Agrégation Interne

Agrégation interne 2006, épreuve 2

1 Énoncé

Ce problème présente des techniques permettant d'étudier les solutions d'équations différentielles en général non linéaires, sans connaître explicitement ces solutions. Par conséquent, on ne cherchera pas à résoudre les équations différentielles qui apparaîtront au fil de l'épreuve, sauf si cela est demandé.

Rappelons que, dans le cas d'une équation différentielle non linéaire, l'intervalle de définition d'une solution est lui aussi inconnu.

Définitions et notations

Pour tout entier $m > 0$, on munit l'espace vectoriel $\mathbb{R}^m$ du produit scalaire usuel :

$$\langle x, y\rangle = \sum_{1\leq i\leq m} x_i y_i$$

la norme associée est notée $\|x\|$; on note $\mathcal{B}_f(x_0, R)$ la boule fermée de centre $x_0 \in \mathbb{R}^m$ et de rayon R.

Soit U une partie ouverte de $\mathbb{R}\times\mathbb{R}^m$ et f une application de U dans $\mathbb{R}^m$. On dit que l'application $u : I \to \mathbb{R}^m$ est une solution de l'équation différentielle :

$$x' = f(t, x) \tag{(E)}$$

si :

a) I est un intervalle non trivial (ni vide, ni réduit à un point) de la droite réelle $\mathbb{R}$,

b) u est une application dérivable de I dans $\mathbb{R}^m$,

c) pour tout $t \in I$, on a $(t, u(t)) \in U$ et $u'(t) = f(t, u(t))$.

Soient $u_1 : I_1 \to \mathbb{R}^m$ et $u_2 : I_2 \to \mathbb{R}^m$ deux solutions de (E) ; on dit que u_1 est une restriction de u_2 si $I_1 \subset I_2$ et si, pour tout $t \in I_1$, on a $u_1(t) = u_2(t)$. On dit aussi que u_2 est un prolongement de u_1; ou encore que u_2 prolonge u_1.

Une solution de (E) est dite maximale si elle n'admet pas d'autre prolongement qu'elle même.

De manière générale $\mathcal{C}^n(X, Y)$ désigne l'ensemble des applications de X dans Y de classe $\mathcal{C}^n$, lorsque cela a un sens.

On dit que l'application f est localement lipschitzienne en x si, pour tout point (t_0, x_0) de U, il existe deux nombres réels ε et k tous deux > 0 et tels que :

a) l'ensemble $C = [t_0 - \varepsilon, t_0 + \varepsilon] \times \mathcal{B}_f(x_0, \varepsilon)$ soit inclus dans U,

b) si (t, x_1) et (t, x_2) sont deux points de C, on ait

$$\|f(t, x_1) - f(t, x_2)\| \leq k\|x_1 - x_2\|.$$

On rappelle qu'une fonction $f \in \mathcal{C}^n(U, \mathbb{R}^m)$ est localement lipschitzienne en x.

Les deux premières parties n'utilisent pas le théorème de Cauchy-Lipschitz, contrairement aux autres parties. L'énoncé de ce théorème est donné au début de la troisième partie.

Partie I

Soit q un nombre réel ≥ 0 et soit u une application dérivable de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}^2$; pour $t \in \mathbb{R}$, on écrit $u(t) = (u_1(t), u_2(t))$. On suppose que la fonction u satisfait, sur $\mathbb{R}$, aux égalités :

$$\begin{cases} u_1' = u_2, \\ u_2' = -u_1 - q u_1^3. \end{cases}$$

L'existence d'une telle application u est admise ici.

1. Démontrer que u est solution d'une équattion différentielle du type (E) en précisant bien quelle est l'application f.
2. Pour $q = 0$, déterminer l'application u et démontrer que l'image de l'arc $t \mapsto u(t)$ est un cercle. Représenter ceci sur un dessin, en n'oubliant pas de mentionner le sens de parcours.
3. Supposons $q > 0$.
   (a) Démontrer qu'il existe un réel p tel que l'image de u soit incluse dans la courbe
   $$C_p = \left\{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 \mid x_1^2 + \frac{q}{2} x_1^4 + x_2^2 = p\right\}.$$
   (b) Démontrer que $p \geq 0$. Que dire si $p = 0$?
   On suppose désormais $p > 0$.
   (c) Représenter sommairement la courbe C_p dans un repère orthonormé du plan. Les tangentes aux points où la courbe C_p coupe les axes du repère doivent apparaître sur le dessin.
   (d) Montrer qu'il existe deux fonctions $\rho, \theta \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R}, \mathbb{R})$, avec $\rho > 0$, telles que pour tout $t \in \mathbb{R}$, on ait :
   $$u_1(t) = \rho(t) \cos(\theta(t)) \text{ et } u_2(t) = \rho(t) \sin(\theta(t)).$$
   (e) Calculer $\theta'(t)$ en fonction de ρ et θ et en déduire que la trajectoire de u est exactement la courbe C_p.

Partie II : Barrières

Dans cette partie, on considère une partie ouverte U de $\mathbb{R}^2$ et une fonction $f \in \mathcal{C}^0(U, \mathbb{R})$ localement lipschitzienne en x. On note toujours (E) l'équation différentielle $x' = f(t, x)$.

1. Soient a, b et K des nombres réels, avec $a < b$, et $h : [a, b] \to \mathbb{R}$ une fonction dérivable satisfaisant à $h(a) = 0$ et $h' \leq Kh$. Démontrer que $h \leq 0$ [on pourra par exemple chercher une fonction φ telle que $(h' - Kh)\varphi$ soit la dérivée d'une fonction simple].
2. Lemme de la barrière inférieure. On suppose I est un intervalle réel non trivial et $\alpha : I \to \mathbb{R}$ une application dérivable telle que, pour tout $t \in I$, le point $(t, \alpha(t))$ appartienne à U et que l'on ait l'inégalité :
   $$\alpha'(t) \leq f(t, \alpha(t)).$$
   On dit alors que α est une barrière inférieure de l'équation (E) sur l'intervalle I.
   Soit $u : J \to \mathbb{R}$ une solution de (E) et $t_0 \in I \cap J$. On suppose que $\alpha(t_0) \leq u(t_0)$ et on veut démontrer que $\alpha(t) \leq u(t)$ pour $t \geq t_0$, $t \in I \cap J$. On procède par l'absurde et on suppose que cela est faux.
   (a) Démontrer qu'il existe t^* et t_1 dans $I \cap J$ tels que $t_0 \leq t_1 < t^*$ et que l'on ait :
   $$u(t_1) = \alpha(t_1) \text{ et } u(t) < \alpha(t) \text{ pour } t_1 < t \leq t^*.$$
   (b) Établir l'existence de $t_2 \in]t_1, t^*]$ et d'un nombre réel $C \geq 0$ tels que, pour tout $t \in [t_1, t_2]$ on ait :
   $$|f(t, \alpha(t)) - f(t, u(t))| \leq C |\alpha(t) - u(t)|.$$

(c) En déduire que l'on a $\alpha' - u' \leq C(\alpha - u)$ sur $[t_1, t_2]$. Trouver alors une contradiction et conclure.

3. Exemple. Prenons dans cette question $U = \mathbb{R}^2$ et $f(t,x) = x^2 + \sin^2(tx)$.

   (a) Vérifier que, pour $\lambda \in \mathbb{R}$, l'application α de $]-\infty, \lambda[$ dans $\mathbb{R}$ définie par $\alpha(t) = \dfrac{1}{\lambda - t}$ est une barrière inférieure de (E).

   (b) En déduire que si, $u : I \to \mathbb{R}$ une solution de (E) et s'il existe un nombre réel t_0 tel que $u(t_0) > 0$, alors l'intervalle I est majoré.

4. De façon analogue, énoncer et démontrer le lemme de la barrière supérieure.

5. Unicité.

   (a) Déduire des résultats précédents que si, $u_1 : J_1 \to \mathbb{R}$ et $u_2 : J_2 \to \mathbb{R}$ sont deux solutions de (E) et s'il existe un nombre réel $t_0 \in J_1 \cap J_2$ tel que $u_1(t_0) = u_2(t_0)$, alors $u_1(t) = u_2(t)$ pour tout $t \in J_1 \cap J_2$.

   (b) Nous allons démontrer par un exemple que l'unicité est fausse lorsqu'on ne suppose plus la fonction f localement lipschitzienne en x. Posons $U = \mathbb{R}^2$ et prenons pour f l'application de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}$ définie par $f(t,x) = \sqrt{|x|}$.

      i. Prouver que la fonction f est continue. Est-elle localement lipschitzienne ?

      ii. Décrire toutes les solutions positives de (E).

      iii. Raccorder de telles solutions avec la fonction nulle pour construire deux solutions de (E) qui coïncident en un point mais pas en tout point.

Partie III : Entonnoirs et anti-entonnoirs

Dans la suite du problème, on admet le théorème de Cauchy-Lipschitz :

Soient U une partie ouverte de $\mathbb{R} \times \mathbb{R}^m$ et $f \in \mathcal{C}^0(U, \mathbb{R}^m)$ une fonction localement lipschitzienne en x. Soit (t_0, x_0) un point de U ; alors :

a) l'équation différentielle (E) admet une solution maximale unique $u : I \to \mathbb{R}^m$ satisfaisant à $u(t_0) = x_0$;

b) son ensemble de départ I est un intervalle ouvert de $\mathbb{R}$;

c) toute solution v de (E) telle que $v(t_0) = x_0$ est une restriction de u.

Dans cette partie, on prend $m = 1$ et on prend pour U le produit $]a,b[\times]c,d[$, où a, b, c, d désignent des nombres réels, ou $+\infty$, ou $-\infty$, et satisfont à $a < b$ et $c < d$. Soit $f \in \mathcal{C}^0(U, \mathbb{R})$ une fonction localement lipschitzienne en x. On note toujours (E) l'équation différentielle $x' = f(t,x)$.

1. Soient p et q des nombres réels tels que $p < q$ et soit $g :]p,q[\to \mathbb{R}$ une fonction dérivable dont la dérivée est bornée. Démontrer que la fonction g admet une limite finie en q.

2. Théorème de l'entonnoir.
   Soit $I \subset]a,b[$ un intervalle non trivial et soient $\alpha, \beta : I \to]c,d[$ des applications dérivables telles que, pour tout $t \in I$, on ait :

   $$\alpha(t) \leq \beta(t), \ \alpha'(t) \leq f(t, \alpha(t)) \text{ et } f(t, \beta(t)) \leq \beta'(t).$$

   Dans cette situation, on dit que l'ensemble :

   $$\Delta = \{(t,x) \mid t \in I \text{ et } \alpha(t) \leq x \leq \beta(t)\}$$

   est un entonnoir de (E) sur l'intervalle I. Nous allons établir que les solutions qui entrent dans un entonnoir s'y trouvent piégées.
   Soit $u : J \to \mathbb{R}$ une solution maximale de (E) et soit t_0 un point de J tel que $(t_0, u(t_0))$ appartienne à l'ensemble Δ.

(a) Démontrer que $(t, u(t))$ appartient à Δ pour tout $t \geq t_0$ appartenant à $I \cap J$.

(b) Démontrer que $I \cap [t_0, +\infty[$ est contenu dans J.

3. Exemple. On prend $U = \mathbb{R}^2$. On pose :

$$f(t,x) = t - x + g(t,x),$$

où $g \in \mathcal{C}^1(U, \mathbb{R})$ est une fonction qui satisfait à :

$$\begin{cases} g(t,x) \geq 1 \text{ pour } x < t, \\ g(t,x) \leq 1 \text{ pour } t < x. \end{cases}$$

(a) Démontrer que, pour tout réel $\lambda > 0$, les fonctions α et β définies par $\alpha(t) = t - \lambda e^{-t}$ et $\beta(t) = t + \lambda e^{-t}$, définissent un entonnoir sur $\mathbb{R}$.

