de degré 2 et à valeurs positives, donc son discriminant est négatif ou nul, soit :

$$\varphi(x, y)^2 - q(x)q(y) \leq 0,$$

ce qui équivaut à $|\varphi(x, y)| \leq \sqrt{q(x)}\sqrt{q(y)}$.
Pour $x \in \ker(q)$, on a en particulier $q(x) = \varphi(x, x) = 0$ et $x \in q^{-1}\{0\}$. Donc $\ker(q) \subset q^{-1}\{0\}$.
Si $q(x) = 0$, on a alors, pour tout $y \in E$, $0 \leq |\varphi(x, y)| \leq \sqrt{q(x)}\sqrt{q(y)} = 0$ et $\varphi(x, y) = 0$, ce qui signifie que $x \in \ker(q)$.

– II – Réduction des formes quadratiques

1. On procède par récurrence sur $n \geq 1$.
Pour $n = 1$, dans une quelconque base (e) de E, on a $q(x \cdot e) = \lambda x^2$ et cette base est orthogonale.
On suppose le résultat acquis pour les formes quadratiques non nulles sur un espace de dimension au plus égale à $n - 1 \geq 1$ et on se donne une forme quadratique non nulle q sur E de dimension n (pour $q = 0$ toute base de E est orthogonale).
Comme q est non nulle, il existe un vecteur $x \in E$ tel que $q(x) \neq 0$ et $(\mathbb{K}x)^\perp$ est un hyperplan de E (c'est le noyau de la forme linéaire non nulle $y \mapsto \varphi(x, y)$). La restriction de q à $\mathbb{K}x$ étant non dégénérée (on a $\mathbb{K}x \cap (\mathbb{K}x)^\perp = \{0\}$ puisque $q(x) \neq 0$), on a $E = \mathbb{K}x \oplus (\mathbb{K}x)^\perp$ et avec l'hypothèse de récurrence, on déduit qu'il existe une base $(f_i)_{2\leq i\leq n}$ de $(\mathbb{K}x)^\perp$ qui est orthogonale pour q. En posant $f_1 = x$, la famille $(f_i)_{1\leq i\leq n}$ est une base q-orthogonale de E.
2. Si $(f_i)_{1\leq i\leq n}$ est une base de E qui est q-orthogonale, alors la matrice de q dans cette base est :

$$D = ((\varphi(f_i, f_j)))_{1\leq i,j\leq n} = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & \lambda_n \end{pmatrix}$$

où on a noté $\lambda_i = q(f_i)$ pour tout i compris entre 1 et n. Et l'expression de q dans cette base est :

$$\forall x = \sum_{i=1}^{n} y_i f_i \in E,\ q(x) = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i y_i^2$$

Le rang de q est celui de D et il est égal au nombre p de λ_i qui sont non nuls. On a $p \geq 1$ puisque q est non nulle. On peut toujours ordonner la base $(f_i)_{1 \leq i \leq n}$ de sorte les λ_i pour i compris entre 1 et p soient tous non nuls et les autres nuls.
On a $p = n$ si, et seulement si, D est inversible, ce qui revient à dire q est non dégénérée ou encore que $\ker(q) = \{0\}$.
En écrivant tout vecteur x de E sous la forme $x = \sum_{i=1}^{n} y_i f_i$, on a, en notant $Y = (y_i)_{1 \leq i \leq n} \in \mathbb{K}^n$:

$$\begin{aligned}(x \in \ker(q)) &\Leftrightarrow (DY = 0) \Leftrightarrow (\lambda_i y_i = 0 \text{ pour tout } i \in \{1, \cdots, n\}) \\ &\Leftrightarrow (\lambda_i y_i = 0 \text{ pour tout } i \in \{1, \cdots, p\}) \\ &\Leftrightarrow (y_i = 0 \text{ pour tout } i \in \{1, \cdots, p\})\end{aligned}$$

et donc :

$$\ker(q) = \operatorname{Vect}\{e_{p+1}, \cdots, e_n\}$$

3. Si $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ est une matrice symétrique, elle définit une forme quadratique dans la base canonique $\mathcal{B}$ de $E = \mathbb{K}^n$ et ce qui précède nous dit qu'il existe une $\mathcal{B}'$ de E qui est q-orthogonale. La matrice D de q dans $\mathcal{B}$ est diagonale et en désignant par P la matrice de passage de $\mathcal{B}$ à $\mathcal{B}'$, on a $D = {}^tPAP$.
4. Si $(f_i)_{1 \leq i \leq n}$ est une base de E qui est q-orthogonale, on note $(\ell_i)_{1 \leq i \leq n}$ sa base duale. Pour tout $x = \sum_{i=1}^{n} y_i f_i \in E$ et tout j compris entre 1 et n, on a $\ell_j(x) = y_j$ et :

$$q(x) = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i y_i^2 = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i \ell_i^2(x) = \sum_{i=1}^{p} \lambda_i \ell_i^2(x)$$

avec $\lambda_i \neq 0$ pour $1 \leq i \leq p$, la famille $(\ell_i)_{1 \leq i \leq p}$ étant libre dans l'espace dual E^*.
La démonstration du théorème de réduction de Gauss qui a été proposée n'est pas constructive.
L'algorithme de Gauss qui suit nous donne une démonstration constructive.
On procède par récurrence sur $n \geq 1$.
Pour $n = 1$, toute base est q-orthogonale.
On suppose que $n \geq 2$ et le résultat acquis pour les espaces de dimension au plus égale à $n - 1$.
Dans une base $\mathcal{B} = (e_i)_{1 \leq i \leq n}$ de E on a l'expression suivante de q :

$$q(x) = \sum_{i=1}^{n} a_{ii} x_i^2 + 2 \sum_{1 \leq i < j \leq n} a_{ij} x_i x_j$$

