Dans tout le problème, **K** est un sous-corps du corps **R** des réels, et **K**[X] est l'algèbre des polynômes à une indéterminée sur **K**. Par définition, un réel α est dit *algébrique* sur **K** si α est racine d'un polynôme non nul à coefficients dans **K**. Dans le cas contraire, α est dit *transcendant* sur **K**. Dans le cas où **K** est le corps **Q** des rationnels, on se contente généralement de parler de *nombre transcendant* (sans préciser sur quel corps).

Le but de ce problème est d'établir des propriétés simples des nombres algébriques et transcendants sur un corps **K**, d'en donner des exemples lorsque **K** est le corps **Q** des rationnels, puis d'appliquer les résultats obtenus pour caractériser les points du plan constructibles "à la règle et au compas".

Partie I

Soit α un réel algébrique sur **K**, sous-corps de **R**. On désigne par $I(\alpha)$ l'ensemble des polynômes P de **K**[X] dont α est racine.

1. **a.** Démontrer que $I(\alpha)$ est un idéal de **K**[X]. En déduire l'existence d'un polynôme unitaire unique π_α, tel que $I(\alpha)$ soit l'ensemble des polynômes multiples de π_α.

b. Démontrer que pour qu'un polynôme P, appartenant à **K**[X], unitaire et irréductible dans **K**[X], soit le polynôme π_α, il faut et il suffit que α soit racine de P.

Par définition, le polynôme π_α est le *polynôme minimal* de α sur **K**. Le degré de ce polynôme sera noté deg(α,**K**), et il sera dit *degré* de α sur **K**.

On note désormais $\mathbf{K}[\alpha] = \{P(\alpha), P \in \mathbf{K}[X]\}$, et on admet, c'est évident, que **K**[α] est un anneau pour l'addition et la multiplication usuelle des réels.

2. Le réel α et le corps **K** étant donnés, prouver l'équivalence des trois assertions suivantes :

i. α est un élément de **K**.

ii. le degré de α sur **K** est égal à 1.

iii. **K**[α] est égal à **K**.

3. Dans cette question, le degré de α sur **K** est égal à 2.

On dit dans ce cas que **K**[α] est une *extension quadratique* de **K**.

a. Préciser la dimension de **K**[α], et prouver que c'est un corps.

b. Démontrer qu'il existe un élément positif k du corps **K** tel que les deux corps **K**[α] et **K**[$\sqrt{k}$] soient égaux.

4. Dans cette question, le degré de α sur **K** est un entier *n* supérieur ou égal à 2.

a. Démontrer qu'à tout réel *x* appartenant à l'espace vectoriel **K**[α] est associé de manière unique un polynôme *R* de degré inférieur ou égal à $n-1$ appartenant à **K**[*X*], tel que $x = R(\alpha)$. En déduire une base de l'espace **K**[α], ainsi que sa dimension sur **K**.

b. Démontrer que pour tout réel *x* non nul de **K**[α], le polynôme *R* ainsi associé est premier avec π_α. En déduire que l'anneau **K**[α] est un corps.

c. Retrouver le résultat précédent en envisageant l'application de **K** dans **K** : $y \mapsto xy$.

d. Démontrer que **K**[α] est le plus petit corps intermédiaire entre **K** et **R** qui contienne α.

Le corps **K** est maintenant le corps **Q** des rationnels. Considérons la suite des polynômes définis par :

$$P_0 = 1,\ P_1 = 2X + 1,\ \forall n \geq 0,\ P_{n+2} = 2XP_{n+1} - P_n .$$

Soit enfin Q_n le polynôme défini par $Q_n(X) = P_n(\frac{X}{2})$.

5. Propriétés générales des polynômes P_n.

a. Donner le degré du polynôme P_n, préciser son coefficient dominant ainsi que son terme constant. Déterminer les polynômes P_n pour *n* = 1, 2, 3, et prouver que, pour tout *n*, les coefficients des polynômes Q_n sont des entiers relatifs.

b. Démontrer que les seules racines rationnelles possibles du polynôme Q_n sont les entiers 1 et –1. Exprimer le polynôme $Q_{n+3} + XQ_n$ en fonction de Q_{n+1}. En déduire que les racines rationnelles éventuelles des polynômes Q_{n+3} et Q_n sont les mêmes. Préciser les polynômes P_n possédant une racine rationnelle.