(b) En déduire que toute solution maximale de (E) est définie sur un intervalle non majoré et admet une asymptote en $+\infty$.

Voici une nouvelle définition. Soit $I \subset]a, b[$ un intervalle non trivial et soient $\alpha, \beta : I \to]c, d[$ des applications dérivables telles que, pour tout $t \in I$, on ait :

$$\beta(t) \leq \alpha(t), \ \alpha'(t) \leq f(t, \alpha(t)) \ \text{ et } f(t, \beta(t)) \leq \beta'(t).$$

L'ensemble :

$$\Delta = \{(t,x) \mid t \in I \text{ et } \beta(t) \leq x \leq \alpha(t)\}$$

est appelé un anti-entonnoir de l'équation (E) sur l'intervalle I.

4. Un résultat d'unicité. On se donne un tel anti-entonnoir A, en supposant de plus que l'extrémité droite de l'intervalle I est le point b, que $\alpha(t) - \beta(t) \to 0$ quand $t \to b$ avec $t < b$, et enfin que la fonction f admet une dérivée partielle $\dfrac{\partial f}{\partial x}$ positive ou nulle sur A.
Démontrer qu'il existe au plus une solution u de (E) sur I telle que $(t, u(t))$ appartienne à l'ensemble A pour tout $t \in I$.

5. Un résultat d'existence. Dans cette question, A est un anti-entonnoir sur I, comme ci-dessus par des fonctions α et β, et on suppose que l'extrémité droite de l'intervalle I est le point b. Nous allons établir l'existence d'une solution u de (E) sur I telle que $(t, u(t))$ appartienne à l'ensemble A pour tout $t \in I$. Pour cela considérons une suite strictement croissante $(t_n)_{n \geq 0}$ d'éléments de I ayant pour limite b.

(a) Pour toute application u de J dans $\mathbb{R}$, on note $-J$ l'intervalle constitué des nombres réels t tels que $-t \in J$ et on définit l'application $\widehat{u} : -J \to \mathbb{R}$ par la formule $\widehat{u}(t) = u(-t)$. Démontrer que u est solution de (E) si, et seulement si, $\widehat{u}$ est solution d'une équation différentielle $\left(\widehat{E}\right)$ $x' = \widehat{f}(t,x)$ où $\widehat{f}$ est une fonction que l'on précisera.

(b) Vérifier que $\widehat{\beta}$ et $\widehat{\alpha}$ définissent un entonnoir de l'équation $\left(\widehat{E}\right)$ sur l'intervalle $-I$.

(c) Déduire de l'étude des entonnoirs l'existence, pour chaque entier $n \geq 1$, de deux solutions u_n, v_n de (E), définies sur $[t_0, t_n]$ telles que :

$$u_n(t_n) = \alpha(t_n) \ \text{ et } v_n(t_n) = \beta(t_n).$$

(d) Prouver que la suite $(u_n(t_0))_{n \geq 1}$ est décroissante, que la suite $(v_n(t_0))_{n \geq 1}$ est croissante et que l'on a $v_n(t_0) \leq u_n(t_0)$ pour tout $n \geq 1$.

(e) En déduire l'existence d'un nombre réels x_0 tel que $v_n(t_0) \leq x_0 \leq u_n(t_0)$ pour tout $n \geq 1$.

(f) Considérer l'unique solution maximale u de (E) telle que $u(t_0) = x_0$ et prouver l'existence annoncée.

Partie IV : Périodicité

Pour $T \in]0, +\infty[$, on dit qu'une application $h : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^m$ est T-périodique si, pour tout $t \in \mathbb{R}$, on a $h(t+T) = h(t)$.

Dans cette partie, on prend $U = \mathbb{R} \times]c, d[$ et on suppose l'application $f \in \mathcal{C}^0(U, \mathbb{R})$ localement lipschitzienne en x. De plus, on suppose que l'on a :

$$\forall (t, x) \in U,\ f(t, x) = f(t+T, x)$$

où T est un nombre réel > 0 donné.

1. Donner un exemple très simple d'une telle fonction f pour laquelle aucune solution de (E) n'est périodique.
2. Soit $u : J \to \mathbb{R}$ une solution maximale de l'équation différentielle (E).
   (a) Vérifier que l'application v définie par $v(t) = u(t+T)$ est aussi solution de (E) sur un intervalle à préciser.
   (b) En déduire que, s'il existe un nombre réel $t_0 \in J$ tel que $t_0 + T \in J$ et $u(t_0 + T) = u(t_0)$, alors u est T-périodique et $J = \mathbb{R}$.

   Définissons une application P (« une période plus tard ») de la façon suivante : pour chaque $z \in]c, d[$, notons $\gamma_z : I_z \to \mathbb{R}$ l'unique solution maximale de (E) telle que $\gamma_z(0) = z$. On pose :

   $$D = \{z \in]c, d[\mid T \in I_z\}$$

   et on note P l'application de D dans $\mathbb{R}$ définie par $P(z) = \gamma_z(T)$.
3. Démontrer que, pour $z \in]c, d[$, la solution γ_z est T-périodique si, et seulement si, $z \in D$ et $P(z) = z$.
4. Démontrer que :
   (a) l'ensemble D est un intervalle de $\mathbb{R}$,
   (b) l'application P est strictement croissante,
   (c) l'ensemble $P(D) = \{P(z) \mid z \in D\}$ est un intervalle de $\mathbb{R}$,
   (d) L'application P est continue.
5. Exemple : prenons $f(t, x) = \sin(t) + 2\cos(x)$ et $T = 2\pi$. Posons $u = \gamma_0$ et $v = \gamma_{-\pi}$.
   (a) Établir que les applications u et v sont bien définies sur $[0, 2\pi]$ (on pourra construire un entonnoir à l'aide des fonctions du type $t \mapsto \pm 3t + \lambda$).
   (b) Vérifier que la fonction nulle est une barrière inférieure de (E) sur $[0, 2\pi]$; en déduire que $u(2\pi) \geq 0$. Démontrer par un raisonnement similaire que $v(2\pi) \leq -\pi$.
   (c) Démontrer qu'il existe $z \in [-\pi, 0]$ tel que $P(z) = z$.
   (d) En déduire que (E) admet au moins une solution 2π-périodique.
   (e) Démontrer que (E) admet une infinité de solutions 2π-périodiques.

Partie V : Applications

Soient a_1 et a_2 des nombres réels tels que $0 < a_1 < a_2$ et soit $f \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R}^2, \mathbb{R}^2)$. Pour $x = (x_1, x_2)$ dans $\mathbb{R}^2$, on écrit $f(x) = (f_1(x), f_2(x))$. On note B l'ensemble des points (x_1, x_2) de $\mathbb{R}^2$ tels que $x_1 = \rho\cos(\theta)$, $x_2 = \rho\sin(\theta)$, avec $\theta \in \mathbb{R}$ et $\rho \in [a_1, a_2]$.

On fait en outre les hypothèses suivantes :

(H_1) pour x appartenant à la frontière de B dans $\mathbb{R}^2$, $f(x)$ pointe vers l'extérieur de B, ce qui signifie que, pour tout nombre réel θ, le produit scalaire $\langle f(a_i\cos(\theta), a_i\sin(\theta)), (\cos(\theta), \sin(\theta))\rangle$ est positif ou nul pour $i = 1$, négatif ou nul pour $i = 2$;

(H_2) le produit scalaire $\langle f(x_1, x_2), (-x_2, x_1)\rangle$ ne s'annule pas sur B.

Le but de cette partie est d'établir l'existence d'une solution périodique non constante, à valeurs dans B, de l'équation différentielle (E) $x' = f(x)$.

1. Montrer que l'on peut se ramener au cas où la condition suivante est réalisée :
   (H_3) le produit scalaire $\langle f(x_1, x_2), (-x_2, x_1)\rangle$ est > 0 pour tout $x \in B$.
   On suppose désormais que la condition (H_3) est réalisée.
2. Soit I un intervalle non trivial de $\mathbb{R}$ et soient $\theta \to \mathbb{R}$ et $h : \mathbb{R} \to]0, +\infty[$ deux applications dérivables. Pour $t \in I$, on pose :
   $$u_1(t) = h(\theta(t))\cos(\theta(t)),\ u_2(t) = h(\theta(t))\sin(\theta(t))$$
   et on note u l'application de I dans $\mathbb{R}^2$ définie par $u(t) = (u_1(t), u_2(t))$.
   Démontrer que u est solution de (E) si, et seulement si, l'on a, pour tout $x \in I$:
   $$\begin{cases} h'(\theta(t))\,\theta'(t) = g_1(\theta(t), h(t)) \\ \theta'(t) = g_2(\theta(t), h(\theta(t))) \end{cases}$$
   où g_1 et g_2 sont deux applications de $\mathbb{R} \times]0, +\infty[$ dans $\mathbb{R}$ que l'on précisera.
3. Prouver qu'il existe des nombres réels b_1 et b_2, avec $0 < b_1 < a_1 < a_2 < b_2$, tels que la fonction g_2 soit > 0 sur $\mathbb{R} \times]b_1, b_2[$.
4. Pour $(\theta, \rho) \in \mathbb{R} \times]b_1, b_2[$, on pose :
   $$G(\theta, \rho) = \frac{g_1(\theta, \rho)}{g_2(\theta, \rho)}.$$
   On considère l'équation différentielle (E') $\rho' = G(\theta, \rho)$. Puisque l'application G est de classe $\mathcal{C}^1$ et 2π-périodique en θ, on peut appliquer la partie **IV** avec $T = 2\pi$. On continue de noter P l'application « une période plus tard ».
   (a) Démontrer que $[0, 2\pi] \times [a_1, a_2]$ est un entonnoir de (E').
   (b) Démontrer que $P([a_1, a_2])$ est contenu dans $[a_1, a_2]$.
   (c) En déduire que l'application P admet au moins un point fixe dans $[a_1, a_2]$, puis que l'équation (E') admet au moins une solution 2π-périodique $h : \mathbb{R} \to [a_1, a_2]$.

   Désormais, on prend pour fonction $h : \mathbb{R} \to [a_1, a_2]$ une solution 2π-périodique de (E').
5. Pour $\theta \in \mathbb{R}$, on pose $\psi(\theta) = g_2(\theta, h(\theta))$.
   (a) Prouver que la fonction reste encadrée par deux nombres réels > 0.
   (b) En déduire que les solutions maximales de l'équation différentielle (E'') $\theta' = \psi(\theta)$ sont toutes des bijections de $\mathbb{R}$ sur $\mathbb{R}$.
6. Conclure.

2 Corrigé

Partie I

De $u_1' = u_2$ et $u_2' = -u_1 - qu_1^3$ avec u dérivable sur $\mathbb{R}$, on déduit que la fonction u est en fait de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$.

1. Si :
$$u: \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \to & \mathbb{R}^2 \\ t & \mapsto & (u_1(t), u_2(t)) \end{array}$$
est une fonction dérivable telle que :
$$\forall t \in \mathbb{R}, \begin{cases} u_1'(t) = u_2(t) \\ u_2'(t) = -u_1(t) - qu_1^3(t) \end{cases}$$
en définissant la fonction f sur $U = \mathbb{R} \times \mathbb{R}^2$ par :
$$\forall (t, x) = (t, x_1, x_2) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^2,\ f(t, x) = \left(x_2, -x_1 - qx_1^2\right)$$
on a :
$$\forall t \in \mathbb{R},\ u'(t) = (u_1'(t), u_2'(t)) = f(t, u(t))$$
ce qui signifie bien que u est solution d'une équattion différentielle du type (E).
Le système différentiel étant de la forme $u' = \varphi(u)$ est dit autonome. On peut toujours transformer un système différentiel en un système autonome (voir [?], chapitre 6, page 249).