Supposons tout d'abord qu'il existe au moins un indice i compris entre 1 et n tel que $a_{ii} \neq 0$. Quitte à effectuer une permutation sur les vecteurs de base, on peut supposer que $a_{11} \neq 0$. En regroupant les termes contenant x_1, on écrit que :

$$\begin{aligned}a_{11} x_1^2 + 2 \sum_{j=2}^{n} a_{1j} x_1 x_j &= a_{11} \left(x_1^2 + 2x_1 \sum_{j=2}^{n} \frac{a_{1j}}{a_{11}} x_j \right) \\ &= a_{11} \left(\left(x_1 + \sum_{j=2}^{n} \frac{a_{1j}}{a_{11}} x_j \right)^2 - \left(\sum_{j=2}^{n} \frac{a_{1j}}{a_{11}} x_j \right)^2 \right)\end{aligned}$$

et :

$$\begin{aligned} q(x) &= a_{11}\left(x_1+\sum_{j=2}^{n}\frac{a_{1j}}{a_{11}}x_j\right)^2+q'(x') \\ &= a_{11}\ell_1^2(x)+q'(x') \end{aligned}$$

où $\ell_1(x)=x_1+\sum\limits_{j=2}^{n}\dfrac{a_{1j}}{a_{11}}x_j$, q' est une forme quadratique définie sur l'hyperplan H de E engendré par $e_2,\cdots,e_n$ et $x'=\sum\limits_{i=2}^{n}x_ie_i$ si $x=\sum\limits_{i=1}^{n}x_ie_i$.
Si $q'=0$, on a alors $q=a_{11}\ell_1^2$ avec a_{11} et ℓ_1 non nuls.
Si $q'\neq 0$, l'hypothèse de récurrence nous dit qu'il existe un entier p compris entre 2 et n, des scalaires non nuls $\lambda_2,\cdots,\lambda_p$ et des formes linéaires indépendantes $\ell_2,\cdots,\ell_p$ définies sur H tels que :

$$\forall x'\in H,\ q'(x')=\sum_{j=2}^{p}\lambda_j\ell_j^2(x')$$

et en prolongeant les formes linéaires $\ell_2,\cdots,\ell_n$ à E (en posant $\ell_j(e_1)=0$), on a :

$$q(x)=a_{11}\ell_1^2(x)+\sum_{j=2}^{p}\lambda_j\ell_j^2(x)$$

ce qui donne une décomposition de q comme combinaison linéaire de carrés de formes linéaires.
Il reste à vérifier que les formes $\ell_1,\ell_2,\cdots,\ell_p$ sont linéairement indépendantes dans E^*.
L'égalité $\sum\limits_{j=1}^{p}\lambda_j\ell_j$ équivaut à dire que $\sum\limits_{j=1}^{p}\lambda_j\ell_j(x)=0$ pour tout $x\in E$. Prenant $x=e_1$, on a $\ell_1(x)=1$ et $\ell_j(x)=0$ pour j compris entre 2 et p, ce qui donne $\lambda_1=0$ et $\sum\limits_{j=2}^{p}\lambda_j\ell_j(x')=0$ pour tout $x'\in H$, ce qui équivaut à $\sum\limits_{j=2}^{p}\lambda_j\ell_j=0$ et la nullité de tous les λ_j puisque le système $(\ell_2,\cdots,\ell_p)$ est libre dans H^*. On a donc le résultat annoncé.
Il reste enfin à traiter le cas où q est sans facteurs carrés, c'est-à-dire le cas où tous les coefficients a_{ii} sont nuls. Comme q est non nulle, il existe deux indices $i<j$ tels que $a_{ij}\neq 0$. Quitte à effectuer une permutation sur les vecteurs de base, on peut supposer que $a_{12}\neq 0$. On regroupe alors dans l'expression de q tous les termes contenant x_1 et x_2 que l'on fait apparaître comme fragment d'un produit de deux formes linéaires, soit :

$$\begin{aligned} Q &= a_{12}x_1x_2+x_1\sum_{j=3}^{n}a_{1j}x_j+x_2\sum_{j=3}^{n}a_{2j}x_j \\ &= \left(a_{12}x_1+\sum_{j=3}^{n}a_{2j}x_j\right)\left(x_2+\sum_{j=3}^{n}\frac{a_{1j}}{a_{12}}x_j\right)-\left(\sum_{j=3}^{n}a_{2j}x_j\right)\left(\sum_{j=3}^{n}\frac{a_{1j}}{a_{12}}x_j\right) \end{aligned}$$

ce qui donne :

$$\begin{aligned} q(x) &= 2\sum_{1\leq i<j\leq n}a_{ij}x_ix_j \\ &= 2Q+2\sum_{3\leq i<j\leq n}a_{ij}x_ix_j \\ &= 2L_1(x)\,L_2(x)+q'(x') \end{aligned}$$

où $L_1(x) = a_{12}x_1 + \sum\limits_{j=3}^{n} a_{2j}x_j,\ L_2(x) = x_2 + \sum\limits_{j=3}^{n} \frac{a_{1j}}{a_{12}}x_j$ et q' est une forme quadratique définie sur le sous espace vectoriel H de E engendré par $e_3, \cdots, e_n$ et $x' = \sum\limits_{i=3}^{n} x_ie_i$ si $x = \sum\limits_{i=1}^{n} x_ie_i$ (si $n = 2$, on $q' = 0$).
En écrivant que :

$$\begin{aligned} 2L_1(x) L_2(x) &= \frac{1}{2}(L_1(x) + L_2(x))^2 - \frac{1}{2}(L_1(x) + L_2(x))^2 \\ &= \frac{1}{2}\ell_1^2(x) - \frac{1}{2}\ell_2^2(x), \end{aligned}$$

on a :

$$q(x) = \frac{1}{2}\ell_1^2(x) - \frac{1}{2}\ell_2^2(x) + q'(x\prime)$$

Si $q' = 0$, on a alors $q = \frac{1}{2}\ell_1^2 - \frac{1}{2}\ell_2^2$, les formes linéaires ℓ_1 et ℓ_2 étant indépendantes puisque la matrice :

