Agrégation Interne

Séries numériques et produits infinis

– I – Compléments sur les séries numériques

On dit qu'une série numérique $\sum u_n$ est commutativement convergente si, pour toute permutation σ de $\mathbb{N}$, la série $\sum u_{\sigma(n)}$ est convergente.

On rappelle que le produit de Cauchy (ou produit de convolution) de deux séries numériques $\sum u_n$ et $\sum v_n$, est la série de terme général $w_n = \sum\limits_{k=0}^{n} u_k v_{n-k}$.

Étant donnée une suite numérique $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$, étudier le produit infini de terme général u_n revient à étudier la suite $(P_n)_{n\geq n_0}$ des produits partiels définie par :

$$\forall n \in \mathbb{N},\ P_n = \prod_{k=n_0}^{n} u_k$$

On notera plus simplement $\prod u_n$ un tel produit et on parlera de produit infini.

On dit que le produit infini $\prod u_n$ est convergent si la suite de ses produits partiels $(P_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est convergente.

Dans le cas contraire, on dit que le produit infini est divergent.

On dit que le produit infini $\prod u_n$ est strictement convergent s'il converge vers un réel ou un complexe non nul.

1. Soient σ une permutation σ de $\mathbb{N}$ et $\sum u_n$ une série réelle absolument convergente.

   Montrer que la série $\sum u_{\sigma(n)}$ converge absolument avec $\sum\limits_{n=0}^{+\infty} u_{\sigma(n)} = \sum\limits_{n=0}^{+\infty} u_n$.

   Cela justifie l'écriture $\sum\limits_{n\in\mathbb{N}} u_n$ dans le cas d'une série absolument convergente.

2. Soit $(u_{n,m})_{(n,m)\in\mathbb{N}^2}$ une suite numérique indexée par (n,m) dans $\mathbb{N}^2$.

   (a) On suppose que la suite $(u_{n,m})_{(n,m)\in\mathbb{N}^2}$ est à valeurs réelles positives et que :

   i. pour tout $n \in \mathbb{N}$, la série $\sum\limits_{m\in\mathbb{N}} u_{n,m}$ est convergente de somme S_n ;

   ii. la série $\sum S_n$ est convergente de somme S.

   Montrer alors que :

   i. pour tout $m \in \mathbb{N}$, la série $\sum\limits_{n\in\mathbb{N}} u_{n,m}$ est convergente de somme T_m ;

   ii. la série $\sum T_m$ est convergente avec :

   $$\sum_{n=0}^{+\infty} \left(\sum_{m=0}^{+\infty} u_{n,m} \right) = \sum_{m=0}^{+\infty} \left(\sum_{n=0}^{+\infty} u_{n,m} \right)$$

   Dans ces conditions, on dit que la série double $\sum u_{n,m}$ est convergente et on note $\sum\limits_{(n,m)\in\mathbb{N}^2} u_{n,m}$ la valeur commune de $\sum\limits_{n=0}^{+\infty} \left(\sum\limits_{m=0}^{+\infty} u_{n,m} \right)$ et $\sum\limits_{m=0}^{+\infty} \left(\sum\limits_{n=0}^{+\infty} u_{n,m} \right)$.

   On dit que la série double $\sum u_{n,m}$ (les $u_{n,m}$ étant réels ou complexes) est absolument convergente si la série double $\sum |u_{n,m}|$ est convergente.

(b) On suppose que la série double $\sum u_{n,m}$ est absolument convergente.
Montrer que :

i. pour tout $n \in \mathbb{N}$ [resp. pour tout $m \in \mathbb{N}$], la série $\sum\limits_m u_{n,m}$ [resp. $\sum\limits_n u_{n,m}$] est absolument convergente ;

ii. en notant S_n [resp. T_m] la somme de cette série, la série $\sum S_n$ [resp. $\sum T_m$] est absolument convergente et on a $\sum\limits_{n=0}^{+\infty} S_n = \sum\limits_{m=0}^{+\infty} T_m$, soit :

$$\sum_{n=0}^{+\infty}\left(\sum_{m=0}^{+\infty} u_{n,m}\right) = \sum_{m=0}^{+\infty}\left(\sum_{n=0}^{+\infty} u_{n,m}\right)$$

Dans ces conditions, on note $\sum\limits_{(n,m)\in\mathbb{N}^2} u_{n,m}$ la valeur commune de ces sommes.