2. On suppose que $q = 0$. En définissant la fonction u de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{C}$, par $u(t) = u_1(t) + iu_2(t)$, on a une fonction dérivable telle que $u' = u_2 - iu_1 = -iu$, ce qui donne $u(t) = \lambda e^{-it}$ pour tout réel t, où $\lambda = u(0)$ est une constante complexe. En écrivant $\lambda = \rho e^{i\theta}$ avec $\rho \in \mathbb{R}^+$ et $\theta \in [0, 2\pi[$, on a $u(t) = \rho e^{-i(t-\theta)}$ ou encore $u_1(t) = \rho\cos(t - \theta)$ et $u_2 = -\rho\sin(t - \theta)$. L'image de l'arc u est donc un cercle de centre 0 et de rayon ρ parcouru dans le sens inverse, c'est-à-dire dans le sens des aiguilles d'une montre, représenté en figure (1) (pour $\rho = 0$, il est réduit à un point). La courbe paramétrée $t \mapsto u(t)$ est la projection d'une solution de (E) dans le plan de phase.

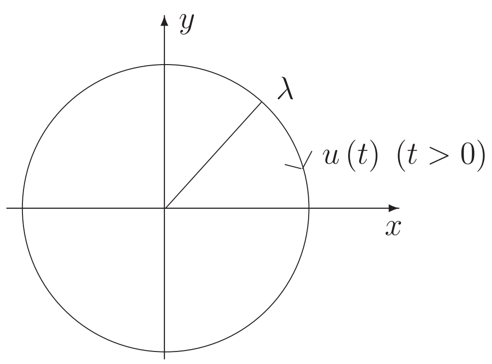

Figure 1 – $\mathrm{Im}(u)$ pour $q = 0$

L'ensemble de ces projections de solutions est appelé plan de phase (voir [?], page 247).

3.
   (a) La fonction $\varphi = u_1^2 + \dfrac{q}{2}u_1^4 + u_2^2$ est dérivable sur $\mathbb{R}$ de dérivée :
$$\varphi' = 2\left(u_1u_1' + qu_1^3u_1' + u_2u_2'\right)$$

et tenant compte :

$$\left\{\begin{array}{l} u_1' = u_2 \\ u_2' = -u_1 - qu_1^3 \end{array}\right.$$

on a :

$$\varphi' = 2\left(u_1u_2 + qu_1^3u_2 - u_2u_1 - u_2qu_1^3\right) = 0$$

ce qui signifie que la fonction φ est constante. En notant p la valeur constante de φ, on déduit que l'image de l'arc u est contenu dans la courbe C_p d'équation implicite $x_1^2 + \frac{q}{2}x_1^4 + x_2^2 = p$.

(b) Comme q est strictement positif, la fonction φ est à valeurs positives ou nulles (c'est une somme de carrés) et $p \geq 0$. Si $p = 0$, on a $u_1^2(t) + \frac{q}{2}u_1^4(t) + u_2^2(t) = 0$ pour tout réel t, ce qui équivaut à dire que $u_1(t) = u_2(t) = 0$ puisque tous les termes de la somme sont positifs ou nuls.
En fait, pour tout réel t_0, on a $p = u_1^2(t_0) + \frac{q}{2}u_1^4(t_0) + u_2^2(t_0)$ et $u = 0$ si, et seulement si, elle s'annule en un point.

(c) On définit la fonction h sur $\mathbb{R}^2$ par :

$$\forall (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2,\ h(x_1, x_2) = x_1^2 + \frac{q}{2}x_1^4 + x_2^2 - p.$$

Comme pour tout $(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2$, on a :

$$h(x_1, x_2) = h(-x_1, x_2) = h(x_1, -x_2) = h(-x_1, -x_2)$$

les axes O_x et O_y sont des axes de symétrie pour la courbe C_p et il suffit de la tracer dans le quart de plan P_1 défini par $x_1 \geq 0$ et $x_2 \geq 0$. Pour tout $(x_1, x_2) \in C_p$, on a $p - x_1^2 - \frac{q}{2}x_1^4 = x_2^2 \geq 0$ et dans le quart de plan P_1, on a l'équation cartésienne suivante de C_p :

$$x_2 = \sqrt{p - x_1^2\left(1 + \frac{q}{2}x_1^2\right)}$$

Le polynôme $P(t) = p - t - \frac{q}{2}t^2$ a pour discriminant $\delta = 1 + 2pq > 1$ et pour racines $t_1 = -\frac{1+\sqrt{\delta}}{q} < 0$ et $t_2 = \frac{\sqrt{\delta}-1}{q} > 0$. L'étude de C_p se fait donc pour $x_1 \in \left[0, \sqrt{t_2}\right]$.
La fonction $x_1 \mapsto x_2(x_1)$ est strictement décroissante sur $\left[0, \sqrt{t_2}\right]$. En particulier, on a $x_2(0) = \sqrt{p}$ avec une tangente horizontale en 0 et $x_2(t_2) = 0$ avec une tangente verticale en $\sqrt{t_2}$ (la dérivée de x_2 sur $\left[0, \sqrt{t_2}\right[$ est $x_2'(x_1) = -\frac{x_1(1+2qx_1^2)}{x_2(x_1)}$).

Par exemple, pour $q = 2$ et $p = 1$, on a $\delta = 5$, $\sqrt{t_2} = \sqrt{\frac{\sqrt{5}-1}{2}} \approx 0.786$ et on obtient le graphe de la figure (2).

(d) Pour $p > 0$, la fonction u ne s'annule jamais sur $\mathbb{R}$. En identifiant $\mathbb{R}^2$ au plan complexe $\mathbb{C}$, la fonction u est de classe $\mathcal{C}^1$ de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{C}^*$, ce qui entraîne que la fonction $\rho : t \mapsto |u(t)|$ est de classe $\mathcal{C}^1$ de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}^*$ et la fonction $\gamma : t \mapsto \frac{u(t)}{|u(t)|}$ est de classe $\mathcal{C}^1$ de $\mathbb{R}$ dans le cercle unité $\Gamma = \{z \in \mathbb{C} \mid |z| = 1\}$. Le théorème de relèvement nous dit alors qu'en notant θ_0 un réel tel que $\gamma(0) = e^{i\theta_0}$, il existe une unique fonction θ de classe $\mathcal{C}^1$ de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ telle que $\theta(0) = \theta_0$ et $\gamma(t) = e^{i\theta(t)}$ pour tout $t \in \mathbb{R}$ (voir [?], page 86), ce qui se traduit par :

$$\forall t \in \mathbb{R},\ u(t) = \rho(t)\, e^{i\theta(t)}$$

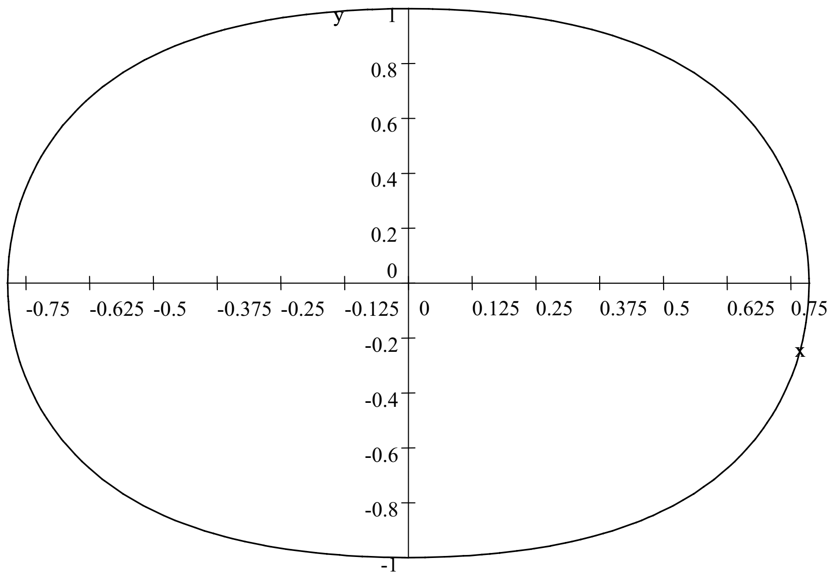

FIGURE 2 – $C_1 : x_1^2 + x_1^4 + x_2^2 = 1$

ou encore :

$$\forall t \in \mathbb{R}, \ \begin{cases} u_1(t) = \rho(t)\cos(\theta(t)) \\ u_2(t) = \rho(t)\sin(\theta(t)) \end{cases}$$

avec ρ et θ de classe $\mathcal{C}^1$ de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$.

(e)

i. De $\gamma = \dfrac{u}{|u|} = e^{i\theta}$, on déduit que $\gamma' = i\theta'\gamma$ et $\theta' = -i\dfrac{\gamma'}{\gamma}$. En désignant par x et y les fonctions définies sur $\mathbb{R}$ par $x = \cos(\theta)$ et $y = \sin(\theta)$, on a $\gamma = x + iy$, $\gamma' = x' + iy'$ et :

$$\theta' = -i\frac{x'+iy'}{x+iy} = -i\frac{(x'+iy')(x-iy)}{(x+iy)(x-iy)} = -i\frac{xx'+yy'+i(xy'-x'y)}{x^2+y^2}$$

avec $x^2 + y^2 = \cos^2(\theta) + \sin^2(\theta) = 1$ et par dérivation que $xx' + yy' = 0$. On a donc :

$$\theta' = xy' - x'y.$$

En considérant que $u_1 = \rho x$ et $u_2 = \rho y$ et en utilisant le système différentiel :

$$\begin{cases} u_1' = u_2 \\ u_2' = -u_1 - qu_1^3 \end{cases}$$

on a :

$$\begin{cases} \rho' x + \rho x' = \rho y \\ \rho' y + \rho y' = -\rho x - q\rho^3 x^3 \end{cases}$$

ce qui donne :

$$\begin{cases} \rho' xy + \rho x' y = \rho y^2 \\ \rho' xy + \rho xy' = -\rho x^2 - q\rho^3 x^4 \end{cases}$$

et par soustraction :

$$\rho(x'y - xy') = \rho\left(y^2 + x^2 + q\rho^2 x^4\right) = \rho\left(1 + q\rho^2 x^4\right)$$

ou encore $-\rho\theta' = \rho(1 + q\rho^2 x^4)$ avec $\rho(t) > 0$ pour tout réel t. On a donc :

$$\forall t \in \mathbb{R}, \ \theta'(t) = -1 - q\rho^3(t)\cos^4(t).$$

ii. On a déjà $\mathrm{Im}(u) \subset C_p$ (question I.3a). Il s'agit alors de montrer que :

$$\forall x \in C_p,\ \exists t \in \mathbb{R} \mid x = u(t) = \rho(t)(\cos(\theta(t)), \sin(\theta(t))).$$