$$A = \begin{pmatrix} A_1 \\ A_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{12} & 1 & \alpha_{13} & \ldots & \alpha_{1n} \\ a_{12} & -1 & \alpha_{23} & \cdots & \alpha_{2n} \end{pmatrix}$$

est de rang 2 (le déterminant extrait $\begin{vmatrix} a_{12} & 1 \\ a_{12} & -1 \end{vmatrix} = -2a_{12}$ est non nul).
Si $q' \neq 0$ (ce qui suppose $n \geq 3$), l'hypothèse de récurrence nous dit qu'il existe un entier p compris entre 3 et n, des scalaires non nuls $\lambda_3, \cdots, \lambda_p$ et des formes linéaires indépendantes $\ell_3, \cdots, \ell_p$ définies sur H tels que :

$$\forall x' \in H,\ q'(x') = \sum_{j=3}^{p} \lambda_j \ell_j^2(x')$$

et en prolongeant les formes linéaires $\ell_3, \cdots, \ell_n$ à E (en posant $\ell_j(e_1) = \ell_j(e_2) = 0$), on a :

$$q(x) = \frac{1}{2}\ell_1^2(x) - \frac{1}{2}\ell_2^2(x) + \sum_{j=3}^{p} \lambda_j \ell_j^2(x)$$

ce qui donne une décomposition de q comme combinaison linéaire de carrés de formes linéaires. Il reste à vérifier que les formes $\ell_1, \ell_2, \cdots, \ell_p$ sont linéairement indépendantes dans E^*.
L'égalité $\sum\limits_{j=1}^{p} \lambda_j \ell_j$ équivaut à dire que $\sum\limits_{j=1}^{p} \lambda_j \ell_j(x) = 0$ pour tout $x \in E$. Prenant $x = e_1$ et $x = e_2$, on obtient $\lambda_1 a_{12} + \lambda_2 a_{21} = 0$ et $\lambda_1 - \lambda_2 = 0$, ce qui équivaut à $\lambda_1 = \lambda_2 = 0$ puisque $a_{21} \neq 0$ et $\sum\limits_{j=3}^{p} \lambda_j \ell_j(x') = 0$ pour tout $x' \in H$, ce qui équivaut à $\sum\limits_{j=3}^{p} \lambda_j \ell_j = 0$ et la nullité de tous les λ_j puisque le système $(\ell_3, \cdots, \ell_p)$ est libre dans H^*. On a donc le résultat annoncé.

5. Il est clair que φ est une forme bilinéaire symétrique sur E et pour tout $x \in E$, on a $\varphi(x, x) = \sum\limits_{j=1}^{p} \lambda_j \ell_j^2(x) = q(x)$, ce qui signifie que φ est la forme polaire de q puisque cette dernière est uniquement déterminée par q.
6. On suppose qu'on a obtenu une décomposition de q en combinaison linéaire de carrés de formes linéaires indépendantes de la forme $q(x) = \sum\limits_{j=1}^{p} \lambda_j \ell_j^2(x)$.

   En complétant $(\ell_i)_{1 \leq i \leq p}$ en une base $(\ell_i)_{1 \leq i \leq n}$ de E^*, la base q-orthogonale cherchée est la base anté-duale de $(\ell_i)_{1 \leq i \leq n}$.

Dans le cas où $p = n$, la forme q est non dégénérée et une telle base q-orthogonale se calcule en résolvant les n systèmes linéaires :

$$\ell_i(f_j) = \begin{cases} 1 \text{ si } i = j \\ 0 \text{ si } i \neq j \end{cases} \quad (1 \leq i, j \leq n)$$

ce qui revient à inverser la matrice $Q = ((\alpha_{ij}))_{1 \leq i,j \leq n}$, où les α_{ij} sont définis par :

$$\ell_i(x) = \alpha_{i1}x_1 + \cdots + \alpha_{in}x_n$$

(les ℓ_i étant exprimés dans une base donnée de E).
Dans le cas où $1 \leq p \leq n - 1$, on a vu que p est le rang de q et que $(f_{p+1}, \cdots, f_n)$ est une base du noyau de q. On commence donc par chercher une base du noyau de $\ker(q)$ en résolvant le système linéaire de p équations à n inconnues :

$$\ell_i(x) = 0 \ \ (1 \leq i \leq p)$$

Les vecteurs de base obtenus $f_{p+1}, \cdots, f_n$ sont deux à deux orthogonaux puisque orthogonaux à tout vecteur de E.
Il suffit ensuite de résoudre les p systèmes linéaires :

$$\ell_i(f_j) = \delta_{ij} = \begin{cases} 1 \text{ si } i = j \\ 0 \text{ si } i \neq j \end{cases} \quad (1 \leq i, j \leq p)$$

ce qui fournit une famille q-orthogonale $(f_1, \cdots, f_p)$ formée de vecteurs non nuls. Pour j fixé entre 1 et p, le système linéaire $\ell_i(f_j) = \delta_{ij}$ où i varie de 1 à p a des solutions puisque la matrice de ce système est de rang p et deux solutions de ce système diffèrent d'un élément du noyau de q.
La famille $(f_i)_{1 \leq i \leq n}$ est alors une base q-orthogonale de E.
Dans la pratique, on résout d'abord le système :

$$\begin{cases} \ell_1(x) = b_1 \\ \quad\vdots \\ \ell_p(x) = b_p \end{cases}$$

où $b = (b_1, \cdots, b_p)$ est un élément quelconque de $\mathbb{K}^p$. La valeur $b = 0$ nous donne une base du noyau de q, puis les valeurs successives $b = (1, 0, \cdots, 0)$, $b = (0, 1, 0, \cdots, 0)$, $\cdots$, $b = (0, \cdots, 0, 1)$ nous permettent de déterminer des vecteurs $f_1, \cdots, f_p$.

7.

(a) La matrice de q dans la base canonique de $\mathbb{R}^3$ est :

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1+a & -a \\ 0 & -a & 1+a+a^2 \end{pmatrix}.$$

(b) On a :

$$\det(A) = a\left(1 + a^2\right)$$

et q est dégénérée si, et seulement si, $a = 0$.