(c) Calculer :

$$\sum_{m=2}^{+\infty}\sum_{n=2}^{+\infty}\frac{1}{n^m}$$

(d) Soit $(u_{n,m})_{(n,m)\in\mathbb{N}^*\times\mathbb{N}^*}$ la suite double définie par :

$$\forall\,(n,m)\in\mathbb{N}^*\times\mathbb{N}^*,\ u_{n,m} = \begin{cases} 0 \text{ si } n=m \\ \dfrac{1}{n^2-m^2} \text{ si } n\neq m \end{cases}$$

Montrer, en les calculant, que les sommes $\sum\limits_{n=1}^{+\infty}\left(\sum\limits_{m=1}^{+\infty} u_{n,m}\right)$ et $\sum\limits_{m=1}^{+\infty}\left(\sum\limits_{n=1}^{+\infty} u_{n,m}\right)$ sont définies et différentes.

3. Soient $\sum u_n$ et $\sum v_n$ deux séries numériques non identiquement nulles et $\sum w_n$ leur produit de Cauchy.

(a) On suppose que les deux séries sont à termes positifs.

i. Montrer que si $\sum u_n$ et $\sum v_n$ sont convergentes, il en est alors de même de $\sum w_n$, puis que :

$$\sum_{n=0}^{+\infty} w_n = \left(\sum_{n=0}^{+\infty} u_n\right)\left(\sum_{n=0}^{+\infty} v_n\right)$$

ii. Montrer que si l'une des deux séries $\sum u_n$ ou $\sum v_n$ est divergente, il en est alors de même de $\sum w_n$ (l'égalité $\sum\limits_{n=0}^{+\infty} w_n = \left(\sum\limits_{n=0}^{+\infty} u_n\right)\left(\sum\limits_{n=0}^{+\infty} v_n\right)$ est encore vérifiée dans ce cas avec $+\infty$ pour valeur commune).

(b) Plus généralement, montrer que le produit de Cauchy de $r \geq 2$ séries numériques à termes positifs $\sum\limits_{n\in\mathbb{N}} u_{k,n}$ convergentes est convergent et :

$$\left(\sum_{n=0}^{+\infty} u_{1,n}\right)\cdots\left(\sum_{n=0}^{+\infty} u_{r,n}\right) = \sum_{n=0}^{+\infty}\sum_{\substack{(\alpha_1,\cdots,\alpha_r)\in\mathbb{N}^r \\ \alpha_1+\cdots+\alpha_r=n}} u_{1,\alpha_1}\cdots u_{r,\alpha_r}$$
$$= \sum_{(\alpha_1,\cdots,\alpha_r)\in\mathbb{N}^r} u_{1,\alpha_1}\cdots u_{r,\alpha_r}$$

(c) On suppose que les deux séries numériques $\sum u_n$ et $\sum v_n$ sont absolument convergentes. Montrer que le produit de Cauchy $\sum w_n$ est absolument convergent avec :

$$\sum_{n=0}^{+\infty} w_n = \left(\sum_{n=0}^{+\infty} u_n\right)\left(\sum_{n=0}^{+\infty} v_n\right)$$

(d) Montrer que le produit de Cauchy de la série convergente $\sum \frac{(-1)^n}{\sqrt{n+1}}$ par elle même est divergent.

4. On se propose de montrer de manière élémentaire la divergence de la série $\sum \frac{1}{p_n}$.

(a) Justifier le fait que la série $\sum \frac{1}{p_n}$ est de même nature que la série $\sum \ln\left(1-\frac{1}{p_n}\right)$.

