Université Joseph Fourier
Agrégation interne

02-12-2015

1 Leçons concernées

La liste suivante n'est pas exhaustive.

1. 209 : Séries de fonctions. Propriétés de la somme, exemples
2. 210 : Séries entières de variable réelle ou complexe. Rayon de convergence. Propriétés de la somme. Exemples.
3. 212 : Série de Fourier d'une fonction périodique ; propriétés de la somme. Exemples
4. 264 : Fonctions développables en série entière.
5. 410 : Comparaison, sur des exemples, de divers modes de convergence d'une suite ou d'une série de fonctions.
6. 411 : Exemples d'étude de fonctions définies par une série
7. 412 : Exemples de développement d'une fonction en série entière. Applications.
8. 413 : Exemples d'applications des séries entières.
9. 414 : Exemples de séries de Fourier et de leurs applications.

2 Séries entières

Exercice 2.1 Montrer que pour tout $\alpha \in \mathbf{R}$ les séries entières $\sum a_n z^n$ et $\sum n^\alpha a_n z^n$ ont même rayon de convergence.

Exercice 2.2 Soit une série entière $\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ de rayon de convergence $R > 0$ et de somme $f(z)$.

1. Montrer que pour $0 < r < R$,
$$\sum_{n=0}^{\infty} |a_n|^2 r^{2n} = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \left|f(r\mathrm{e}^{i\theta})\right|^2 \,\mathrm{d}\theta$$
2. Que dire de f si $|f|$ admet un maximum local en 0 ?
3. On suppose maintenant que $R = +\infty$ et qu'il existe $P \in \mathbf{R}_N[X]$ tel que $|f(z)| \leq P(|z|)$ pour tout z complexe. Montrer que $f \in \mathbf{C}_N[X]$.

Exercice 2.3 **Théorème de Bernstein et application .**– Soient $a > 0$ et $f \in \mathcal{C}^\infty(]-a,a[\,,\mathbf{R})$ telle que

$$\forall n \in \mathbf{N}, \forall x \in \,]-a,a[\,, f^{(n)}(x) \geq 0$$

1. Si $|x| < r < a$, montrer
$$\left|f(x) - \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(0)}{k!} x^k\right| \leq \left|\frac{x}{r}\right|^{n+1} f(r)$$
2. Montrer que f est développable en série entière sur $]-a,a[$.

3. Montrer que $x \mapsto \tan x$ est développable en série entière sur $]-\pi/2, \pi/2[$.

Exercice 2.4 Inverse d'une série entière .– Soit $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n z^n$ une série entière de rayon $R > 0$ et telle que $a_0 = 1$ (ou plus généralement $a_0 \neq 0$).

1. Montrer qu'il existe une et une seule suite $(b_n)_{n\in\mathbf{N}}$ telle que $\forall n \in \mathbf{N}$, $\sum_{k=0}^{n} a_k b_{n-k} = \delta_{0,n}$.
2. Montrer que la série entière $\sum_{n=0}^{+\infty} b_n z^n$ a un rayon strictement positif.

Exercice 2.5 Soit I_n le nombre d'involutions de $[\![1, n]\!]$.

1. Montrer que
$$\forall n \in \mathbf{N}^*,\ I_{n+2} = I_{n+1} + (n+1)I_n.$$
2. En déduire que la série entière $S(x) = \displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{I_n}{n!} x^n$ a un rayon de coonvergence R supérieur ou égal à 1 et montrer que
$$S(x) = e^{\frac{x^2}{2}+x} - 1.$$

Exercice 2.6 Nombres de Bell .–[1] On note, pour $n \geq 1$, $I_n = \{1, 2, \cdots, n\}$ et on désigne par β_n le nombre de partitions de I_n (nombres de Bell). On convient que $\beta_0 = 1$.

1. Calculer $\beta_1, \beta_2, \beta_3$.
2. Montrer que :
$$\forall n \in \mathbf{N},\ \beta_{n+1} = \sum_{k=0}^{n} C_n^k \beta_k$$
3. Montrer que $\beta_n \leq n!$ pour tout $n \in \mathbf{N}$.
4. Étudier la convergence et la somme de la série entière $\displaystyle\sum \frac{\beta_n}{n!} z^n$.

Exercice 2.7 Soit X une variable aléatoire à valeurs dans $\mathbf{N}$. La *fonction génératrice* de X est
$$g_X\ :\ s \in [0,1] \mapsto g_X(s) = \mathbf{E}\left(s^X\right) = \sum_{k\in\mathbf{N}} s^k P\left(X = k\right).$$

1. Montrer que g_X est croissante, continue et convexe sur $[0, 1]$, et $\mathcal{C}^\infty$ sur $[0, 1[$.
2. Montrer que X admet une espérance si et seulement si g_X est dérivable à gauche en 1. On a alors $\mathbf{E}(X) = (g_X)'_g(1)$.
3. Soient X et Y deux variables aléatoires définies sur $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ à valeurs dans $\mathbf{N}$. Si X et Y sont indépendantes,
$$g_{X+Y}(s) = g_X(s) g_Y(s).$$
4. On considère des variables aléatoires à valeurs entières N et $(X_i)_{i\in\mathbf{N}}$ définies sur $(\Omega, \mathcal{A}, P)$. On suppose les X_i indépendantes et de même loi et on pose, pour tout $\omega \in \Omega$, $S_0 = 0$
$$S_N(\omega) = \sum_{1}^{N(\omega)} X_k(\omega).$$
Montrer que S_N a pour fonction génératrice $g_N \circ g$.