(c) On a :

$$q(x) = (x+y)^2 + a(y-z)^2 + \left(1 + a^2\right)z^2$$

Pour $a = 0$, q est de rang 2.
Pour $a \neq 0$, q est de rang 3.

(d) Dans tous les cas, il s'agit de résoudre le système :

$$\begin{cases} x+y=\alpha \\ y-z=\beta \\ z=\gamma \end{cases}$$

Ce système a pour solution :

$$\begin{cases} x=\alpha-\beta-\gamma \\ y=\beta+\gamma \\ z=\gamma \end{cases}$$

ce qui donne pour base q-orthogonale :

$$f_1=\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix},\ f_2=\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix},\ f_3=\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

(e) La matrice de q dans la base (f_1, f_2, f_3) est :

$$D={}^tPAP=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & a & 0 \\ 0 & 0 & 1+a^2 \end{pmatrix}$$

où :

$$P=\begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

8.

(a) $A=\begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{2} & \cdots & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \cdots & \frac{1}{2} & 1 \end{pmatrix}$.

(b) $x\in\ker(q)\Leftrightarrow Ax=0\Leftrightarrow x_1+\cdots+x_{j-1}+2x_j+x_{j+1}+\cdots+x_n=0$ pour $1\leq j\leq n$. En ajoutant toutes ces équations on obtient $\sum\limits_{j=1}^{n}x_j=0$ qui retranchée à l'équation j donne $x_j=0$. On a donc $\ker(q)=\{0\}$ et $\operatorname{rang}(q)=n$.

(c) Pour $n=2$, on a :

i. $q(x)=x_1^2+x_2^2+x_1x_2=\left(x_1+\dfrac{1}{2}x_2\right)^2+\dfrac{3}{4}x_2^2$.

ii. En résolvant le système $\begin{cases} x_1+\dfrac{1}{2}x_2=a \\ x_2=b \end{cases}$ pour $(a,b)=(1,0)$ et $(a,b)=(0,1)$, on obtient la base q-orthogonale : $f_1=\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$, $f_2=\begin{pmatrix} -\frac{1}{2} \\ 1 \end{pmatrix}$.

iii. La matrice de q dans cette base est $D=\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \frac{3}{4} \end{pmatrix}$.

(d) Pour $n=3$, on a :

i.

$$\begin{aligned} q(x) &= x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + x_1x_2 + x_1x_3 + x_2x_3 \\ &= \left(x_1 + \frac{1}{2}x_2 + \frac{1}{2}x_3\right)^2 + \frac{3}{4}\left(x_2^2 + x_3^2 + \frac{2}{3}x_2x_3\right) \\ &= \left(x_1 + \frac{1}{2}x_2 + \frac{1}{2}x_3\right)^2 + \frac{3}{4}\left(x_2 + \frac{1}{3}x_3\right)^2 + \frac{2}{3}x_3^2. \end{aligned}$$

ii. En résolvant le système :

$$\begin{cases} x_1 + \frac{1}{2}x_2 + \frac{1}{2}x_3 = a \\ x_2 + \frac{1}{3}x_3 = b \\ x_3 = c \end{cases}$$

pour $(a, b, c) = (1, 0, 0)$, $(0, 1, 0)$ et $(0, 0, 1)$ on obtient la base q-orthogonale :

$$f_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \ f_2 = \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \ f_3 = \begin{pmatrix} -\frac{1}{3} \\ -\frac{1}{3} \\ 1 \end{pmatrix}$$

iii. La matrice de q dans cette base est $D = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{3}{4} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{2}{3} \end{pmatrix}$.

(e)

i. $x \in \{e_1\}^\perp \Leftrightarrow \varphi(x, e_1) = 0 \Leftrightarrow {}^t x A e_1 = 0 \Leftrightarrow (x_1, \cdots, x_n) \begin{pmatrix} 1 \\ \frac{1}{2} \\ \vdots \\ \frac{1}{2} \end{pmatrix} = 0$. Une équation de H est donc : $2x_1 + x_2 + \cdots + x_n = 0$.

ii. Les coordonnées de f_j dans $\mathcal{B}$ sont données par :

$$x_1 = \cdots = x_{j-1} = 1, \ x_j = -j, \ x_{j+1} = \cdots = x_n = 0$$

et :

$$2x_1 + x_2 + \cdots + x_n = 2 + (j-2) - j = 0.$$

Les $n-1$ vecteurs f_j sont bien dans l'hyperplan H et ils sont libres, donc forment une base.

iii. $$Af_j = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 2 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 1 \\ 1 & \cdots & 1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ \vdots \\ 1 \\ -j \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ -j-1 \\ -1 \\ \vdots \\ -1 \end{pmatrix} \begin{array}{l} \\ \\ \\ \\ \leftarrow j \\ \\ \\ \end{array}$$

iv. Pour $2 \leq i < j$, on a :

$$\varphi(f_i, f_j) = \frac{1}{2}(1, \cdots, 1, -i, 0, \cdots, 0)\begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ -j-1 \\ -1 \\ \vdots \\ -1 \end{pmatrix} = 0$$

et on sait déjà que f_1 est q-orthogonal aux f_j pour $j \geq 2$.

v. On a $q(f_j) = \dfrac{j(j+1)}{2}$ et la matrice de q dans $\mathcal{B}'$ est :

$$D = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 2 & 0 & \cdots & \cdots & 0 \\ 0 & 6 & \ddots & & \vdots \\ \vdots & \ddots & 12 & \ddots & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & \cdots & 0 & n(n+1) \end{pmatrix}$$

vi. L'expression de q dans $\mathcal{B}'$ est :

$$q(x) = \frac{1}{2}\sum_{j=1}^{n} j(j+1)\, x_j'^2 = \frac{1}{2}\sum_{j=1}^{n} j(j+1)\, \ell_j^2(x)$$

avec $X' = P^{-1}X$ où :

