La première partie de ce problème établit un lemme permettant de préciser le comportement d'une série entière au bord de son disque de convergence. Les parties **II.** et **III.** suivantes, totalement indépendantes l'une de l'autre, utilisent ce lemme. Les parties **IV** et **V.**, qui n'ont rien à voir, établissent deux résultats intéressants.

I. Un lemme important

Soient $\sum a_n x^n$ et $\sum b_n x^n$ deux séries entières réelles. On suppose :

i. que le rayon de convergence de la série entière $\sum b_n x^n$ est égal à 1 ;

ii. que la série $\sum b_n$ est une série divergente à termes positifs ;

iii. que $a_n = \mathrm{o}(b_n)$ (c'est-à-dire que a_n est négligeable devant b_n quand n tend vers l'infini).

1. Prouver que $\lim\limits_{x \to 1^-} \sum\limits_{n=0}^{\infty} b_n x^n = +\infty$ (indication : on pourra, étant donné un réel positif A, justifier l'existence d'un entier N tel que $\sum\limits_{n=0}^{N} b_n \geq A$, et en déduire une minoration de $\sum\limits_{n=0}^{N} b_n x^n$, puis de $\sum\limits_{n=0}^{\infty} b_n x^n$, pour x assez proche de 1).

2. Que peut-on dire du rayon de convergence de la série entière $\sum a_n x^n$?

3. On fixe un réel ε strictement positif.

a. Prouver l'existence d'un entier N *indépendant de* x tel que :

$$\forall x \in [0,1[, \ \left| \sum_{k=N}^{\infty} a_k x^k \right| \leq \varepsilon \sum_{k=N}^{\infty} b_k x^k .$$

b. Prouver, grâce à la question **1.**, l'existence d'un réel $\alpha > 0$ tel que :

$$\forall x \in [1-\alpha, 1[, \ \left| \sum_{k=0}^{N-1} a_k x^k \right| \leq \varepsilon \sum_{k=0}^{\infty} b_k x^k .$$

c. En déduire, en achevant correctement l'epsilonnage, que au voisinage de 1^-, on a :

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = \mathrm{o}\left(\sum_{n=0}^{\infty} b_n x^n \right).$$

4. On se donne maintenant une suite (α_n) de réels telle que $\alpha_n \underset{\infty}{\approx} b_n$ (c'est-à-dire que les suites (α_n) et (b_n) sont équivalentes quand n tend vers l'infini).

a. Que vaut le rayon de convergence de la série entière $\sum \alpha_n x^n$?

b. Prouver en utilisant ce qui précède que $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \alpha_n x^n \underset{1^-}{\approx} \sum\limits_{n=0}^{\infty} b_n x^n$.

On a ainsi établi le résultat suivant :

> Soient (a_n) et (b_n) deux suites de réels telles que : $a_n \underset{\infty}{\approx} b_n$, la série $\sum b_n$ est une série divergente à termes positifs, et la série entière $\sum b_n x^n$ a un rayon de convergence égal à 1. Alors :
>
> $$\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n \underset{1^-}{\approx} \sum_{n=0}^{\infty} b_n x^n.$$

II. Étude de la série entière $\sum x^{2^n}$

1. Étudier la convergence de la *suite* (z^{2^n}) quand le complexe z est de module différent de 1.

2. On fixe ici un complexe z de module égal à 1. On posera $u_n = z^{2^n}$.

a. Quelle formule de récurrence très simple vérifie la suite (u_n) ? En déduire que 1 est la seule limite possible de cette suite.

b. On suppose que u_n est différent de 1 pour tout n. Prouver dans ce cas que si la suite (u_n) tend vers 1, alors $\left|\dfrac{u_{n+1}-1}{u_n-1}\right|$ tend vers 2. Conclure à une impossibilité.

c. Donner une condition nécessaire et suffisante sur z de module 1 pour que la suite (u_n) soit convergente.

3. Que vaut le rayon de convergence R de la série entière $\sum x^{2^n}$?

On pose désormais, pour x réel élément de $]-R,R[$, $F(x)=\sum_{n=0}^{\infty} x^{2^n}$.