1. F. G. N. Algèbre 1 ou Meunier

3 Autres séries de fonctions

Exercice 3.8 Pour $x > 0$, on pose $f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} e^{-x\sqrt{n}}$. Étudier la convergence de cette série de fonctions. Trouver un équivalent simple de f en 0 à droite.

Exercice 3.9 Soit f une fonction continue de $I = [0,1]$ dans $\mathbf{R}$. Pour tout entier $n \in \mathbf{N}$ on note f_n la fonction définie sur I par

$$f_n(x) = x^n f(x).$$

1. Donner une condition nécessaire et suffisante sur f pour que la suite $(f_n)_{n\in\mathbf{N}}$ converge uniformément sur I.
2. Donner de même une condition nécessaire et suffisante pour que la série $\sum f_n$ converge uniformément sur I.

Exercice 3.10 Pour tout entier n, on considère la fonction g_n définie par

$$g_n(x) = nx^2 \mathrm{e}^{-x\sqrt{n}}$$

définies sur $\mathbf{R}^+$.

Etudier la convergence de la série $\sum g_n$.

Exercice 3.11 On pose

$$\zeta(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^x}$$

1. Montrer que la fonction ζ est définie et de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $]1, +\infty[$.
2. Etudier monotonie et convexité de la fonction ζ.
3. Déterminer la limite de la fonction ζ en $+\infty$.
4. Déterminer un équivalent de la fonction ζ en 1^+.
5. Montrer que $x \mapsto \ln(\zeta(x))$ est convexe.

4 Séries de Fourier

Exercice 4.12 [2]Soient $\lambda \in \mathbf{C} \setminus [-1,1]$ et f définie sur $\mathbf{R}$ par :

$$f(x) = \frac{1}{\lambda + \cos(x)}$$

On se propose d'utiliser les séries de Fourier pour calculer les valeurs des intégrales :

$$\int_0^\pi \frac{\cos(nx)}{\lambda + \cos(x)} dx$$

pour $n \in \mathbf{N}$.

1. Montrer que l'équation polynomiale $P(z) = z^2 + 2\lambda z + 1$ a deux solutions complexes z_1, z_2 telles que $0 < |z_1| < 1 < |z_2|$.
2. Montrer que, pour tout réel x, on a :

$$f(x) = \frac{2e^{ix}}{P(e^{ix})}$$

2. D'après Ramis, Deschamps, Odoux, exercices d'analyse 2

3. En utilisant la décomposition en éléments simples de $\dfrac{1}{P(z)}$ et le développement en série entière de $\dfrac{1}{1-z}$ pour $|z|<1$ dans $\mathbf{C}$, donner le développement en série de Fourier de la fonction f.
4. En déduire les valeurs des intégrales $\displaystyle\int_0^\pi \frac{\cos(nx)}{\lambda+\cos(x)}dx$, pour tout entier $n \geq 0$.
5. Calculer en particulier les intégrales suivantes :

$$\int_0^\pi \frac{\cos(nx)}{2+\cos(x)}dx, \quad \int_0^\pi \frac{\cos(nx)}{ch(a)+\cos(x)}dx$$

pour tout entier $n \geq 0$, tout réel $a > 0$.

Exercice 4.13

1. **[Nombres de Bernoulli]** Soit B_n la suite de polynômes définie par $B_0 = 1$ et, pour $n > 0$,

$$B_n' = nB_{n-1}, \qquad \int_0^1 B_n(x)dx = 0.$$

Pour tout entier n on note $\widetilde{B_n}$ la fonction périodique de période 2π égale à $B_n(\frac{x}{2\pi})$ sur $[0, 2\pi]$.

(a) Montrer que pour tout entier k et tout $n > 0$ on a :

$$c_k\left(\widetilde{B_n}\right) = -\frac{n}{(2\pi ik)^n}.$$

(b) À l'aide de la série de Fourier de B_{2p}, en déduire la valeur de $\zeta(2p)$.

Exercice 4.14 [Formule sommatoire de Poisson] Soit f une fonction continue intégrable telle que la série

$$\sum_{n\in\mathbf{Z}} f(x+n)$$

converge normalement sur tout compact de $\mathbf{R}$.

1. Montrer que si la série $\sum_{n\in\mathbf{Z}} \hat{f}(n)$ converge absolument, alors pour tout x on a

$$\sum_{n\in\mathbf{Z}} f(x+n) = \sum_{n\in\mathbf{Z}} \hat{f}(n)e^{2\pi inx}.$$

2. On considère la fonction f définie par $f(x) = e^{-\pi x^2}$. Soit α un réel strictement positif. Calculer la transformée de Fourier de $g(x) = f(x/\alpha)$ et lui appliquer la formule sommatoire de Poisson. Qu'en pensez-vous ?
3. Soit $f : x \mapsto \frac{1}{a^2+x^2}$, calculer sa transformée de Fourier et montrer que

$$\sum_{\mathbf{Z}} \frac{1}{a^2+n^2} = \frac{\pi}{a}\sum_{\mathbf{Z}} e^{-2\pi a|n|}.$$

4. En déduire que

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}.$$

Exercice 4.15 Soit f une fonction continue intégrable à spectre borné. On suppose que le support de $\hat{f}$ est inclus dans $[-\nu, \nu]$, montrer que , pour tout réel $x \neq \frac{k\pi}{\nu}$,

$$f(x) = \sum_{-\infty}^{+\infty} f\left(\frac{k\pi}{\nu}\right)\frac{\sin(\nu x - k\pi)}{\nu x - k\pi}.$$