(b) En désignant par $(u_n)_{n\geq 1}$ la suite définie par :

$$\forall n \geq 1,\ u_n = \frac{1}{\prod\limits_{k=1}^{n}\left(1-\frac{1}{p_k}\right)}$$

montrer que :

$$\left(\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{p_n} = +\infty\right) \Leftrightarrow \left(\lim_{n\to+\infty} u_n = +\infty\right)$$

(c) En désignant, pour tout entier $n \in \mathbb{N}^*$, par E_n l'ensemble des entiers naturels non nuls et différents de 1 qui ont tous leurs diviseurs premiers dans $\mathcal{P}_n = \{p_1, \cdots, p_n\}$, montrer que :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*,\ u_n = 1 + \sum_{j\in E_n} \frac{1}{j}$$

en déduire que :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*,\ u_n \geq \sum_{j=1}^{p_n} \frac{1}{j}$$

et conclure.

5. Montrer que si le produit infini $\prod u_n$ est strictement convergent, la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge alors vers 1.

6. Montrer que le produit infini $\prod \left(1+\frac{(-1)^n}{\sqrt{n+1}}\right)$ est convergent et calculer sa valeur.

7. Soit $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de réels positifs ou nuls. Montrer que le produit infini $\prod(1+v_n)$ est strictement convergent si, et seulement si, la série $\sum v_n$ est convergente.

8. Soit $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite de réels positifs tous différents de 1.
Montrer que si $\lim\limits_{n\to+\infty} v_n = 0$, le produit infini $\prod(1-v_n)$ est alors convergent de limite nulle si la série $\sum v_n$ diverge et de limite non nulle si cette série converge.

9. Soit $\alpha > 1$ un réel.

(a) Montrer que le produit infini $\prod \frac{1}{1-\frac{1}{p_n^\alpha}}$ est convergent.

(b) Montrer que :

$$\prod_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{1-\frac{1}{p_n^\alpha}} = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^\alpha}$$

(formule d'Euler).

10. La formule d'Euler peut aussi se montrer en utilisant des arguments « probabilistes ».
L'ensemble $\mathbb{N}^*$est muni munit de la tribu $\mathcal{P}(\mathbb{N}^*)$.
On rappelle que la fonction dzéta de Riemann est définie par :

$$\forall \alpha > 1,\ \zeta(\alpha) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^\alpha}$$

(a) Montrer que l'on définit une probabilité sur $(\mathbb{N}^*, \mathcal{P}(\mathbb{N}^*))$ en posant :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*,\ \mathbb{P}(\{n\}) = \frac{1}{\zeta(\alpha)} \frac{1}{n^\alpha}$$

(b) Montrer que :

$$\forall p \in \mathbb{N}^*,\ \mathbb{P}(p\mathbb{N}^*) = \frac{1}{p^\alpha}$$

où on a noté $p\mathbb{N}^*$ l'ensemble de tous les multiples positifs de p.

(c) Montrer que :

$$\mathbb{P}\left(\bigcap_{n=1}^{+\infty} (\mathbb{N}^* \setminus p_n\mathbb{N}^*)\right) = \frac{1}{\zeta(\alpha)}$$

(d) En déduire que :

$$\forall \alpha > 1,\ \prod_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{1 - \frac{1}{p_n^\alpha}} = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^\alpha}$$

(e) Montrer que $\lim\limits_{\alpha \to 1^+} \zeta(\alpha) = +\infty$ et déduire de la question précédente que $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} \dfrac{1}{p_n} = +\infty$.

11. On se propose de montrer que, pour tout réel $x \in [-\pi, \pi]$, on a :

$$\sin(x) = x \prod_{n=1}^{+\infty} \left(1 - \frac{x^2}{n^2\pi^2}\right)$$

(a) Montrer que, pour tout réel $x \in \mathbb{R} \setminus \pi\mathbb{Z}$, le produit infini $\prod \left(1 - \dfrac{x^2}{n^2\pi^2}\right)$ converge strictement.

(b) Montrer que, pour tout entier naturel n, il existe un polynôme P_n de degré n tel que $\sin((2n+1)x) = \sin(x) P_n(\sin^2(x))$ pour tout réel x.
On vérifiera que le coefficient dominant de P_n est $\alpha_n = (-1)^n 4^n$ et que $P_n(0) = 2n+1$.