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 0 & -2 & 1 & & \vdots \\ \vdots & 0 & -3 & \ddots & \vdots \\ \vdots & & \vdots & \ddots & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -n \end{pmatrix}$$

est la matrice de passage de $\mathcal{B}$ à $\mathcal{B}'$. Pour $n = 5$, on a :

$$P^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ 0 & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{6} & -\frac{1}{6} & -\frac{1}{6} \\ 0 & 0 & -\frac{1}{3} & -\frac{1}{12} & -\frac{1}{12} \\ 0 & 0 & 0 & -\frac{1}{4} & -\frac{1}{20} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -\frac{1}{5} \end{pmatrix}$$

et pour $n \geq 4$, la ligne 1 de P^{-1} est :

$$\begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \cdots & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

et la ligne $j \geq 2$ est :

$$\left(0, \cdots, 0, -\frac{1}{j}, -\frac{1}{j(j+1)}, \cdots, -\frac{1}{j(j+1)}\right).$$

On a donc :

$$\begin{cases} \ell_1(x) = x_1 + \dfrac{1}{2}x_2 + \cdots + \dfrac{1}{2}x_n \\ \ell_j(x) = \dfrac{1}{j}x_j + \dfrac{1}{j(j+1)}x_{j+1} + \cdots + \dfrac{1}{j(j+1)}x_n \\ \ell_n(x) = \dfrac{1}{n}x_n \end{cases}$$

ou encore :

$$q(x) = \frac{1}{2}\sum_{j=1}^{n-1} \frac{1}{j(j+1)} ((j+1)x_j + x_{j+1} + \cdots + x_n)^2 + \frac{n+1}{2n} x_n^2.$$

– III – Formes quadratiques réelles en dimension finie. Signature

1. Pour $x \in F \cap G$, on a $q(x) \geq 0$ et $q(x) \leq 0$, donc $q(x) = 0$ et $x = 0$ puisque q est définie sur F.
2. On note $I = \{i \in \{1, \cdots, n\} \mid q(e_i) > 0\}$ et on désigne par F le sous-espace vectoriel de E engendré par $(e_i)_{i \in I}$ ($F = \{0\}$ pour $I = \emptyset$).
Si $I = \emptyset$, on a alors $q(e_i) \leq 0$ pour tout i, donc q est négative et $\mathcal{P} = \emptyset$, ce qui entraîne $s = 0 = \mathrm{card}(I)$.
Si $I \neq \emptyset$, on a alors pour tout $x \in F \setminus \{0\}$:
$$q(x) = \sum_{i \in I} q(e_i) x_i^2 > 0$$
donc $F \in \mathcal{P}$ et $\mathrm{card}(I) \leq s$.
Si $I = \{1, \cdots, n\}$, on a alors $q(e_i) > 0$ pour tout i, donc q est définie positive et $E \in \mathcal{P}$, ce qui entraîne $s = n = \mathrm{card}(I)$.
Si $I \neq \{1, \cdots, n\}$, on a alors $J = \{1, \cdots, n\} \setminus I \neq \emptyset$ et en désignant par G le sous-espace vectoriel de E engendré par $(e_i)_{i \in J}$, la restriction de q à G est négative et $F \cap G = \{0\}$. Mais $G = F^{\perp}$ (la base $(e_i)_{i \in I}$ est q-orthogonale), donc la restriction de q à F est non dégénérée et $E = F \oplus F^{\perp} = F \oplus G$. D'autre part, on a aussi $H \cap G = \{0\}$ pour tout $H \in \mathcal{P}$, donc $G + H = G \oplus H$ et :
$$\begin{aligned} \dim(G \oplus H) &= \dim(G) + \dim(H) = n - \dim(F) + \dim(H) \\ &= n - \mathrm{card}(I) + \dim(H) \leq n \end{aligned}$$
et $\mathrm{card}(I) \geq \dim(H)$. Il en résulte que $\mathrm{card}(I) \geq s$ et $\mathrm{card}(I) = s$.
On vérifie de même que $t = \mathrm{card}\{i \in \{1, \cdots, n\} \mid q(e_i) < 0\}$.
Comme le rang de q est égal au nombre d'indices i tels que $q(e_i) \neq 0$, on en déduit que $s + t = \mathrm{rg}(q)$.
3. Se déduit immédiatement de ce qui précède.
4. Supposons q définie positive sur E. Pour k compris entre 1 et n, la matrice $A_k = ((a_{ij}))_{1 \leq i,j \leq k}$ est la matrice de la forme quadratique q_k égale à la restriction de q au sous-espace vectoriel E_k de E engendré par les vecteurs $e_1, \cdots, e_k$. Cette forme q_k étant définie positive comme q, il en résulte que $\det(A_k) > 0$.
Pour la réciproque, on raisonne par récurrence sur la dimension $n \geq 1$ de E.
Pour $n = 1$, le résultat est évident puisque $E = \mathbb{R}e_1$ est une droite vectoriel et q s'écrit $q(x) = q(x_1 e_1) = \lambda x_1^2$ avec $\lambda = q(e_1) = \det(A)$.
Supposons le résultat acquis pour tous les espaces de dimension au plus égal à n et soit q une forme quadratique sur un espace E de dimension $n+1$. On se donne une base $(e_i)_{1 \leq i \leq n+1}$ de E et on suppose que tous les mineurs principaux de la matrice $A = ((a_{ij}))_{1 \leq i,j \leq n+1}$ de q dans cette base sont strictement positifs. En désignant par H le sous-espace vectoriel de E engendré par les vecteurs $e_1, \cdots, e_n$, la matrice extraite $A_n = ((a_{ij}))_{1 \leq i,j \leq n}$ est la matrice de la forme quadratique q_n égale à la restriction de q à H. Tous les mineurs principaux de A_n étant strictement positifs, cette forme q_1 est définie positive sur H.