Pour ce faire, on écrit un point $x = (x_1, x_2)$ de C_p en coordonnées polaires, soit $x = r(\cos(\alpha), \sin(\alpha))$ avec $r > 0$ (puisque $(0,0) \notin C_p$ pour $p > 0$) et $\alpha \in \mathbb{R}$ et nous allons montrer qu'il existe un réel t tel que $r = \rho(t)$ et $\alpha = \theta(t)$. Nous montrons tout d'abord que la fonction θ réalise une bijection de $\mathbb{R}$ sur $\mathbb{R}$. Cette fonction est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$ avec :

$$\forall t \in \mathbb{R},\ \theta'(t) = -1 - q\rho^3(t)\cos^4(t) \leq -1 < 0,$$

elle est donc continue strictement décroissante et en conséquence réalise une bijection de $\mathbb{R}$ sur $\theta(\mathbb{R})$. L'inégalité $\theta' \leq -1$ nous dit que la fonction $t \mapsto \theta(t) + t$ est décroissante (sa dérivée est négative) et en conséquence :

$$\forall t \in \mathbb{R}^+,\ \theta(t) + t \leq \theta(0)$$

ou encore $\theta(t) \leq \theta(0) - t$ pour tout réel $t \geq 0$, ce qui entraîne que $\lim\limits_{t \to +\infty} \theta(t) = -\infty$. De même avec $\theta(t) \geq \theta(0) - t$ pour tout réel $t \leq 0$, on déduit que $\lim\limits_{t \to -\infty} \theta(t) = +\infty$. On a donc $\theta(\mathbb{R}) = \mathbb{R}$ et θ réalise une bijection de $\mathbb{R}$ sur $\mathbb{R}$. On déduit que pour $x = r(\cos(\alpha), \sin(\alpha)) \in C_p$, il existe $t \in \mathbb{R}$ tel que $\alpha = \theta(t)$ et :

$$x = r(\cos(\theta(t)), \sin(\theta(t))).$$

Comme $x = (x_1, x_2) \in C_p$ et $u(t) = (u_1(t), u_2(t)) \in \mathrm{Im}(u) \subset C_p$, on a :

$$x_1^2 + \frac{q}{2}x_1^4 + x_2^2 = p = u_1^2(t) + \frac{q}{2}u_1^4(t) + u_2^2(t)$$

avec $x_1 = r\cos(\alpha)$, $x_2 = r\sin(\alpha)$, $u_1(t) = \rho(t)\cos(\alpha)$ et $u_2(t) = \rho(t)\sin(\alpha)$ (puisque $\alpha = \theta(t)$), ce qui donne :

$$r^2 + \frac{q}{2}r^4\cos^4(\alpha) = \rho^2(t) + \frac{q}{2}\rho^4(t)\cos^4(\alpha)$$

ou encore :

$$\left(r^2 - \rho^2(t)\right)\left(1 + \frac{q}{2}\cos^4(\alpha)\left(r^2 + \rho^2(t)\right)\right) = 0$$

équivalent à $r = \rho(t)$. On a donc bien $x = u(t) \in \mathrm{Im}(u)$ et $\mathrm{Im}(u) = C_p$.

Partie II : Barrières

1. La fonction $\varphi : t \mapsto e^{-Kt}$ est de classe $\mathcal{C}^\infty$ de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}^{+,*}$ avec $\varphi' = -K\varphi$ et pour $h : [a,b] \to \mathbb{R}$ dérivable, la fonction $h\varphi$ est dérivable avec :

$$(h\varphi)' = h'\varphi + h\varphi' = (h' - Kh)\varphi.$$

Si de plus on a $h' \leq Kh$, il en résulte que $(h\varphi)' \leq 0$ et la fonction $h\varphi$ est décroissante sur $[a,b]$. On a alors :

$$\forall t \in [a,b],\ h(t)\varphi(t) \leq h(a)\varphi(a) = 0$$

si $h(a) = 0$, ce qui équivaut à $h(t) \leq 0$ pour tout $t \in [a,b]$ puisque φ est à valeurs strictement positives.

2. On suppose que l'intervalle $I \cap J$ est non trivial et qu'il existe $t_0 \in I \cap J$ tel que $\alpha(t_0) \leq u(t_0)$. On note $\beta = \alpha - u$, c'est une fonction dérivable sur $I \cap J$.

   (a) On suppose qu'il existe $t^* \in \left]t_0, +\infty\right[\cap I \cap J$ tel que $\beta(t^*) > 0$. Comme $I \cap J$ est un intervalle qui contient t_0 et t^*, il contient l'intervalle $[t_0, t^*]$.
   L'ensemble :
$$E = \{t \in [t_0, t^*] \mid \beta(t) \leq 0\}$$
   est non vide (il contient t_0) et majoré par t^*, il admet donc une borne supérieure $t_1 \in [t_0, t^*]$.
   De $\beta(t^*) > 0$ et de la continuité de β, on déduit qu'il existe un réel $\eta > 0$ assez petit pour que $[t^* - \eta, t^*] \subset [t_0, t^*]$ tel que :
$$\forall t \in [t^* - \eta, t^*],\ \beta(t) > 0$$
   et en conséquence $t_1 \leq t^* - \eta < t^*$ (en effet si $t^* - \eta < t_1 \leq t^*$, par définition de la borne supérieure t_1, on peut trouver t_2 dans $E \cap \left]t^* - \eta, t^*\right]$ et $\beta(t_2) \leq 0$ contredit $\beta(t_2) > 0$).
   Par définition de t_1, on a :
$$\forall t \in \left]t_1, t^*\right],\ \beta(t) > 0$$
   (puisque $t > t_1$ n'est pas dans E), ce qui donne $\beta\left(t_1 + \dfrac{1}{n}\right) > 0$ pour tout entier n assez grand et passant à la limite quand n tend vers l'infini, on obtient $\beta(t_1) \geq 0$ puisque β est continue.
   Si $t_1 = t_0$, on a alors $\beta(t_1) = \beta(t_0) \leq 0$ et $\beta(t_1) = 0$.
   Si $t_1 > t_0$, par définition de la borne supérieure t_1, on peut trouver pour tout entier n assez grand un réel s_n dans $E \cap \left]t_1 - \dfrac{1}{n}, t_1\right]$ et avec la continuité de β on a $\beta(t_1) = \lim\limits_{n \to +\infty} \beta(s_n) \leq 0$ et $\beta(t_1) = 0$.
   On a donc bien trouvé $t_0 \leq t_1 < t^*$ dans $I \cap J$ tels que :
$$u(t_1) = \alpha(t_1) \text{ et } \forall t \in \left]t_1, t^*\right],\ u(t) < \alpha(t).$$

   (b) On note $\|\cdot\|_\infty$ la norme définie sur $\mathbb{R}^2$ par :
$$\forall (t, x) \in \mathbb{R}^2,\ \|(t, x)\|_\infty = \max\{|t|, |x|\}.$$
   Pour tout réel $r > 0$ et tout point (a, b) de $\mathbb{R}^2$, $B_\infty((a, b), r)$ désigne la boule ouverte de centre (a, b) et de rayon r pour cette norme, soit :
$$\begin{aligned} B_\infty((a, b), r) &= \left\{(t, x) \in \mathbb{R}^2 \mid \|(t, x) - (a, b)\|_\infty < r\right\} \\ &= \left\{(t, x) \in \mathbb{R}^2 \mid |t - a| < r \text{ et } |x - b| < r\right\} \\ &= \left]a - r, a + r\right[\times \left]b - r, b + r\right[. \end{aligned}$$
   Pour tout $t \in [t_0, t^*] \subset I \cap J \subset I$, on a $(t, \alpha(t)) \in U$. En particulier, le point $(t_1, x_1) = (t_1, \alpha(t_1))$ est dans l'ouvert U et il existe un réel $\varepsilon > 0$ tel que :
$$B_1 = B_\infty((t_1, x_1), \varepsilon) \subset U.$$
   Comme la fonction f est supposée localement lipschitzienne en x, on peut trouver un tel $\varepsilon > 0$ et un réel $C > 0$ tels que $B_1 \subset U$ et pour tous (t, x) et (t, y) dans B_1, on ait :
$$|f(t, x) - f(t, y)| \leq C|x - y|.$$

Par ailleurs, les fonctions α et u étant continues sur I, il existe un réel $\eta \in]0, \varepsilon[$ tel que $t_2 = t_1 + \eta \in]t_1, t^*]$ et :

$$\forall t \in [t_1 - \eta, t_1 + \eta] \cap I, \left\{ \begin{array}{l} |\alpha(t) - \alpha(t_1)| < \varepsilon, \\ |u(t) - u(t_1)| < \varepsilon \end{array} \right.$$

On a donc $(t, \alpha(t)) \in B_1$ et $(t, u(t)) \in B_1$ pour tout $t \in [t_1, t_2]$ (on rappelle que $u(t_1) = \alpha(t_1)$ et on a $[t_1, t_2] \subset I$ puisque t_1 et t_2 sont dans l'intervalle I) et :

$$|f(t, \alpha(t)) - f(t, u(t))| \leq C |\alpha(t) - u(t)|. \tag{1}$$

(c) De $\alpha'(t) \leq f(t, \alpha(t))$, $u(t) \leq \alpha(t)$ et $u'(t) = f(t, u(t))$ pour tout $t \in [t_1, t_2] \subset I$, on déduit de (1) que :

$$\alpha'(t) - u'(t) \leq f(t, \alpha(t)) - f(t, u(t)) \leq C(\alpha(t) - u(t))$$

ce qui signifie que la fonction $\varphi = \alpha - u$ qui est dérivable sur $[t_1, t_2]$ avec $\varphi(t_1) = 0$ est telle que $\varphi' \leq C\varphi$. On a donc $\varphi \leq 0$ sur $[t_1, t_2]$ d'après **II.1** en contradiction avec $\varphi = \alpha - u > 0$ sur $[t_1, t_2]$.

En conclusion, on a $\alpha \leq u$ sur tout l'intervalle $[t_0, +\infty[\cap I \cap J$. Dans une telle situation, on dit que la barrière inférieure α est non poreuse. On a donc démontré le :

Théorème 1 (de la barrière inférieure) *Pour une équation différentielle $x' = f(t, x)$ vérifiant une condition de Lipschitz locale en x, toute barrière inférieure (resp. supérieure) est non poreuse.*

Ce résultat est montré de manière différente dans [**?**], page 151.

3. La fonction $f : (t, x) \mapsto x^2 + \sin^2(tx)$ qui est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $U = \mathbb{R}^2$ y est localement lipschitzienne en x. On peut aussi le vérifier directement en écrivant que, pour tous réels t, x_1, x_2, on a :

$$f(t, x_1) - f(t, x_2) = \left(x_1^2 - x_2^2\right) + \left(\sin^2(tx_1) - \sin^2(tx_2)\right)$$

avec :

$$\begin{aligned} \left|\sin^2(tx_1) - \sin^2(tx_2)\right| &= |\sin(tx_1) + \sin(tx_2)| \, |\sin(tx_1) - \sin(tx_2)| \\ &\leq 2 |\sin(tx_1) - \sin(tx_2)| \\ &\leq 2 |t| \, |x_1 - x_2| \, |\cos(\xi)| \leq 2 |t| \, |x_1 - x_2| \end{aligned}$$

ce qui donne :

$$|f(t, x_1) - f(t, x_2)| \leq (2|t| + |x_1 + x_2|) |x_1 - x_2|$$

et pour $(t_0, x_0) \in \mathbb{R}^2$, en prenant $\varepsilon = 1$, on a :

$$|f(t, x_1) - f(t, x_2)| \leq C |x_1 - x_2|$$

pour tous (t, x_1) et (t, x_2) dans $B_\infty((t_0, x_0), 1)$.