6. Racines du polynôme P_n.

Soit θ un réel donné compris strictement entre 0 et π. Considérons la suite (u_n) définie par la donnée de u_0 et de u_1 et la relation de récurrence :

$$\forall n \geq 0, u_{n+2} = 2u_{n+1}\cos\theta - u_n .$$

a. Déterminer l'expression du terme général u_n de la suite définie ci-dessus.

b. Utiliser les résultats précédents pour exprimer le réel $v_n = P_n(\cos\theta)$ en fonction des réels *n* et θ. En déduire toutes les racines $x_{k,n}$ $(1 \leq k \leq n)$ du polynôme P_n.

c. Démontrer que les trois réels $\cos(\frac{2\pi}{5})$, $\cos(\frac{2\pi}{7})$ et $\cos(\frac{2\pi}{9})$ sont algébriques sur **Q**, et déterminer pour chacun son polynôme minimal.

7. Existence de nombres transcendants.

Il s'agit ici de donner un argument simple prouvant l'existence de nombres transcendants (sur **Q**) ; cette preuve présente toutefois un léger inconvénient : elle aboutit à la conclusion que "presque tous" les réels sont transcendants, sans toutefois en exhiber un seul !

a. Prouver que les réels algébriques (sur **Q**) sont les racines des polynômes non nuls de **Z**[*X*].

b. Pour tout polynôme non nul à coefficients entiers, on définit son "poids" comme étant égal à son degré plus la somme des valeurs absolues de ses coefficients : si $P \in \mathbf{Z}[X],\ P = \sum_{k=0}^{\deg P} a_k X^k \neq 0,\ \upsilon(P) = \deg P + \sum_{k=0}^{\deg P} |a_k|$.

Prouver que pour tout entier *k*, l'ensemble des polynômes de poids égal à *k* est fini.

c. Prouver que l'ensemble des réels algébriques est dénombrable.

d. Rappeler une preuve de la non-dénombrabilité de **R** (qui permet alors de conclure aisément, grâce à la question **c.**, à l'existence de nombres transcendants).

8. Un exemple explicite de nombre transcendant sur **Q**.

Soit *S* un polynôme irréductible de **Q**[*X*], de degré *n* supérieur ou égal à 2.

a. Prouver que *S* ne saurait posséder de racine rationnelle. En déduire qu'il existe un entier naturel non nul C_S tel que pour tout rationnel $r = \frac{p}{q}$ (*p* et *q* entiers, *q* positif), on ait $|S(r)| \geq \frac{1}{C_s q^n}$.

b. Soit α une racine de *S*. Déduire du résultat précédent, et avec l'aide de l'inégalité des accroissements finis, l'existence d'une constante strictement positive *K* telle que, pour tout rationnel $r = \frac{p}{q}$ appartenant à l'intervalle $[\alpha - 1, \alpha + 1]$, on ait l'inégalité $|\alpha - r| \geq \frac{K}{q^n}$.

c. Soient les réels $L_n = \sum_{k=0}^{n} 10^{-k!}$, et $L = \sum_{k=0}^{+\infty} 10^{-k!}$ (*L* en l'honneur de Liouville, découvreur de ce nombre transcendant). Prouver que *L* est irrationnel. Établir l'inégalité $|L - L_n| \leq 2.10^{-(n+1)!}$. En déduire la transcendance de *L*.

Partie II

Le but de cette partie est d'appliquer les résultats précédents pour caractériser les points du plan qui peuvent être construits "à la règle et au compas".

Soit $\mathcal{P}$ le plan euclidien orienté. Considérons un repère orthonormé *Oxy* et **K** un sous-corps de **R**. On adopte les notations suivantes :

$\mathcal{K}$ est l'ensemble des points du plan dont chaque coordonnée appartient à **K**.