4. On définit une suite (a_p) par : $\begin{cases} a_p = 1 \text{ si } p \text{ est une puissance de } 2\,; \\ a_p = 0 \text{ sinon.} \end{cases}$

Ainsi, il est possible d'écrire, pour tout réel x de $]-R,R[$, $F(x)=\sum_{p=0}^{\infty} a_p x^p$. On remarquera également que pour tout entier non nul n, $\sum_{p=0}^{n} a_p$ peut être vu comme le nombre de puissances de 2 inférieures ou égales à n.

a. Prouver que pour tout entier non nul n, $\sum_{p=0}^{n} a_p = \left[\dfrac{\ln n}{\ln 2}\right]+1$ ([ ] désigne la partie entière).

b. Donner un équivalent simple, quand n tend vers l'infini, de $\sum_{p=0}^{n} a_p$.

5. Développer en série entière les fonctions $\dfrac{\ln(1-x)}{1-x}$ et $\dfrac{F(x)}{1-x}$.

6. Prouver que quand n tend vers l'infini, $1+\dfrac{1}{2}+\ldots+\dfrac{1}{n} \approx \ln n$.

7. Déduire des questions précédentes un équivalent simple de $F(x)$ au voisinage de 1^-.

III. Comparaison de deux modes de convergence

(a_n) désigne une suite de réels. On pose, pour tout entier n, $S_n = \sum_{k=0}^{n} a_k$.

Le but de cette partie est de prouver un lien entre les deux modes de convergence suivants suivantes :

(1) Cesàro : la suite (a_n) converge vers 1 en moyenne, c'est-à-dire $\lim_{n\infty} \dfrac{a_0+a_1+\ldots+a_n}{n} = \lim_{n\infty} \dfrac{S_n}{n} = 1$.

(2) Abel : $\lim_{x\to 1^-} (1-x)\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = 1$.

La suite (a_n) est ici supposée vérifier la propriété (1).

1. Déterminer le rayon de convergence de la série $\sum S_n x^n$, et donner un équivalent en 1⁻ de $\sum_{n=0}^{\infty} S_n x^n$.

2. Prouver que le rayon de convergence de $\sum a_n x^n$ est égal supérieur ou égal à 1.

3. En déduire, en exprimant $\sum_{n=0}^{\infty} S_n x^n$ en fonction de $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$, que la suite (a_n) vérifie la propriété (2).

La suite (a_n) est désormais supposée **positive** vérifier la propriété (2).

4. **a.** Prouver, grâce à la propriété (2), que si P est un polynôme, alors

$$\lim_{x\to 1^-} (1-x)\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n P(x^n) = \int_0^1 P(t)\mathrm{d}t.$$

b. En déduire, grâce au théorème de Stone-Weierstrass, que si f est une fonction numérique continue sur $[a,b]$, alors on a encore :

$$\lim_{x\to 1^-} (1-x)\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n f(x^n) = \int_0^1 f(t)\mathrm{d}t.$$

c. Prouver que la propriété précédente reste vraie en supposant seulement f continue par morceaux.

5. En considérant la fonction f définie par

$$\begin{cases} f(x) = 0 \text{ si } 0 \le x \le 1/2, \\ f(x) = 1/x \text{ si } 1/2 < x \le 1 \end{cases}$$

ainsi qu'une suite bien choisie tendant vers 1, prouver que $\sum_{k=0}^{n} a_k \underset{\infty}{\approx} n$, c'est-à-dire que la suite (a_n) possède la propriété (1).

IV. Inversion d'une série entière

L'objet de cette partie est d'établir le résultat non trivial suivant : si une fonction f, définie au voisinage de 0 dans **R**, est développable en série entière et vérifie $f(0) \neq 0$, alors la fonction $1/f$ est, elle aussi, développable en série entière au voisinage de 0.

On note A l'ensemble des suites de réels.

Si $a = (a_n)$ et $b = (b_n)$ sont deux suites de réels, et si λ est un réel, on définit les trois suites $a+b, a*b$ de la façon suivante :

$$a+b = (\alpha_n) \text{ avec } \alpha_n = a_n + b_n \text{ pour tout } n\ ;$$

$$a*b = (\beta_n) \text{ avec } \beta_n = \sum_{k=0}^{n} a_k b_{n-k} \text{ pour tout } n\ ;$$

On peut vérifier (ce n'est pas demandé) que $(A,+)$ est un groupe commutatif, et que la loi $*$ est commutative, associative, et distributive par rapport à la loi +.

1. Vérifier que la suite ε définie par $\varepsilon_0 = 1$ et $\varepsilon_n = 0$ pour $n \ge 1$ est élément neutre pour la loi $*$.

2. Soit u la suite constante égale à 1.

a. Calculer $u*u$ et $u*u*u$.

b. Le sous-ensemble B de A constitué des suites qui sont bornées est-il un sous-anneau de A ?