(a) Pour $\lambda \in \mathbb{R}$, la fonction $\alpha : t \mapsto \dfrac{1}{\lambda - t}$ est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $]-\infty, \lambda[$ et pour tout $t \in]-\infty, \lambda[$, on a :

$$\alpha'(t) = \alpha^2(t) \leq f(t, \alpha(t)) = \alpha^2(t) + \sin^2(t\alpha(t)),$$

c'est donc une barrière inférieure de (E).

(b) On suppose qu'il existe $t_0 \in I$ tel que $u(t_0) > 0$. On désigne par λ un réel tel que $t_0 \in]-\infty, \lambda[$ (ce qui impose $\lambda > 0$) et $\alpha(t_0) = \dfrac{1}{\lambda - t_0} < u(t_0)$ (soit $\lambda > \dfrac{1}{u(t_0)} + t_0$). Le théorème de la barrière inférieure nous dit alors que :

$$\forall t \in [t_0, +\infty[\cap I \cap]-\infty, \lambda[= [t_0, \lambda[\cap I,\ \alpha(t) = \frac{1}{\lambda - t} \leq u(t)$$

et $\lambda \notin I$ puisque sinon, $u(\lambda) = \lim\limits_{\substack{t \to \lambda \\ t < \lambda}} u(t) \geq \lim\limits_{\substack{t \to \lambda \\ t < \lambda}} \dfrac{1}{\lambda - t} = +\infty$, ce qui est impossible. En conclusion I est un intervalle qui contient $t_0 < \lambda$ et ne contient pas λ, ce qui implique que $I \subset]-\infty, \lambda[$ et I est majoré.

4. En gardant les notations de cette partie, le théorème de la barrière supérieure peut s'énoncer comme suit :
soient β est une fonction dérivable de I dans $\mathbb{R}$ telle que $(t, \beta(t)) \in U$ et $\beta'(t) \geq f(t, \beta(t))$ pour tout $t \in I$ (on dit que β est une barrière supérieure de (E)) et u une solution de (E) sur J. S'il existe un réel $t_0 \in I \cap J$ tel que $\beta(t_0) \geq u(t_0)$, alors $\beta(t) \geq u(t)$ pour tout $t \in [t_0, +\infty[\cap I \cap J$.
Ce résultat peut se déduire du théorème de la barrière inférieure en remarquant que la fonction $v = -u$ est solution sur J de l'équation différentielle $v'(t) = g(t, v(t))$, où la fonction g est définie sur $U' = \{(t, x) \in \mathbb{R}^2 \mid (t, -x) \in U\}$ par $g(t, x) = -f(t, -x)$ et vérifie les mêmes hypothèses que f. La fonction $\alpha = -\beta$ est alors une barrière inférieure pour l'équation différentielle définie par g et le résultat en découle.

5.

(a) Nous allons montrer le résultat plus général suivant :
si, $u_1 : J_1 \to \mathbb{R}$ et $u_2 : J_2 \to \mathbb{R}$ sont deux solutions de (E) et s'il existe un nombre réel $t_0 \in J_1 \cap J_2$ tel que $u_1(t_0) \leq u_2(t_0)$, alors $u_1(t) \leq u_2(t)$ pour tout $t \in J_1 \cap J_2$.
On suppose que les intervalles J_1 et J_2 sont tels que $I = J_1 \cap J_2$ soit non trivial.
On a donc :

$$\forall t \in I,\ u_1'(t) = f(t, u_1(t)) \text{ et } u_2'(t) = f(t, u_2(t)).$$

La fonction u_1 est alors une barrière inférieure de (E) pour la solution u_2 et le lemme de la barrière inférieure nous dit que :

$$\forall t \in [t_0, +\infty[\cap I,\ u_1(t) \leq u_2(t).$$

Il nous reste à montrer que l'inégalité est également vérifiée sur $]-\infty, t_0] \cap I$. Pour ce faire on introduit des notations qui seront utilisées en **III.5a** : pour tout intervalle réel J, on note $\widehat{J} = -J = \{-t \mid t \in J\}$ (c'est aussi un intervalle) et pour toute fonction u définie sur J, $\widehat{u}$ est la fonction définie sur $\widehat{J} = -J$ par $\widehat{u}(\tau) = u(-\tau)$ pour tout $\tau \in \widehat{J}$. Les fonctions $\widehat{u_1}$ et $\widehat{u_2}$, définies respectivement sur $\widehat{J_1}$ et $\widehat{J_2}$, sont solutions de l'équation différentielle :

$$v'(t) = -u'(-t) = -f(-t, u(-t)) = g(t, v(t))$$

où la fonction g définie par $g(t, x) = -f(-t, x)$ est continue et localement lipschitzienne en x sur l'ouvert $U' = \{(t, x) \in \mathbb{R}^2 \mid (-t, x) \in U\}$. Les fonctions $\widehat{u_1}$ et $\widehat{u_2}$ sont donc solutions sur l'intervalle $\widehat{I} = \widehat{J_1} \cap \widehat{J_2}$ de l'équation différentielle $x' = g(t, x)$ avec $\widehat{u_1}(-t_0) \leq \widehat{u_2}(-t_0)$ où $-t_0 \in \widehat{I}$. On a donc :

$$\forall \tau \in [-t_0, +\infty[\cap \widehat{I},\ \widehat{u_1}(\tau) \leq \widehat{u_2}(\tau)$$

encore équivalent à :

$$\forall t \in]-\infty, t_0] \cap I,\ u_1(t) \leq u_2(t)$$

puisque tout réel $\tau \in [-t_0, +\infty[\cap \widehat{I}$ s'écrit $\tau = -t$ avec $t \in]-\infty, t_0] \cap I$ et $\widehat{u_k}(\tau) = u_k(t)$ pour $k = 1, 2$.
On a donc bien $u_1 \leq u_2$ sur $I = J_1 \cap J_2$.
Si maintenant, on suppose que $t_0 \in I$ est tel que $u_1(t_0) = u_2(t_0)$, en permutant les rôles des fonctions u_1 et u_2, on déduit que $u_1 = u_2$ sur $I = J_1 \cap J_2$.

(b)

i. La fonction f est continue sur $\mathbb{R}^2$ comme composée de la projection $(t, x) \mapsto x$ (continue puisque linéaire) et la fonction $x \mapsto \sqrt{|x|}$.
Si f est localement lipschitzienne en x, pour (t_0, x_0) donné dans $\mathbb{R}^2$, on peut trouver deux réels $\varepsilon > 0$ et $k > 0$ tels pour tous (t, x_1) et (t, x_2) dans $B = [t_0 - \varepsilon, t_0 + \varepsilon] \times [x_0 - \varepsilon, x_0 + \varepsilon]$, on ait :

$$|f(t, x_1) - f(t, x_2)| = \left|\sqrt{|x_1|} - \sqrt{|x_2|}\right| \leq k|x_1 - x_2|$$

En prenant t_0 quelconque et $x_0 = 0$, on a alors en particulier pour $t \in [t_0 - \varepsilon, t_0 + \varepsilon]$ et tous $x_1 \neq x_2$ dans $]0, \varepsilon]$:

$$|\sqrt{x_1} - \sqrt{x_2}| = \frac{|x_1 - x_2|}{\sqrt{x_1} + \sqrt{x_2}} \leq k|x_1 - x_2|$$

soit :

$$1 \leq k(\sqrt{x_1} + \sqrt{x_2})$$

et faisant tendre x_1 et x_2 vers 0, on aboutit à une contradiction.
La fonction f n'est donc pas localement lipschitzienne en x.

ii. Soit u une solution sur un intervalle I de l'équation différentielle $x' = \sqrt{|x|}$ à valeurs strictement positives. De $u' = \sqrt{u}$, on déduit que $(\sqrt{u})' = \frac{u'}{2\sqrt{u}} = \frac{1}{2}$ et il existe une constante réelle k telle que $\sqrt{u(t)} = \frac{t}{2} + k$ pour tout $t \in I$. De la stricte positivité de $\sqrt{u}$, on déduit que nécessairement $\frac{t}{2} + k > 0$ sur I, soit $t > -2k$. On a donc $I \subset]-2k, +\infty[$ et $u(t) = \left(\frac{t}{2} + k\right)^2$ pour tout $t \in I$.
Réciproquement, pour tout réel k, on vérifie facilement que la fonction $u : t \mapsto \left(\frac{t}{2} + k\right)^2$ est solution à valeurs strictement positives de l'équation différentielle $x' = \sqrt{|x|}$ sur tout intervalle $I \subset]-2k, +\infty[$.

iii. En prenant $k = 0$, la fonction $u : t \mapsto \frac{t^2}{4}$ est dérivable sur $]0, +\infty[$, à valeurs strictement positives sur cet intervalle et $u'(t) = \frac{t}{2} = \sqrt{u(t)}$. Sa prolongée en 0 définie par :

$$\forall t \in \mathbb{R},\ u(t) = \begin{cases} 0 \text{ si } t \leq 0 \\ \frac{t^2}{4} \text{ si } t > 0 \end{cases}$$

est dérivable sur $\mathbb{R}$ (sur $\mathbb{R}^*$ c'est évident et pour $t \neq 0$, $\frac{u(t) - u(0)}{t} \underset{t \to 0}{\to} 0$, donc $u'(0) = 0$) avec $u' = \sqrt{u}$.
De même, en prenant $k = -1$, la fonction v définie par :

$$\forall t \in \mathbb{R},\ v(t) = \begin{cases} 0 \text{ si } t \leq 2 \\ \left(\frac{t}{2} - 1\right)^2 \text{ si } t > 2 \end{cases}$$

est dérivable sur $\mathbb{R}$ (sur $\mathbb{R} \setminus \{2\}$ c'est évident et pour $t \neq 2$, $\dfrac{v(t) - v(2)}{t-2} \underset{t \to 0}{\to} 0$, donc $v'(2) = 0$) avec $v' = \sqrt{v}$.
Ces deux fonctions coïncident sur $\mathbb{R}^-$, mais pas sur $\mathbb{R}^{+,*}$.
L'hypothèse « f localement lipschitzienne en x » est donc essentielle pour assurer l'unicité d'une solution prenant une valeur donnée en un point.

Partie III : Entonnoirs et anti-entonnoirs

1. En utilisant le théorème des accroissements finis et en notant $M = \sup\limits_{t \in]p,q[} |g'(t)|$, on a pour tous x, y dans $]p, q[$:

$$|g(x) - g(y)| = |x - y| \, |g'(\xi)| \leq M |x - y| \underset{(x,y) \to (q,q)}{\to} 0.$$

On déduit alors du critère de Cauchy que la fonction g admet une limite finie en q.
On montre de même que g admet une limite finie en p.
L'exemple de la fonction $g : t \mapsto \ln(t)$ sur $]1, +\infty[$ nous montre que ce résultat n'est plus vrai pour $q = +\infty$.

2. Si $u : J \to \mathbb{R}$ est une solution maximale de (E) alors l'intervalle J est ouvert. On le notera $J =]t_1, t_2[$ avec $-\infty \leq t_1 = \inf(J) < t_2 = \sup(J) \leq +\infty$.
De plus, comme J est un intervalle contenant t_0, on a $[t_0, t_2[\subset J$.
Les hypothèses sur α et β nous disent que α est une barrière inférieure de (E) sur l'intervalle I et β une barrière supérieure de (E) sur I.

