AGREGATION INTERNE, DS 1.
CORRIGÉ

## PARTIE 1

**1 a** On peut voir les choses de deux façons :

i) On écrit $U=(u_{ij})$, $x=(x_1,\dots,x_n)$ avec $\|x\|^2=\sum x_i^2 \leq 1$, et $|\langle Ux,x\rangle| = \left|\sum_{i,j} u_{ij}x_ix_j\right| \leq \sum_{i,j}|u_{ij}|$

ii) La boule unité est compacte, U est continu (endomorphisme d'un espace de dimension finie), et le produit scalaire, d'après Cauchy-Schwarz, est continu sur $E\times E$.

**1 b** Deux versions, là encore :

i) $\forall x,y\in E$ $\langle U(x+y),x+y\rangle=0$. On développe, en tenant compte du fait que $\langle Ux,x\rangle=\langle Uy,y\rangle=0$, et grâce à la symétrie de U, il vient $\langle Ux,y\rangle=0$. Ceci étant vrai $\forall y$, la non dégénérescence du produit scalaire entraîne $Ux=0$ $\forall x$.

ii) Soit $\lambda$ une valeur propre de U, $x_0$ un vecteur propre associé. Alors

$$0=(Ux_0,x_0)=\lambda\|x_0\|^2 \Rightarrow \lambda=0.$$

U étant diagonalisable et ne possédant que 0 comme valeur propre, il est nul.

N.B : La première preuve est meilleure, parce que n'étant que calculatoire, elle n'utilise pas le fait que l'on soit en dimension finie.



**1 c** L'axiome de séparation "$N(U)=0 \Rightarrow U=0$" vient d'être traité à la question précédente. L'homogénéité est claire.

Enfin, pour $x$ de norme inférieure à 1 :

$$|\langle (U+V)x,x\rangle| \leq |\langle Ux,x\rangle| + |\langle V(x),x\rangle| \leq N(U)+N(V)$$

et on passe au sup à gauche, pour récupérer l'inégalité triangulaire.

**2 a** $UV\in S_n \Leftrightarrow {}^t(UV)=UV \Leftrightarrow {}^tV\,{}^tU=UV \Leftrightarrow VU=UV.$

**2 b** Pour fixer les idées, je supposerai $|\lambda_1|\leq\dots\leq|\lambda_n|$, et je note $(\varepsilon_1,\dots,\varepsilon_n)$ une base orthonormée de vecteurs propres associés.

Alors pour $x=x_1\varepsilon_1+\dots+x_n\varepsilon_n$ de norme $\leq 1$, on a :

$$\begin{aligned}|\langle Ux,x\rangle| &= |\langle x_1\lambda_1\varepsilon_1+\dots+x_n\lambda_n\varepsilon_n, x_1\varepsilon_1+\dots+x_n\varepsilon_n\rangle| \\ &= \left|\sum \lambda_i x_i^2\right| \\ &\leq |\lambda_n|\sum x_i^2 \\ &\leq |\lambda_n|.\end{aligned}$$

Mais si l'on choisit $x=\varepsilon_n$, l'inégalité précédente est une égalité. On a donc bien

$$N(U)=|\lambda_n|=\rho(U).$$

De plus, avec les notations précédentes mais sans supposer $x$ de norme plus petite que 1, on a :

$$\|Ux\|^2=\langle Ux,Ux\rangle=\sum\lambda_i^2x_i^2 \leq |\lambda_n|^2\sum x_i^2 \text{ ; d'où : }$$

$$\|U(x)\|\leq|\lambda_n|\,\|x\| \quad \text{QED.}$$

**2.c** Puisque $U$ et $V$ commutent, le produit $UV$ est bien symétrique. Alors, pour $x \in E$ de norme inférieure à 1 :

$$|(UVx, x)| = |(Vx|Ux)| \quad (U \text{ est symétrique})$$
$$\leq \|Ux\| \, \|V(x)\| \quad (\text{Cauchy-Schwarz})$$
$$\leq N(U)\|x\| \, N(V)\|x\|$$
$$\leq N(U)N(V)$$

et on passe au sup. à gauche pour l'inégalité demandée.

## PARTIE B

**1** $\Leftarrow$) Si $A = {}^tMM$ avec $M$ inversible, $A$ est clairement inversible, et

$$(Ax,x) = ({}^tMMx, x) = (Mx, Mx) = \|Mx\|^2 > 0$$

dès que $x$ est non nul, puisque $M$ est inversible.

$\Rightarrow$) Si $A$ est définie positive.

Prouvons d'abord que toute valeur propre de $A$ est $>0$ : soit en effet $\lambda \in Sp(A)$, et $x_0$ un vecteur propre associé.

$$(Ax_0,x_0) > 0 \text{ donc } \lambda\|x_0\|^2 > 0 \text{ donc } \lambda > 0.$$

On diagonalise alors $A$ au moyen d'une matrice orthogonale $P$. Si $D = \mathrm{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_n)$ où les $\lambda_i$ sont les valeurs propres de $A$, je note $\Delta = \mathrm{diag}(\sqrt{\lambda_1}, \dots, \sqrt{\lambda_n})$.