(c) Déterminer les racines du polynôme P_n, pour $n \geq 1$.

(d) Montrer que, pour tout réel $x \in \left]-\dfrac{\pi}{2}, \dfrac{\pi}{2}\right[$ et tout entier $n \geq 1$, on a :

$$\begin{aligned}\sin((2n+1)x) &= (2n+1)\sin(x) \prod_{k=1}^{n} \left(1 - \frac{\sin^2(x)}{\sin^2\left(\frac{k\pi}{2n+1}\right)}\right) \\ &= (2n+1)\tan(x)\cos^{2n+1}(x) \prod_{k=1}^{n} \left(1 - \frac{\tan^2(x)}{\tan^2\left(\frac{k\pi}{2n+1}\right)}\right)\end{aligned}$$

(e) Montrer que pour $0 < x < y < \dfrac{\pi}{2}$, on a :

$$0 < \frac{\tan(x)}{\tan(y)} < \frac{x}{y} < \frac{\sin(x)}{\sin(y)}$$

(f) Montrer que $\lim\limits_{n\to+\infty} \cos^n\left(\dfrac{x}{n}\right) = 1$ pour tout réel $x \in \left]0, \pi\right[$.

(g) Conclure.

– II – Un théorème de Cesàro

Pour tout entier $n \geq 2$, on note :
$$I_n = \{1, 2, \cdots, n\}$$
et $\mathcal{D}_n$ l'ensemble de tous les diviseurs strictement positifs de n.

On note $\mathbb{R}^{\mathbb{N}^*}$ l'ensemble des suites définies sur $\mathbb{N}^*$ et à valeurs réelles.

Le produit de convolution (de Dirichlet) de deux suites réelles u, v de $\mathbb{R}^{\mathbb{N}^*}$ est la suite $u * v$ définie par :
$$\forall n \in \mathbb{N}^*,\ (u * v)(n) = \sum_{d \in \mathcal{D}_n} u(d)\, v\left(\frac{n}{d}\right)$$

En notant $n = \prod\limits_{i=1}^{r} p_i^{\alpha_i}$ la décomposition en facteurs premiers d'un entier $n \geq 2$ où $r \geq 1$, les p_i sont premiers deux à deux distincts et les α_i entiers naturels non nuls, on définit la fonction μ de Möbius par :
$$\forall n \in \mathbb{N}^*,\ \mu(n) = \begin{cases} 1 \text{ si } n = 1 \\ (-1)^r \text{ si } n = \prod\limits_{i=1}^{r} p_i \text{ (i. e. } n \text{ est sans facteurs carrés)} \\ 0 \text{ sinon} \end{cases}$$

La fonction indicatrice d'Euler est la fonction qui associe à tout entier naturel non nul n, le nombre $\varphi(n)$ d'entiers compris entre 1 et n qui sont premiers avec n (pour $n = 1$, on a $\varphi(1) = 1$).

1. Pour tout entier $n \in \mathbb{N}^*$ et tout $d \in \mathcal{D}_n$, on note :
$$S_d = \{k \in \{1, \cdots, n\} \mid k \wedge n = d\}$$

   (a) Montrer que les S_d, pour d décrivant $\mathcal{D}_n$, forment une partition de I_n et que, pour tout $d \in \mathcal{D}_n$, on a $\operatorname{card}(S_d) = \varphi\left(\dfrac{n}{d}\right)$.

   (b) En déduire que :
$$\forall n \in \mathbb{N}^*,\ n = \sum_{d \in \mathcal{D}_n} \varphi(d)$$
   (formule de Möbius).

2. Montrer que l'ensemble $\mathbb{R}^{\mathbb{N}^*}$ des suites définies sur $\mathbb{N}^*$ et à valeurs réelles, muni des lois $+$ et $*$, est un anneau commutatif unitaire.
   On notera e l'élément unité.