   (a) Comme $(t_0, u(t_0)) \in \Delta$ on a $t_0 \in I$, donc $t_0 \in I \cap J$, $\alpha(t_0) \leq u(t_0) \leq \beta(t_0)$ et les lemmes de la barrière inférieure et de la barrière supérieure nous disent que :

$$\forall t \in [t_0, +\infty[\cap I \cap J, \ \alpha(t) \leq u(t) \leq \beta(t)$$

   c'est-à-dire que :

$$\forall t \in [t_0, +\infty[\cap I \cap J, \ (t, u(t)) \in \Delta.$$

   (b) Si $t_2 = +\infty$, soit $J =]t_1, +\infty[$, on a alors :

$$[t_0, +\infty[\cap I \subset [t_0, +\infty[\subset J.$$

   Supposons que $t_2 < +\infty$ et que $[t_0, +\infty[\cap I$ ne soit pas contenu dans J. Il existe alors $t_3 \in [t_0, +\infty[\cap I$ tel que $t_3 \notin J$ et nécessairement $[t_0, t_3] \subset I$ et $t_0 < t_2 \leq t_3$ puisque I et J sont des intervalles. En particulier, $t_2 \in I$.
   En utilisant **III.2a**, on a :

$$\forall t \in [t_0, t_2[\subset [t_0, +\infty[\cap I \cap J, \ \alpha(t) \leq u(t) \leq \beta(t).$$

   Les fonctions α et β étant continues sur l'intervalle compact $[t_0, t_2] \subset I \subset]a, b[$ y sont bornées et atteignent leurs bornes. On a alors $m = \inf\limits_{t \in [t_0, t_2]} \alpha(t) = \alpha(\tau_1) \in]c, d[$, $M = \sup\limits_{t \in [t_0, t_2]} \beta(t) = \beta(\tau_2) \in]c, d[$ et :

$$\forall t \in [t_0, t_2[, \ m \leq u(t) \leq M.$$

   Par ailleurs la fonction f qui est continue sur $U =]a, b[\times]c, d[$ l'est également sur le compact $K = [t_0, t_2] \times [m, M]$, elle est donc bornée sur ce compact. Il existe donc un réel $\lambda > 0$ tel que :

$$\forall (t, x) \in K, \ |f(t, x)| \leq \lambda$$

et on a :

$$\forall t \in [t_0, t_2[\,,\ |u'(t)| = |f(t, u(t))| \leq \lambda.$$

On déduit alors de **III.1** que la fonction u admet une limite finie en t_2, elle se prolonge donc par continuité en t_2 en posant $u(t_2) = \lim\limits_{t \to t_2^-} u(t)$.
De l'encadrement $\alpha(t) \leq u(t) \leq \beta(t)$ valable sur $[t_0, t_2[$ avec $t_2 \in I$, on déduit par passage à la limite que $\alpha(t_2) \leq u(t_2) \leq \beta(t_2)$ (les fonctions α et β sont continues sur I).
La fonction u ainsi prolongée à $[t_0, t_2]$ est continue sur cet intervalle, à valeurs dans $]c, d[$ et dérivable sur $[t_0, t_2[$ avec :

$$\lim_{t \to t_2^-} u'(t) = \lim_{t \to t_2^-} f(t, u(t)) = f(t_2, u(t_2)).$$

On déduit alors du théorème des accroissement finis que u est également dérivable en t_2 avec $u'(t_2) = f(t_2, u(t_2))$.
En définitive on a prolongé la solution maximale u définie $J =]t_1, t_2[$ avec la condition initiale $u(t_0) = x_0$ en une solution vérifiant la même condition initiale et définie sur l'intervalle $J' =]t_1, t_2]$ qui contient strictement J, ce qui est impossible.
On a donc encore $[t_0, +\infty[\cap I \subset J$ pour $t_2 = \sup(J)$ fini.

3.

(a) Les fonctions α et β sont de classe $\mathcal{C}^\infty$ de $I = \mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ avec :

$$\forall t \in \mathbb{R},\ \alpha(t) = t - \lambda e^{-t} < t < \beta(t) = t + \lambda e^{-t}$$

puisque $\lambda > 0$ et la fonction exp est à valeurs strictement positives.
De plus, pour tout réel t, on a :

$$\begin{cases} f(t, \alpha(t)) = \lambda e^{-t} + g(t, \alpha(t)) \geq \lambda e^{-t} + 1 = \alpha'(t) \\ f(t, \beta(t)) = g(t, \alpha(t)) - \lambda e^{-t} \leq 1 - \lambda e^{-t} = \beta'(t) \end{cases}$$

puisque $\alpha(t) < t$ et $t < \beta(t)$.
Les fonctions α et β définissent donc un entonnoir de (E) sur $\mathbb{R}$.

(b) La fonction f qui est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}^2$ y est continue et localement lipschistzienne en x. Pour (t_0, x_0) donné dans $\mathbb{R}^2$, on désigne par u une solution maximale de (E) sur un intervalle ouvert J qui contient t_0 avec la condition initiale $u(t_0) = x_0$. Comme $\lim\limits_{\lambda \to +\infty} (t_0 - \lambda e^{-t_0}) = -\infty$ et $\lim\limits_{\lambda \to +\infty} (t_0 + \lambda e^{-t_0}) = +\infty$, on peut trouver un réel $\lambda > 0$ tel que :

$$\alpha(t_0) \leq u(t_0) \leq \beta(t).$$

On déduit alors de **III.2b** que $[t_0, +\infty[\cap I = [t_0, +\infty[\subset J$ et $J =]t_1, +\infty[$ est non majoré (avec $-\infty \leq t_1$).
En utilisant le résultat de **III.2a**, on a :

$$\forall t \in [t_0, +\infty[\cap I \cap J = [t_0, +\infty[\,,\ \alpha(t) \leq u(t) \leq \beta(t)$$

soit :

$$\forall t \in [t_0, +\infty[\,,\ -\lambda e^{-t} \leq t - u(t) \leq \lambda e^{-t}$$

et $\lim\limits_{t \to +\infty} (t - u(t)) = 0$, ce qui signifie que la droite d'équation $x = t$ est asymptote au graphe de u en $+\infty$.

4. On suppose ici que $I =]t_1, b[\subset]a, b[$ avec $a < t_1$ et que l'équation (E) admet deux solutions u_1 et u_2 sur I telles que :

$$\forall t \in I,\ \beta(t) \leq u_k(t) \leq \alpha(t)\ \ (k = 1, 2).$$

Pour montrer que $u_1 = u_2$ sur I, il nous suffit de montrer d'après **II.5a** qu'il existe au moins un réel $t \in I$ tel que $u_1(t) = u_2(t)$. Pour ce faire, on raisonne par l'absurde en supposant que $u_1(t) \neq u_2(t)$ pour tout $t \in I$. Comme la fonction $u = u_2 - u_1$ est continue, elle a alors un signe constant sur I (théorème des valeurs intermédiaires). Supposons donc que $u(t) = u_2(t) - u_1(t) > 0$ pour tout $t \in I$. On a alors pour tout $t \in I$:

$$u'(t) = u_2'(t) - u_1'(t) = f(t, u_2(t)) - f(t, u_1(t))$$

et en utilisant le théorème des accroissements finis, on peut trouver $\xi_t \in]u_1(t), u_2(t)[$ tel que :

$$u'(t) = u(t)\frac{\partial f}{\partial x}(t, \xi_t) \geq 0$$

puisque $u(t) > 0$ et $\dfrac{\partial f}{\partial x}(t, x) \geq 0$ pour tout $(t, x) \in A$ (on a bien $(t, \xi_t) \in A$ puisque $t \in I$ et $\beta(t) \leq u_1(t) < \xi_t < u_2(t) \leq \alpha(t)$). La fonction u est donc croissante sur I et on a pour tous $t < z$ dans I :

$$u(t) \leq u(z) = u_2(z) - u_1(z) \leq \alpha(z) - \beta(z) \underset{t \to b}{\to} 0$$

ce qui implique $u(t) \leq 0$, en contradiction avec $u(t) > 0$.
On a donc bien $u_1 = u_2$ sur I.

5. On suppose encore que $I =]a_1, b[\subset]a, b[$ avec $a < a_1$.

   (a) Soient $u : J \to \mathbb{R}$ une fonction dérivable sur un intervalle ouvert J et $\widehat{u}$ la fonction définie sur $\widehat{J} = -J$ par $\widehat{u}(\tau) = u(-\tau)$ pour tout $\tau \in \widehat{J}$. La fonction $\widehat{u}$ est dérivable sur $\widehat{J}$ et pour tout $t = -\tau \in J$, on a $u'(t) = -\widehat{u}'(\tau)$, ce qui donne les équivalences :

$$(\forall t \in I,\ u'(t) = f(t, u(t))) \Leftrightarrow \left(\forall \tau \in \widehat{J},\ -\widehat{u}'(\tau) = f(-\tau, \widehat{u}(\tau))\right).$$

   La fonction u est donc solution de (E) sur J si, et seulement si, la fonction $\widehat{u}$ est solution sur $\widehat{J}$ de l'équation $x'(\tau) = \widehat{f}(\tau, x) = -f(-\tau, x)$, la fonction $\widehat{f}$ étant continue sur l'ouvert $\widehat{U} =]-b, -a[\times]c, d[$ et localement lipschitzienne en x.

   (b) On définit les fonctions $\widehat{\alpha}$ et $\widehat{\beta}$ sur $\widehat{I} = -I$ par $\widehat{\alpha}(\tau) = \alpha(-\tau)$ et $\widehat{\beta}(\tau) = \beta(-\tau)$ pour tout $\tau \in \widehat{I}$. Ces fonctions sont dérivables sur $\widehat{I}$ avec pour tout $\tau = -t \in \widehat{I}$ (où $t \in I$) :

$$\begin{cases} \widehat{\beta}(\tau) = \beta(t) \leq \alpha(t) = \widehat{\alpha}(\tau) \\ \widehat{\alpha}'(\tau) = -\alpha'(t) \geq -f(t, \alpha(t)) = -f(-\tau, \alpha(-\tau)) = \widehat{f}(\tau, \widehat{\alpha}(\tau)) \\ \widehat{\beta}'(\tau) = -\beta'(t) \leq -f(t, \beta(t)) = -f(-\tau, \beta(-\tau)) = \widehat{f}\left(\tau, \widehat{\beta}(\tau)\right) \end{cases}$$

   c'est-à-dire que les fonctions $\widehat{\beta}$ et $\widehat{\alpha}$ définissent un entonnoir de l'équation $\left(\widehat{E}\right)$ sur $\widehat{I} = -I$.

   (c) Pour tout entier $n \geq 1$, on a $\tau_n = -t_n \in \widehat{I} = -I$ et $x_n = \widehat{\alpha}(\tau_n) = \alpha(t_n) \in]c, d[$, de sorte que $(\tau_n, x_n) \in \widehat{U} =]-b, -a[\times]c, d[$. Le théorème de Cauchy-Lipschitz nous dit alors qu'il existe une unique solution maximale $\widehat{u_n} : \widehat{J_n} \to \mathbb{R}$ de $\left(\widehat{E}\right)$ telle que $\widehat{u_n}(\tau_n) = x_n$. On a alors $\widehat{\beta}(\tau_n) \leq \widehat{\alpha}(\tau_n)$, le couple $\left(\widehat{\beta}, \widehat{\alpha}\right)$ formant un entonnoir de $\left(\widehat{E}\right)$ sur $\widehat{I}$. Le résultat de **III.2b**, nous dit alors que $\widehat{I} \cap [\tau_n, +\infty[\subset \widehat{J_n}$. De plus comme $t_0 < t_n$, on a $\tau_0 = -t_0 > -t_n = \tau_n$ avec τ_0 et τ_n dans l'intervalle $\widehat{I}$, donc :

$$[\tau_n, \tau_0] \subset \widehat{I} \cap [\tau_n, +\infty[\subset \widehat{J_n}.$$

La fonction $\widehat{u_n}$ est donc solution de $\left(\widehat{E}\right)$ sur $[\tau_n, \tau_0]$ avec $\widehat{u_n}(\tau_n) = \widehat{\alpha}(\tau_n)$, ce qui équivaut à dire que la fonction $u_n : t \mapsto \widehat{u_n}(-t)$ est solution de (E) sur $-[\tau_n, \tau_0] = [t_0, t_n] \subset J_n$ avec $u_n(t_n) = \alpha(t_n)$.
De même en prenant $x_n = \widehat{\beta}(\tau_n)$, on montre qu'il existe une solution v_n de (E) sur un intervalle J'_n qui contient $[t_0, t_n]$ telle que $v_n(t_n) = \beta(t_n)$.