La restriction de q à H étant définie positive et q non dégénérée ($\det(A) \neq 0$), la signature de q ne peut être que $(n,1)$ ou $(n+1,0)$ (par définition de la signature). Si cette signature est $(n,1)$, cela signifie qu'on a une décomposition de Gauss de la forme $q = \sum_{j=1}^{n} \ell_j^2 - \ell_n^2$ et la matrice de q dans une base q-orthogonale adaptée à cette réduction est diagonale de termes diagonaux $1, 1, \cdots, 1, -1$. En notant D cette matrice, on a $\det(D) = -1 < 0$, ce qui contredit $\det(D) = (\det(P))^2 \det(A) > 0$. La signature de q est donc $(n+1,0)$ et q est définie positive.

5. Une base de E étant fixée, les applications $\Delta_k : q \mapsto \det\left(((a_{ij}))_{1\leq i,j\leq k}\right)$ sont continues sur $Q(E)$ (identifié à $\mathbb{R}^{\frac{n(n+1)}{2}}$ par le choix d'une base) et le résultat précédent nous dit que $Q^{++}(E) = \bigcup_{k=1}^{n} \Delta_k^{-1}(\mathbb{R}^{+,*})$, c'est donc un ouvert comme réunion d'ouverts.
On peut aussi montrer directement que $Q^{++}(E)$ est un ouvert de $Q(E)$ comme suit. Une base $\mathcal{B} = (e_i)_{1\leq i\leq n}$ étant choisie, on munit E de la norme $x = \sum_{i=1}^{n} x_i e_i \mapsto \|x\| = \max_{1\leq i\leq n} |x_i|$. Si $q_0 \in Q^{++}(E)$, on a $q_0(x) > 0$ pour tout $x \in E$ et en désignant par S_1 la sphère unité de $(E, \|\cdot\|)$, $\delta = \inf_{x\in S_1} q(x) > 0$ puisque q est continue et donc atteint sa borne inférieure sur le compact S_1.
En notant $q_0(x) = \sum_{1\leq i,j\leq n} a_{ij}x_ix_j$, on pour tout forme quadratique $q(x) = \sum_{1\leq i,j\leq n} b_{ij}x_ix_j$ et tout $x \in S_1$:

$$|q(x) - q_0(x)| \leq \sum_{1\leq i,j\leq n} |b_{ij} - a_{ij}| |x_i| |x_j| \leq \sum_{1\leq i,j\leq n} |b_{ij} - a_{ij}| = \|q - q_0\|_1$$

en identifiant $Q(E)$ à un sous-ensemble de $\mathbb{R}^{n^2}$ muni de la norme $\|\cdot\|_1$ par le choix de la base $\mathcal{B}$. En prenant q dans la boule ouverte $B\left(q_0, \frac{\delta}{2}\right)$ de centre q_0 et de rayon $\frac{\delta}{2}$, on a pour tout $x \in S_1$:

$$-\frac{\delta}{2} < -\|q - q_0\|_1 \leq q(x) - q_0(x) \leq \|q - q_0\|_1 < \frac{\delta}{2}$$

et :

$$q(x) > q_0(x) - \frac{\delta}{2} \geq \frac{\delta}{2}$$

ce qui entraîne pour $x \neq 0$, $q(x) = \|x\|^2 q\left(\frac{1}{\|x\|}x\right) > \frac{\delta}{2}\|x\|^2 > 0$ et q est définie positive. On a donc montré que $B\left(q_0, \frac{\delta}{2}\right) \subset Q^{++}(E)$ et $Q^{++}(E)$ est un ouvert de $Q(E)$.

– IV – La forme quadratique $Tr(M^2)$ sur $M_n(\mathbb{R})$

1. Le coefficient d'indice (i,i) de $P = M^2$, pour i compris entre 1 et n, est :

$$p_{ii} = \sum_{k=1}^{n} x_{ik}x_{ki}$$

et donc :

$$\begin{aligned} q(M) = Tr\left(M^2\right) &= \sum_{i=1}^{n} p_{ii} = \sum_{i=1}^{n}\sum_{k=1}^{n} x_{ik}x_{ki} \\ &= \sum_{i=1}^{n} x_{ii}^2 + 2\sum_{1\leq i<j\leq n} x_{ij}x_{ji}. \end{aligned}$$

2. On peut dire que q est un polynôme homogène de degré en $((x_{ij}))_{1\leq i,j\leq n}$.
   Ou alors, en désignant par φ l'application définie par :

$$\forall (M,N) \in E^2,\ \varphi(M,N) = Tr(MN)$$

   vérifier que :
   - φ est symétrique puisque $Tr(MN) = Tr(NM)$ pour toutes matrices M, N dans E.
   - φ est bilinéaire puisque l'application trace est une forme linéaire et, à N fixé, l'application $M \mapsto MN$ est linéaire de E dans E, ce qui entraîne que pour tout N fixé, dans E l'application $M \mapsto Tr(MN)$ est linéaire comme composée d'application linéaires. La symétrie nous dit que φ est en fait bilinéaire et cette application étant à valeurs réelles, c'est bien une forme bilinéaire symétrique.
   - Pour tout $M \in E$, $q(M) = \varphi(M,M)$.