Alors $A = {}^tPDP = {}^tP\,{}^t\Delta\Delta P = {}^tMM$ avec $M = \Delta P$

Enfin, $M$ est inversible puisque $\Delta$ et $P$ le sont.

**2a** On effectue un calcul par blocs :





$$\begin{bmatrix} A & C \\ {}^tC & a \end{bmatrix} * \begin{bmatrix} A^{-1} & -A^{-1}C \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} I_n & 0 \\ {}^tCA^{-1} & a - {}^tCA^{-1}C \end{bmatrix}.$$

On prend alors les déterminants. $A$ étant définie positive, $\det A^{-1} = 1/\det A > 0$, enfin $\det A' > 0$ par hypothèse :

D'où $\quad a - {}^tCA^{-1}C = \det A' \det A^{-1} > 0$.

**2b** Si $N = \begin{bmatrix} M & D \\ 0 & \alpha \end{bmatrix}$, ${}^tNN = \begin{bmatrix} {}^tMM & {}^tMD \\ {}^tDM & {}^tDD + \alpha^2 \end{bmatrix}$.

et je veux que ${}^tNN = A'$

Je choisis $M$ inversible tq ${}^tMM = A$ (Je peux, $A$ est définie positive).

Je pose $D = {}^tM^{-1}C$

Alors ${}^tDD = {}^tCM^{-1}\,{}^tM^{-1}C = {}^tCA^{-1}C$

Alors, comme $a - {}^tCA^{-1}C > 0$, je peux toujours trouver un réel $\alpha$ tq $\alpha^2 = a - {}^tDD = a - {}^tCA^{-1}C$

Finalement, j'ai écrit $A'$ sous la forme ${}^tNN$, et $N$ est clairement inversible : $A'$ est définie positive.

**3a** Si l'on voit $A$ comme la matrice de la forme quadratique $Q_A : x \mapsto (Ax,x)$ dans la base canonique $(e_1, \dots, e_n)$ de $\mathbb{R}^n$, $A_p$ n'est autre que la matrice de la restriction de $Q_A$ à $\mathrm{vect}(e_1, \dots, e_p)$, écrite dans la base $(e_1, \dots, e_p)$. La restriction à un sous-espace d'une forme définie positive l'étant encore, il vient

$\det A_p > 0$, et ce pour tout $p$.

**3b** Par récurrence sur $n$ ! Puisque $\det A_1 > 0 \ldots \det A_{n-1} > 0$, l'hypothèse de récurrence assure que $A_{n-1}$ est définie positive. Or le passage de $A_{n-1}$ à $A = A_n$ se fait exactement comme dans le lemme, $A$ est donc bien définie positive.

## PARTIE 3

**1a** Evidemment, $\lambda$ est valeur propre de $T$ ssi $1-\lambda$ est valeur propre de $I_n - T$. Alors, puisque $N(S)$ est la plus grande valeur absolue d'une valeur propre de $S$,

$$N(I_n - T) \leq k \Rightarrow |1-\lambda| \leq k \quad \forall \lambda \in S_p(T)$$
$$\Rightarrow 1-k \leq \lambda \leq 1+k \quad \forall \lambda \in S_p(T).$$

En particulier, toutes les valeurs propres de $T$ sont strictement positives : $T$ est définie positive.

**1b** Pour toute valeur propre de $T$, $\lambda \geq 1-k \Rightarrow \frac{1}{\lambda} \leq \frac{1}{k-1}$

Les valeurs propres de $T^{-1}$ étant les inverses de celles de $T$, il vient $N(T^{-1}) \leq \frac{1}{k-1}$

De même, les valeurs propres de $T^{-1} - I_n$ sont les $1/\lambda - 1$ où $\lambda$ est valeur propre de $T$. Mais

$$\left|\frac{1}{\lambda} - 1\right| = \left|\frac{1-\lambda}{\lambda}\right| \leq \frac{k}{1-k} \Rightarrow N(T^{-1} - I_n) \leq \frac{k}{1-k}$$

**2a et 2b** : aucune difficulté.

**2c** $Z_p = Z_{p-1}^2 \Rightarrow N(Z_p) \leq N(Z_{p-1})^2 \leq \ldots \leq N(Z_0)^{2^p} = N(I_n - T)^{2^p} \leq k^{2^p}$

$$\Rightarrow N(Y_p - T^{-1}) \leq N(T^{-1})\, N(I_n - TY_p) = N(T^{-1})\, N(Z_p) \leq \frac{k^{2^p}}{1-k}$$

$(Y_p)$ converge vers $T^{-1}$, et sacrément vite !