(d) On a vu que les fonctions $\widehat{\beta}$ et $\widehat{\alpha}$ définissent un entonnoir de l'équation $\left(\widehat{E}\right)$ sur $\widehat{I} = -I$ et pour tout $n \geq 1$, on a :

$$\begin{cases} \tau_n = -t_n \in \widehat{I}, \\ \widehat{\beta}(\tau_n) \leq \widehat{\alpha}(\tau_n) = \widehat{u_n}(\tau_n) \\ \widehat{\beta}(\tau_n) = \widehat{v_n}(\tau_n) \leq \widehat{\alpha}(\tau_n) \end{cases}$$

Le théorème de l'entonnoir nous dit alors que les solutions $\widehat{u_n}$ et $\widehat{v_n}$ de $\left(\widehat{E}\right)$ sont piégées dans l'entonnoir $\widehat{\Delta}$, soit :

$$\begin{cases} \forall \tau \in [\tau_n, +\infty[\cap \widehat{I} \cap \widehat{J_n},\ \widehat{\beta}(\tau) \leq \widehat{u_n}(\tau) \leq \widehat{\alpha}(\tau) \\ \forall \tau \in [\tau_n, +\infty[\cap \widehat{I} \cap \widehat{J'_n},\ \widehat{\beta}(\tau) \leq \widehat{v_n}(\tau) \leq \widehat{\alpha}(\tau) \end{cases}$$

et comme $[t_0, t_n] \subset J_n \cap J'_n$, on en déduit que $\beta \leq u_n \leq \alpha$ et $\beta \leq v_n \leq \alpha$ sur $[t_0, t_n]$.
Comme $t_n \in [t_0, t_{n+1}]$, on a en particulier :

$$u_{n+1}(t_n) \leq \alpha(t_n) = u_n(t_n)$$

et en utilisant **II.5a**, on déduit que $u_{n+1} \leq u_n$ sur $[t_0, t_n]$ et en particulier $u_{n+1}(t_0) \leq u_n(t_0)$. La suite $(u_n(t_0))_{n \geq 1}$ est donc décroissante.
De même avec $v_n(t_n) = \beta(t_n) \leq v_{n+1}(t_n)$, on déduit que $v_n \leq v_{n+1}$ sur $[t_0, t_n]$ et en particulier $v_n(t_0) \leq v_{n+1}(t_0)$. La suite $(v_n(t_0))_{n \geq 1}$ est donc croissante.
Enfin de $u_n(t_n) = \alpha(t_n) \geq \beta(t_n) = v_n(t_n)$ et **II.5a**, on déduit que $u_n \geq v_n$ sur $[t_0, t_n]$ et en particulier $u_n(t_0) \geq v_n(t_0)$.

(e) On a donc :

$$\forall n \geq 1,\ v_n(t_0) \leq v_{n+1}(t_0) \leq u_{n+1}(t_0) \leq u_n(t_0)$$

ce qui signifie que $K = \bigcap_{n \geq 1} [v_n(t_0), u_n(t_0)]$ est une intersection de segments réels emboîtés, c'est donc un ensemble non vide. Pour $x_0 \in K$, on a :

$$\forall n \geq 1,\ v_n(t_0) \leq x_0 \leq u_n(t_0).$$

(f) On a $t_0 \in I$, $v_1(t_0) \leq x_0 \leq u_1(t_0)$, $\beta \leq u_1 \leq \alpha$ et $\beta \leq v_1 \leq \alpha$ sur $[t_0, t_1]$, les fonctions α et β étant à valeurs dans $]c, d[$. Il en résulte que $(t_0, x_0) \in U =]a, b[\times]c, d[$ et le théorème de Cauchy-Lipschitz nous dit qu'il existe une unique solution maximale $u : J \to \mathbb{R}$ de (E) telle que $u(t_0) = x_0$.
D'autre part, de $v_n(t_0) \leq u_n(t_0)$ avec u_n, v_n solutions de (E) sur $[t_0, t_n]$ pour $n \geq 1$, on déduit de **II.5a** que $v_n \leq u_n$ sur $[t_0, t_n]$, c'est-à-dire que le couple de fonctions (v_n, u_n) définit un entonnoir de (E) sur $[t_0, t_n]$. De plus l'encadrement $v_n(t_0) \leq x_0 = u(t_0) \leq u_n(t_0)$ et le théorème de l'entonnoir nous disent que $[t_0, t_n] = [t_0, +\infty[\cap [t_0, t_n] \subset J$ et

$v_n \leq u \leq u_n$ sur $[t_0, t_n]$.
On a donc $[t_0, t_n] \subset J$ pour tout $n \geq 1$ avec $\lim\limits_{n \to +\infty} t_n = b$, ce qui implique que $[t_0, b[\subset J$ (J est un intervalle ouvert).
Enfin avec :

$$\forall n \geq 1,\ \forall t \in [t_0, t_n],\ \beta(t) \leq v_n(t) \leq u(t) \leq u_n(t) \leq \alpha(t)$$

on déduit, en faisant tendre n vers l'infini que $\beta \leq u \leq \alpha$ sur $[t_0, b[$.
En raisonnant avec les fonctions $\widehat{\alpha}$, $\widehat{\beta}$ et $\widehat{u}$, on déduit que $]-\infty, t_0] \cap I \subset J$ et $\beta \leq u \leq \alpha$ sur $]-\infty, t_0] \cap I$.
On a donc en définitive, $I \subset J$ et $\beta \leq u \leq \alpha$ sur I.
Pour plus de détails sur cette partie, on pourra consulter le chapitre 4 de [?], où ces résultats sont montrés de manière plus intuitive et plus rapide.

Partie IV : Périodicité

1. Les solutions sur $\mathbb{R}$ de l'équation différentielle $x' = 1$ sont les fonctions non périodiques $x : t \mapsto t + C$, alors que la fonction $f : (t, x) \mapsto 1$ est périodique en t.
2. Soit $u : J \to]c, d[$ une solution maximale de (E) (on a $U = \mathbb{R} \times]c, d[$, donc u est à valeurs dans $]c, d[$).
   (a) La fonction v définie sur $J_T = \{\tau = t - T \mid t \in J\}$ par $v(\tau) = u(\tau + T)$ est dérivable avec :
   $$v'(\tau) = u'(\tau + T) = f(\tau + T, u(\tau + T)) = f(\tau, v(\tau))$$
   c'est-à-dire qu'elle solution de (E) sur J_T. Cette solution est maximale puisqu'un prolongement de v donne un prolongement de u.
   (b) S'il existe $t_0 \in J$ tel que $u(t_0) = v(t_0)$, on dispose alors de deux solutions maximales de (E) avec la même condition initiale. Le théorème de Cauchy-Lipschitz nous dit alors que $J = J_T$, donc $J = \mathbb{R}$ et $u = v$, donc u est T-périodique.
3. Si $z \in]c, d[$ est tel que γ_z soit T-périodique, on a alors $I_z = \mathbb{R}$ et $T \in I_z$, soit $z \in D$ et $P(z) = \gamma_z(T) = \gamma_z(0) = z$.
   Réciproquement, supposons que $z \in]c, d[$ soit tel que $z \in D$ et $P(z) = z$. On a alors $P(z) = \gamma_z(t_0 + T) = z = \gamma_z(t_0)$ avec $t_0 = 0 \in I_z$. Il en résulte que $I_z = \mathbb{R}$ et γ_z est T-périodique.
4.
   (a) Il s'agit de montrer que pour $u < v$ dans D et $z \in [u, v]$, on a $z \in D$.
   On a $\gamma_u(0) = u < v = \gamma_v(0)$ et en reprenant la démonstration de **III.5.d.** on voit que $\gamma_u \leq \gamma_v$ sur $[0, T]$. Il en résulte que les restrictions de γ_u et γ_v à $[0, T]$ définissent un entonnoir de (E). Avec $\gamma_u(0) = u \leq z = \gamma_z(0) \leq< v = \gamma_v(0)$ et le théorème de l'entonnoir, on déduit alors que $[0, T] \subset I_z$ et $z \in D$. L'ensemble D est donc un intervalle.
   (b) Pour $z < z'$ dans D, on a $\gamma_z \leq \gamma_{z'}$ sur $[0, T]$, donc $P(z) = \gamma_z(T) \leq \gamma_{z'}(T) = P(z')$. Si $P(z) = P(z')$, les solutions maximales γ_z et $\gamma_{z'}$ qui coïncident en T sont égales (théorème de Cauchy-Lipschitz) et en particulier $z = \gamma_z(0) = \gamma_{z'}(0) = z'$, ce qui contredit $z < z'$. On a donc $P(z) < P(z')$ et P est strictement croissante sur l'intervalle D.
   (c) Il s'agit de montrer que pour $P(z) < P(z')$ dans $P(D)$ et $Z \in [P(z), P(z')]$, on a $Z \in P(D)$.
   En **III.5.d.** on vu que si $z > z'$, on a alors $P(z) \geq P(z')$. On a donc nécessairement $z \leq z'$. En **III.5.a.** on vu que $\widehat{\gamma_z}$ et $\widehat{\gamma_{z'}}$ définissent un entonnoir de $\left(\widehat{E}\right)$ sur le segment

$[-T,0]$ et le théorème de l'entonnoir nous dit que la solution maximale $\widehat{u}$ de $\left(\widehat{E}\right)$ telle que $\widehat{u}(-T) = Z$est définie sur un intervalle contenant $[-T,0]$ et on a $\widehat{u}(0) \in [z,z']$. La fonction $u = \widehat{\widehat{u}}$ est alors solution de (E) sur un intervalle qui contient $[0,T]$. Le théorème de Cauchy-Lipschitz nous dit que $\gamma_{\widehat{u}(0)}$ prolonge la solution $\widehat{u}$, donc $T \in I_{u(0)}$, ce qui signifie que $\widehat{u}(0) \in D$ et $P(\widehat{u}(0)) = \gamma_{\widehat{u}(0)}(T) = u(T) = \widehat{u}(-T) = Z$, ce qui signifie que $Z \in P(D)$.

(d) La fonction P étant croissante sur l'intervalle D admet une limite à droite et à gauche en tout point de l'intérieur de D (aux bords de l'intervalle on a seulement une limite à droite ou à gauche). En notons respectivement $P^-(z)$ et $P^+(z)$ ces limites à gauche et à droite en un pont z intérieur à D, on a $P^-(z) \leq P(z) \leq P^+(z)$. Si $P^-(z) < P^+(z)$, alors tout point de $]P^-(z), P^+(z)[$ n'a pas d'antécédent par P, ce qui contredit le fait que $P(D)$ est un intervalle. On a donc $P^-(z) = P(z) = P^+(z)$ et P est continue en z. On procède de même aux bord de l'intervalle D.

5.