   En conséquence q est une forme quadratique.
3. Ce qui précède nous dit que l'application $\varphi : (M,N) \mapsto Tr(MN)$ est la forme polaire de q.
4. Pour $1 \leq i < j \leq n$, on a :

$$2x_{ij}x_{ji} = \frac{1}{2}(x_{ij}+x_{ji})^2 - \frac{1}{2}(x_{ij}-x_{ji})^2,$$

   ce qui donne la réduction de Gauss :

$$\begin{aligned} q(M) &= \sum_{i=1}^{n} x_{ii}^2 + \frac{1}{2}\sum_{1\leq i<j\leq n}(x_{ij}+x_{ji})^2 - \frac{1}{2}\sum_{1\leq i<j\leq n}(x_{ij}-x_{ji})^2 \\ &= \sum_{i=1}^{n} L_{ii}^2(M) + \frac{1}{2}\sum_{1\leq i<j\leq n} L_{ij}^2(M) - \frac{1}{2}\sum_{1\leq i<j\leq n} L_{ji}^2(M) \end{aligned}$$

   où les formes linéaires L_{ij} pour $1 \leq i,j \leq n$ sont définies par :

$$\begin{cases} L_{ii}(M) = x_{ii} \ \ (1 \leq i \leq n) \\ L_{ij}(M) = x_{ij} + x_{ji} \ \ (1 \leq i < j \leq n) \\ L_{ji}(M) = x_{ij} - x_{ji} \ \ (1 \leq i < j \leq n) \end{cases}$$

   L'algorithme de Gauss nous assure que ces formes sont linéairement indépendantes dans le dual E^*.
5. Le rang de q est :

$$\begin{aligned} \mathrm{rg}(q) &= \mathrm{card}\{L_{ii} \mid 1 \leq i \leq n\} + \mathrm{card}\{L_{ij} \mid 1 \leq i < j \leq n\} + \mathrm{card}\{L_{ji} \mid 1 \leq i < j \leq n\} \\ &= n + 2\left\{(i,j) \in \mathbb{N}^2 \mid 1 \leq i < j \leq n\right\} = n + 2\,\mathrm{card}(X) \end{aligned}$$

   avec :

$$X = \{(1,2),\cdots,(1,n)\} \cup \{(2,3),\cdots,(2,n)\} \cup \cdots \cup \{(n-1,n)\}$$

   ce qui donne :

$$\mathrm{card}(X) = (n-1) + (n-2) + \cdots + 2 + 1 = \frac{n(n-1)}{2}$$

   et $\mathrm{rg}(q) = n + n(n-1) = n^2 = \dim(E)$.
   La forme q est donc non dégénérée et $\ker(q) = \{0\}$.
   La signature de q est

$$\mathrm{sign}(q) = \left(n + \frac{n(n-1)}{2}, \frac{n(n-1)}{2}\right) = \left(\frac{n(n+1)}{2}, \frac{n(n-1)}{2}\right).$$

6.

(a) Une matrice symétrique est uniquement déterminée par son triangle supérieur large (i. e. avec la diagonale comprise), ce qui signifie que $\dim(E_1) = \dfrac{n(n+1)}{2}$.
On peut aussi dire qu'une matrice symétrique s'écrit :

$$M = \sum_{1 \leq i \leq j \leq n} a_{ij} E_{ij}$$

où les matrices E_{ij} sont définies par :
pour $1 \leq i \leq n$, E_{ii} a tous ses coefficients nuls sauf celui d'indice (i,i) qui vaut 1 ;
pour $1 \leq i < j \leq n$, E_{ij} a tous ses coefficients nuls sauf ceux d'indice (i,j) et (j,i) qui valent 1.
Le système $\{E_{ij} \mid 1 \leq i \leq j \leq n\}$ engendre E_1 et on vérifie facilement qu'il est libre, c'est donc une base de E_1. On retrouve que :

$$\dim(E_1) = card\left\{(i,j) \in \mathbb{N}^2 \mid 1 \leq i \leq j \leq n\right\} = \frac{n(n+1)}{2}.$$

(b) De ${}^tM = -M$, on déduit que $x_{ii} = -x_{ii}$ pour tout i compris entre 1 et n. En conséquence, tous les termes diagonaux de $M \in E_2$ sont nuls.

(c) Comme en **a.** on vérifie que $\dim(E_2) = \dfrac{n(n-1)}{2}$, une base étant donnée par la famille de matrices $\{F_{ij} \mid 1 \leq i < j \leq n\}$, où :
pour $1 \leq i < j \leq n$, F_{ij} a tous ses coefficients nuls sauf ceux d'indice (i,j) et (j,i) qui valent respectivement 1 et -1.

(d) Si $M \in E_1 \cap E_2$, on a alors $M = {}^tM = -M$, ce qui implique $M = 0$. On a donc $E_1 \cap E_2 = \{0\}$ avec :

$$\dim(E) = n^2 = \frac{n(n-1)}{2} + \frac{n(n+1)}{2} = \dim(E_1) + \dim(E_2)$$

et en conséquence $E = E_1 \oplus E_2$.

(e) Pour $(M,N) \in E_2 \times E_1$, on a :

$${}^t(MN) = {}^tN\,{}^tM = -NM,$$

c'est-à-dire que $MN \in E_2$ et $\varphi(M,N) = Tr(MN) = 0$, ce qui signifie que $M \in E_1^\perp$.

(f) Comme φ est non dégénérée, on a :

$$\dim\left(E_1^\perp\right) = \dim(E) - \dim(E_1) = \frac{n(n-1)}{2} = \dim(E_2)$$

et ce qui précède nous dit que $E_1^\perp = E_2$.

(g) Pour $M \in E_1$, on a ${}^tM = M$ et :

$$L_{ji}(M) = x_{ij} - x_{ji} = 0 \ \ (1 \leq i < j \leq n)$$

et la décomposition de Gauss donne :

$$q(M) = \sum_{i=1}^{n} L_{ii}^2(M) + \frac{1}{2} \sum_{1 \leq i < j \leq n} L_{ij}^2(M) \geq 0$$

avec $q(M) = 0$ si, et seulement si, $L_{ii}(M) = x_{ii} = 0$ pour $1 \leq i \leq n$ et $L_{ij}(M) = x_{ij} + x_{ji} = 2x_{ij} = 0$ pour $1 \leq i < j \leq n$, ce qui équivaut à $M = 0$.
La restriction de q à E_1 est donc définie positive.
De même, pour $M \in E_2$, on a ${}^tM = -M$, soit $x_{ij} = -x_{ji}$ pour tous i, j, ce qui entraîne $L_{ii}(M) = x_{ii} = 0$ pour $1 \leq i \leq n$ et $L_{ij}(M) = x_{ij} + x_{ji} = 0$ pour $1 \leq i < j \leq n$. La décomposition de Gauss donne alors :

$$q(M) = -\frac{1}{2} \sum_{1 \leq i < j \leq n} L_{ji}^2(M) \leq 0$$

avec $q(M) = 0$ si, et seulement si, $L_{ji}(M) = x_{ij} - x_{ji} = 2x_{ij} = 0$ pour $1 \leq i < j \leq n$, ce qui équivaut à $M = 0$.
La restriction de q à E_2 est donc définie négative.