3. Caractériser les éléments inversibles de l'anneau $\left(\mathbb{R}^{\mathbb{N}^*}, +, *\right)$.

4.

   (a) En notant ω la suite constante égale à 1 (i. e. $\omega(n) = 1$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$), montrer que $\mu * \omega = e$, c'est-à-dire que :
$$\forall n \geq 1,\ \sum_{d \in \mathcal{D}_n} \mu(d) = \begin{cases} 1 \text{ si } n = 1 \\ 0 \text{ si } n \geq 2 \end{cases}$$

(b) Montrer que si u, v dans $\mathbb{R}^{\mathbb{N}^*}$ sont telles que :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*,\ u(n) = \sum_{d \in \mathcal{D}_n} v(d)$$

on a alors :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*,\ v(n) = \sum_{d \in \mathcal{D}_n} \mu(d)\, u\left(\frac{n}{d}\right)$$

(formule d'inversion de Möbius).

5. Montrer que :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \varphi(n) = \sum_{d \in \mathcal{D}_n} \mu(d) \frac{n}{d}$$

6. Montrer que si u, v dans $\mathbb{R}^{\mathbb{N}^*}$ sont telles que :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*,\ u(n) = \sum_{d \in \mathcal{D}_n} v(d)$$

on a alors :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*,\ \sum_{k=1}^{n} u(k) = \sum_{d=1}^{n} \left[\frac{n}{d}\right] v(d)$$

7. Montrer que :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*,\ \sum_{d=1}^{n} \mu(d) \left[\frac{n}{d}\right] = 1$$

8. Montrer que :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*,\ \sum_{k=1}^{n} \varphi(k) = \frac{1}{2}\left(\sum_{d=1}^{n} \mu(d) \left[\frac{n}{d}\right]^2 + 1\right)$$

9. Pour tout entier $n \geq 2$, on note r_n la probabilité pour que deux entiers a, b compris entre 1 et n soient premiers entre eux.
Montrer que :

$$\forall n \geq 2,\ r_n = \frac{1}{n^2}\left(2\sum_{k=1}^{n} \varphi(k) - 1\right) = \frac{1}{n^2}\sum_{d=1}^{n} \mu(d) \left[\frac{n}{d}\right]^2$$

10. Pour u, v dans $\mathbb{R}^{\mathbb{N}^*}$, le produit de Dirichlet des deux séries numériques $\sum u(n)$ et $\sum v(n)$ est la série $\sum u * v(n)$.

(a) On suppose que les suites u et v sont à valeurs réelles positives.
Montrer que si les séries $\sum u(n)$ et $\sum v(n)$ sont convergentes, il en est alors de même de $\sum u * v(n)$ et on a :

$$\sum_{n=0}^{+\infty} u * v(n) = \left(\sum_{n=0}^{+\infty} u(n)\right)\left(\sum_{n=0}^{+\infty} v(n)\right)$$

(b) Montrer que si les séries $\sum u(n)$ et $\sum v(n)$ sont absolument convergentes, il en est alors de même de $\sum u * v(n)$ et on a :

$$\sum_{n=0}^{+\infty} u * v(n) = \left(\sum_{n=0}^{+\infty} u(n)\right)\left(\sum_{n=0}^{+\infty} v(n)\right)$$

11. À toute suite $u \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}^*}$ on associe la série de fonctions $\sum \dfrac{u(n)}{n^x}$. On dit que cette série de fonctions est la série de Dirichlet associée à u.

   (a) Soient u, v dans $\mathbb{R}^{\mathbb{N}^*}$. Montrer que si les séries de Dirichlet respectivement associées à u et v convergent absolument en un point x, alors la série de Dirichlet associée à $u * v$ converge absolument en x et on a :

$$\left(\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{u(n)}{n^x}\right)\left(\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{v(n)}{n^x}\right) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{u * v(n)}{n^x}$$

   (b) Montrer que :

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\mu(n)}{n^2} = \frac{6}{\pi^2}$$

   (c) En déduire que $\lim\limits_{n \to +\infty} r_n = \dfrac{6}{\pi^2}$ (théorème de Cesàro).