3. Soient $a = (a_n)$ et $b = (b_n)$ deux éléments *non nuls* de A. Prouver que leur produit $a * b$ est non nul. Que peut-on en déduire concernant l'anneau $(A,+,*)$?

4. **a.** Soit $a \in A$. Prouver que a est inversible dans A (pour la loi $*$) si et seulement si $a_0 \neq 0$.

b. *Exemple :*

Déterminer l'inverse pour la loi $*$ de la suite u constante égale à 1 évoquée à la question **2.**

5. Soit D le sous-ensemble de A constitué des suites ayant la propriété suivante :

$$a \in D \Leftrightarrow \exists m, r \in \mathbf{R} \text{ tels que } \forall n \in \mathbf{N},\ |a_n| \leq m r^n.$$

On notera que si $a \in D$, les m et r de l'inégalité précédente ne sont pas uniques et que n'importe quelles valeurs plus grandes conviennent encore.

a. Prouver que la somme de deux éléments de D est encore un élément de D.

b. Prouver que pour tout entier n, on a $n+1 \leq 2^n$.

En déduire que le produit (au sens de la loi $*$) de deux éléments de D est encore un élément de D.

Que peut-on dire de D vis-à-vis de A ?

6. Soit a un élément de D vérifiant $a_0 = 1$, et b son inverse pour la loi $*$.

a. Prouver l'existence d'un réel h tel que $\forall n \in \mathbf{N},\ |a_n| \leq h^n$.

b. Prouver pour tout entier n l'inégalité $|b_n| \leq (2h)^n$. Que peut-on dire de la suite b ?

c. Prouver, plus généralement, que l'inverse d'un élément inversible de D est encore dans D.

7. Établir le résultat énoncé au tout début de l'énoncé, à propos de l'inverse d'une fonction développable en série entière.

Partie V

On se propose ici d'établir le résultat remarquable suivant :

> **<u>Théorème</u> :** Soit (f_n) une suite de fonctions définies sur $D(0,R)$, convergeant uniformément sur tout disque $D(0,r)$ avec $r < R$, vers une fonction f. Alors si toutes les fonctions f_n sont développables en série entière sur $D(0,R)$, f est elle-même développable en série entière sur $D(0,R)$.

Pour cela, on prouvera au préalable le théorème de Cauchy, qui donne une condition nécessaire et suffisante pour qu'une fonction continue soit développable en série entière sur $D(0,R)$.

1. Soit $\sum c_n z^n$ une série entière de rayon de convergence $R > 0$, f sa fonction somme définie sur $D(0,R)$.

Soit a un élément de $D(0,R)$, et r un réel tel que $|a| < r < R$.

a. Pour θ dans $[0,2\pi]$, représenter $f(re^{i\theta})$ et $\dfrac{1}{1-\frac{a}{r}e^{-i\theta}}$ sous forme de séries.

En déduire un développement en série de $g(\theta) = \dfrac{f(re^{i\theta})}{1-\frac{a}{r}e^{-i\theta}}$.

b. Prouver que la convergence de la série ainsi obtenue est normale sur $[0,2\pi]$.

c. En déduire la formule intégrale de Cauchy :

$$f(a) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \frac{f(re^{i\theta})}{1-\frac{a}{r}e^{-i\theta}}\,d\theta.$$

2. Soit réciproquement une fonction continue f sur $D(0,R)$, qui pour tous a et r vérifiant $|a| < r < R$, satisfait à la formule intégrale précédente.

Grâce au développement en série de $\dfrac{1}{1-\dfrac{a}{r}e^{-i\theta}}$, puis à une intégration terme à terme bien justifiée, prouver que f est développable en série entière sur $D(0,R)$.

3. On revient ici à la démonstration du théorème énoncé au début de cette partie : soit donc (f_n) une suite de fonctions définies sur $D(0,R)$, développables en série entière sur ce disque, et convergeant uniformément sur tout disque $D(0,r)$ avec $r < R$, vers une fonction f.

a. Prouver que f est définie et continue sur $D(0,R)$.

b. Prouver que f vérifie, pour tous a et r vérifiant $|a| < r < R$, la formule intégrale de Cauchy, puis conclure.

4. Ce résultat reste-t-il valable pour une suite de fonctions (f_n), définies sur l'intervalle $]-R,R[$ de **R**, développables en série entière sur cet intervalle, et convergeant uniformément sur tout intervalle $]-r,r[$ avec $0 < r < R$ vers une fonction f ?