– V – Formes quadratiques sur un corps fini

1.

(a) L'application :

$$f : \begin{array}{ccc} \mathbb{K}^* & \to & \mathbb{K}^* \\ t & \mapsto & t^2 \end{array}$$

est un morphisme de groupes multiplicatifs de noyau $\ker(f) = \{-1, 1\} \neq \{1\}$ puisque $\mathbb{K}$ est de caractéristique différente de 2. Cette application n'est donc pas injective et en conséquence non surjective (comme $\mathbb{K}^*$ est fini, il y a équivalence entre injectivité et surjectivité).

(b) L'application f induit un isomorphisme de $\dfrac{\mathbb{K}^*}{\ker(f)} = \dfrac{\mathbb{K}^*}{\{-1,1\}}$ sur $\mathrm{Im}(f)$, donc $\mathrm{card}(\mathbb{K}^*) = 2\,\mathrm{card}(\mathrm{Im}(f))$.
L'ensemble des termes carrés de $\mathbb{K}$ étant $\mathrm{Im}(f) \cup \{0\}$, on en déduit qu'il possède $\dfrac{\mathrm{card}(\mathbb{K}^*)}{2} + 1 = \dfrac{p^r + 1}{2}$ éléments. Les termes non carrés sont ceux de $\mathbb{K}^* \setminus \mathrm{Im}(f)$ et il y en a $\mathrm{card}(\mathbb{K}^*) - \mathrm{card}(\mathrm{Im}(f)) = \dfrac{\mathrm{card}(\mathbb{K}^*)}{2} = \dfrac{p^r - 1}{2}$.

(c) Les ensembles $A = \{a\lambda^2 \mid \lambda \in \mathbb{K}\}$ et $B = \{c - b\mu^2 \mid \mu \in \mathbb{K}\}$ étant en bijection avec l'ensemble des carrés de $\mathbb{K}$, ont $\dfrac{p^r + 1}{2}$ éléments et leur intersection est nécessairement non vide (sinon $\mathrm{card}(A \cup B) = \mathrm{card}(A) + \mathrm{card}(B) = p^r + 1 > \mathrm{card}(\mathbb{K})$), il existe donc λ, μ dans $\mathbb{K}$ tels que $a\lambda^2 = c - b\mu^2$.

2. Pour $n = 1$, en désignant par $\mathcal{B} = (e)$ une base de E, on a $q(x) = q(x_1 \cdot e) = \lambda x_1^2$ avec $\lambda = \Delta_{\mathcal{B}}(\varphi) \in \mathbb{K}^*$. Si $\lambda = \mu^2$, l'expression de q dans la base $\mathcal{B} = \left(\dfrac{1}{\mu} e\right)$ est $q(x) = (\mu x_1)^2$ et on est dans le premier cas, sinon on est dans le second.
Supposons le résultat acquis au rang $n - 1$. On sait déjà qu'il existe une base q-orthogonale $(e_i)_{1 \leq i \leq n}$ de E dans laquelle l'expression de q est :

$$q(x) = q\left(\sum_{i=1}^{n} x_i e_i\right) = \sum_{i=1}^{r} \lambda_i x_i^2$$

les λ_i étant non nuls.
Si λ_1 est un carré, soit $\lambda_1 = \mu_1^2$, l'expression de q dans la base $\left(\dfrac{1}{\mu_1}e_1, e_2, \cdots, e_n\right)$ est :

$$q(x) = y_1^2 + \sum_{i=2}^{r} \lambda_i y_i^2$$

et en appliquant l'hypothèse de récurrence à l'hyperplan $H = \{e_1\}^{\perp}$, il existe une base q-orthogonale $\mathcal{B}'$ de H dans laquelle l'expression de q est :

$$q(x) = \sum_{i=2}^{r'} x_i^2 \text{ ou } q(x) = \sum_{i=2}^{r'-1} x_i^2 + \delta x_{r'}^2$$

avec δ non carré dans $\mathbb{K}^*$ et l'expression de q dans la base $\left\{\dfrac{1}{\mu_1}e_1\right\} \cup \mathcal{B}'$ est :

$$q(x) = x_1^2 + \sum_{i=2}^{r'} x_i^2 \text{ ou } q(x) = x_1^2 + \sum_{i=2}^{r'-1} x_i^2 + \delta x_{r'}^2$$

ce qui implique que $r' = r$ (le rang de q).
Si λ_1 n'est pas un carré, on désigne par (x_1, x_2) une solution de l'équation $\lambda_1 x_1^2 + \lambda_2 x_2^2 = 1$ et on note $f_1 = x_1 e_1 + x_2 e_2$. On a alors $q(f_1) = 1$ et en appliquant l'hypothèse de récurrence à l'hyperplan $H = \{f_1\}^{\perp}$, il existe une base q-orthogonale $\mathcal{B}'$ de H dans laquelle l'expression de q est :

$$q(x) = \sum_{i=2}^{r'} x_i^2 \text{ ou } q(x) = \sum_{i=2}^{r'-1} x_i^2 + \delta x_{r'}^2$$

avec δ non carré dans $\mathbb{K}^*$ et l'expression de q dans la base $\{f_1\} \cup \mathcal{B}'$ est :

$$q(x) = x_1^2 + \sum_{i=2}^{r'} x_i^2 \text{ ou } q(x) = x_1^2 + \sum_{i=2}^{r'-1} x_i^2 + \delta x_{r'}^2$$

ce qui implique que $r' = r$ (le rang de q).