(a) Les fonctions α et β définies sur $\mathbb{R}$ par $\alpha(t) = -3t-\pi$ et $\beta(t) = 3t$ définissent un entonnoir de E sur $\mathbb{R}^+$. On a donc $\alpha(0) = -\pi \leq u(0) = 0 \leq \beta(0) = 0$, $\alpha(0) \leq v(0) = -\pi \leq \beta(0)$ et le théorème de l'entonnoir nous dit que l'intervalle de définition des fonctions u et v contient $\mathbb{R}^+$.. En particulier les fonctions u et v sont définies sur $[0,2\pi]$.

(b) On a $f(t,0) = \sin(t) + 2 > 0 = 0'$, donc la fonction nulle est une barrière inférieure de (E) sur $[0,2\pi]$.
Comme $u(0) \geq 0$, le lemme de la barrière inférieure nous dit que $u(t) \geq 0$ pour tout $t \in [0,2\pi]$ et en particulier, $u(2\pi) \geq 0 = \alpha(2\pi)$.
En utilisant la fonction constante égale à $-\pi$, on vérifie de manière analogue que $v(2\pi) \leq -\pi$.

(c) Les points 0 et $-\pi$ sont dans l'intervalle D avec $P(0) \geq 0$ et $P(-\pi) + \pi \leq 0$, la fonction $z \mapsto P(z) - z$ étant continue sur D, on déduit alors du théorème des valeurs intermédiaires que cette fonction s'annule sur $[-\pi,0]$.

(d) Si $z \in [-\pi,0]$ est tel que $P(z) = z$, on déduit alors de **IV.3.** que la fonction γ_z est une solution 2π-périodique de (E).

(e) Les fonctions $\gamma_z + 2k\pi$, où k est un entier relatif fournissent une infinité de solutions 2π-périodiques de (E).

Partie V : Applications

1. La fonction $x = (x_1,x_2) \mapsto \langle f(x_1,x_2), (-x_2,x_1)\rangle$ étant continue transforme le connexe B de $\mathbb{R}^2$ en un connexe de $\mathbb{R}$, c'est-à-dire un intervalle J. L'hypothèse (H_2) nous dit que cet intervalle ne contient pas 0, il est donc contenu dans $\mathbb{R}^{-,*}$ ou $\mathbb{R}^{+,*}$. Si $J \subset \mathbb{R}^{+,*}$ on est ramené à l'hypothèse (H_3). Sinon, on remplace la fonction f par la fonction $g : x = (x_1,x_2) \mapsto (f_1(x_1,-x_2), -f_2(x_1,-x_2))$ et on est ramené à l'hypothèse (H_3). En effet si u est solution sur I de $u' = f(u)$, alors la fonction $v : t \mapsto (u_1(t), -u_2(t))$ est solution de $v' = g(v)$, l'hypothèse (H_1) étant vérifiée pour g et :

$$\langle g(x_1,x_2), (-x_2,x_1)\rangle = -\langle f(x_1,x_2), (-x_2,x_1)\rangle > 0.$$

2. Pour $u(t) = h(\theta(t))(\cos(\theta(t)), \sin(\theta(t)))$, l'équation $u' = f(u)$ équivaut à :

$$\begin{cases} h'(\theta(t))\theta'(t)\cos(\theta(t)) - h(\theta(t))\theta'(t)\sin(\theta(t)) = f_1(u(t)) \\ h'(\theta(t))\theta'(t)\sin(\theta(t)) + h(\theta(t))\theta'(t)\cos(\theta(t)) = f_2(u(t)) \end{cases}$$

En résolvant ce système aux inconnues $h'(\theta(t))\theta'(t)$ et $h(\theta(t))\theta'(t)$, on obtient, de manière équivalente :

$$\left\{\begin{array}{l} h'(\theta(t))\theta'(t) = f_1(u(t))\cos(\theta(t)) + f_2(u(t))\sin(\theta(t)) \\ h(\theta(t))\theta'(t) = f_2(u(t))\cos(\theta(t)) - f_1(u(t))\sin(\theta(t)) \end{array}\right.$$

et tenant compte de $h > 0$, on a, de manière équivalente :

$$\left\{\begin{array}{l} h'(\theta(t))\theta'(t) = f_1(u(t))\cos(\theta(t)) + f_2(u(t))\sin(\theta(t)) \\ \theta'(t) = \dfrac{f_2(u(t))\cos(\theta(t)) - f_1(u(t))\sin(\theta(t))}{h(\theta(t))} \end{array}\right.$$

En notant :

$$\left\{\begin{array}{l} g_1(\theta,h) = f_1(h\cos(\theta), h\sin(\theta))\cos(\theta) + f_2(h\cos(\theta), h\sin(\theta))\sin(\theta) \\ g_2(\theta,h) = \dfrac{f_2(h\cos(\theta), h\sin(\theta))\cos(\theta) - f_1(h\cos(\theta), h\sin(\theta))\sin(\theta)}{h} \end{array}\right.$$

on a :

$$\left\{\begin{array}{l} h'(\theta(t))\theta'(t) = g_1(\theta(t), h(t)) \\ \theta'(t) = g_2(\theta(t), h(\theta(t))) \end{array}\right.$$

pour tout $t \in I$.

3. On a $g_2(\theta,h) = \dfrac{g_3(\theta,h)}{h^2}$ avec $g_3(\theta,h) > 0$ sur $\mathbb{R} \times [a_1,a_2]$ grâce à l'hypothèse (H_3).
Supposons qu'on ne puisse pas trouver $]b_1,b_2[$ dans $\mathbb{R}^{+,*}$ contenant $[a_1,a_2]$ et tel que $g_3(\theta,h) > 0$ sur $\mathbb{R} \times]b_1,b_2[$. On peut alors trouver, pour $n \geq 1$ assez grand un couple (θ_n,h_n) dans $\mathbb{R} \times \left]a_1 - \dfrac{1}{n}, a_2 + \dfrac{1}{n}\right[$ tel que $g_3(\theta_n,h_n) \leq 0$. Par périodicité, on peut prendre θ_n dans $[0,2\pi]$.
De la suite $((\theta_n,h_n))_{n\geq n_0}$ dans le compact $[0,2\pi]\times[a_1-1,a_2+1]$ on peut alors extraire une suite $\left(\left(\theta_{\varphi(n)},h_{\varphi(n)}\right)\right)_{n\geq n_0}$ qui converge vers $(\theta,h) \in [0,2\pi]\times[a_1-1,a_2+1]$. Comme g_3 est continue, la suite $\left(g_3\left(\theta_{\varphi(n)},h_{\varphi(n)}\right)\right)_{n\geq n_0}$ converge vers $g_3(\theta,h)$ et $g_3(\theta,h) \leq 0$. Mais de $a_1 - \dfrac{1}{\varphi(n)} < h_{\varphi(n)} < a_2 + \dfrac{1}{\varphi(n)}$, on déduit que $h \in [a_1,a_2]$ et on devrait avoir $g_3(\theta,h) > 0$. On a donc une contradiction.

4. Comme $g_2(\theta,h) > 0$ pour tout $(\theta,h) \in U = \mathbb{R} \times]b_1,b_2[$, la fonction $G = \dfrac{g_1}{g_2}$ est bien définie sur l'ouvert U, de classe $\mathcal{C}^1$ et 2π-périodique en θ.

   (a) Il s'agit de montrer que les fonctions α et β définies sur $[0,2\pi]$ par $\alpha(\theta) = a_1$ et $\beta(\theta) = a_2$ forment un entonnoir de l'équation différentielle (E') sur $[0,2\pi]$.
   Pour tout $\theta \in [0,2\pi]$, on a :

$$\begin{aligned} g_1(\theta,a_1) &= f_1(a_1\cos(\theta), a_1\sin(\theta))\cos(\theta) + f_2(a_1\cos(\theta), a_1\sin(\theta))\sin(\theta) \\ &= \langle f(a_1\cos(\theta), a_1\sin(\theta)), (\cos(\theta), \sin(\theta))\rangle \geq 0 \end{aligned}$$

   (hypothèse (H_1)) et en conséquence :

$$G(\theta,\alpha(\theta)) = G(\theta,a_1) = \frac{g_1(\theta,a_1)}{g_2(\theta,a_1)} \geq 0 = \alpha'(\theta).$$

   On vérifie de même que $G(\theta,\beta(\theta)) \leq \beta'(\theta)$.

   (b) Le théorème de l'entonnoir nous dit que les solutions maximales de (E') telles que $\rho(0) \in [a_1,a_2]$ sont définies sur un intervalle contenant $[0,2\pi]$ et restent dans l'entonnoir. On a donc $\rho(2\pi) \in [a_1,a_2]$, $[a_1,a_2]$ est contenu dans D et $P([a_1,a_2])$ est contenu dans $[a_1,a_2]$.

(c) Le théorème des valeurs intermédiaires appliqué à la fonction $t \mapsto P(z) - z$ nous dit que P admet un point fixe dans $[a_1, a_2]$. La fonction $h = \gamma_z$ est alors une solution 2π-périodique de (E') à valeurs dans $[a_1, a_2]$ d'après **IV.3.** et **V.4.a.**

5.

(a) La fonction ψ étant continue, 2π-périodique et à valeurs strictement positives, on a :

$$m = \inf_{\theta \in \mathbb{R}} \psi(\theta) > 0 \text{ et } M = \sup_{\theta \in \mathbb{R}} \psi(\theta) > 0.$$

(b) L'équation différentielle (E'') est de la forme $\theta' = f(t, \theta)$ où f est la fonction définie sur $\mathbb{R}^2$ par $f(t, \theta) = g_2(\theta, h(\theta))$. Cette fonction f est bien de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}^2$.
De plus, pour tous réels t_0 et θ_0 les fonctions $\alpha : t \mapsto \theta_0 + mt$ et $\beta : t \mapsto \theta_0 + Mt$ définissent un entonnoir de (E'') sur $[t_0, +\infty[$, donc la solution maximale θ de (E'') telle que $\theta(t_0) = \theta_0$ est définie sur un intervalle contenant $[t_0, +\infty[$. En utilisant la fonction $t \mapsto \theta(-t)$, on voit que θ est définie en fait sur $\mathbb{R}$.
Avec $\theta' = \psi(\theta) \geq m > 0$ on déduit que θ est strictement croissante et $\theta(t) = \theta_0 + t\theta'(\xi_t) \geq \theta_0 + mt$, ce qui entraîne que $\lim_{t \to +\infty} \theta(t) = +\infty$. Avec $\theta(t) \leq \theta_0 + Mt$, on déduit que $\lim_{t \to -\infty} \theta(t) = -\infty$. Donc θ est bien une bijection de $\mathbb{R}$ sur $\mathbb{R}$.

6. Si h est une solution 2π-périodique de (E') sur $\mathbb{R}$ à valeurs dans $[a_1, a_2]$ et θ une solution maximale de (E'') sur $\mathbb{R}$, alors la fonction u définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$u(t) = h(\theta(t)) (\cos(\theta(t)), \sin(\theta(t)))$$

est à valeurs dans B et solution de (E). Avec (H_3), on a $f(x) \neq 0$ sur B, donc $u' = f(u) \neq 0$ et u n'est pas constante. Cette solution est périodique. En effet, comme θ est bijective de $\mathbb{R}$ sur $\mathbb{R}$, il existe un réel $T > 0$ tel que $\theta(T) = \theta(0) + 2\pi$ (θ est strictement croissante). Les fonctions u et $t \mapsto u(t + T)$ étant solutions de (E) avec la même condition initiale $u(0) = u(T)$, on en déduit que u est T-périodique.