$\mathcal{D}$ est l'ensemble des droites du plan qui joignent deux points de $\mathcal{K}$.

$\mathcal{C}$ est l'ensemble des cercles du plan centrés en un point de $\mathcal{K}$ et de rayon égal à la distance entre deux points de $\mathcal{K}$.

1. Intersection de droites et de cercles appartenant à $\mathcal{D}$ ou $\mathcal{C}$

Démontrer les résultats suivants :

a. Toute droite de $\mathcal{D}$ et tout cercle de $\mathcal{C}$ admettent au moins une équation cartésienne dont les coefficients sont dans **K**.

b. Le point commun à deux droites sécantes de $\mathcal{D}$ appartient à $\mathcal{K}$.

c. Un point commun à une droite de $\mathcal{D}$ et à un cercle de $\mathcal{C}$ est soit un point de l'ensemble $\mathcal{K}$, soit un point dont les coordonnées appartiennent toutes deux à une même extension quadratique de **K**.

d. Que peut-on dire d'un point commun à deux cercles de $\mathcal{C}$?

Points et réels constructibles

Soit $\mathcal{F}$ un ensemble fini de points du plan $\mathcal{P}$. Considérons toutes les droites passant par deux points de $\mathcal{F}$, et tous les cercles centrés en un point de $\mathcal{F}$ et de rayon égal à la distance de deux points quelconques de $\mathcal{F}$. Les points d'intersection de ces droites et cercles sont dits *points construits à partir de $\mathcal{F}$ à la règle et au compas* ou plus brièvement *points construits à partir de $\mathcal{F}$*.

Considérons deux points *O* et *I* du plan $\mathcal{P}$. Un point *M* du plan sera dit *constructible à partir des point*s *O* et *I* s'il existe une suite finie de points $M_1, M_2, \ldots, M_n = M$ telle que :

M_1 est construit à partir des deux points *O* et *I* ;

$\forall j \in \{2,3,\ldots,n\}$, M_j est construit à partir de l'ensemble $\{O,I,M_1,\ldots,M_{j-1}\}$

Dans la suite, seuls le point *O* et le point *I* seront donnés, *I* étant le point de coordonnées (1,0). Un point *M* constructible à partir des points *O* et *I* sera simplement dit *constructible*.

Un réel est dit *constructible* si c'est l'abscisse ou l'ordonnée d'un point constructible.

2. Exemples de points construits et de points constructibles

Démontrer, en justifiant par un dessin effectué à la règle et au compas, les propriétés suivantes :

a. Soit $\mathcal{F}$ un ensemble constitué de trois points *A*, *B* et *C* du plan $\mathcal{P}$, deux à deux distincts et non alignés. Démontrer que le quatrième sommet *D* du parallélogramme *ABCD* est un "point construit" à partir de l'ensemble $\mathcal{F}$.

En déduire que si *A* et Δ sont un point et une droite donnés de $\mathcal{P}$, la parallèle à Δ passant par *A* peut être construite à la règle et au compas.

b. Démontrer que le point *J*, symétrique du point *I* par rapport à *O*, est constructible, ainsi que le point *K* porté par l'axe *Oy* d'ordonnée égale à 1.

c. Soient α et β deux réels strictement positifs constructibles. Prouver que les réels $\alpha+\beta, \frac{\alpha}{\beta}$ et $\alpha\beta$ sont constructibles.

On admettra, à partir de là, que tous les points dont les coordonnées sont des entiers relatifs sont constructibles.

d. Soit α un réel strictement positif constructible. Démontrer que $\sqrt{\alpha}$ est constructible (on pourra considérer le cercle dont un diamètre est le segment joignant les points *J* et *A* (α,0).

Une suite finie $(\mathbf{K}_i)_{0\le i\le p}$ de sous-corps de **R** est dite avoir la propriété 'TEQ" (comme *tour d'extensions quadratiques*) si cette suite est croissante au sens de l'inclusion, si $\mathbf{K}_0$ est **Q**, et si pour tout entier *i*, le corps $\mathbf{K}_i$ est une extension quadratique du corps $\mathbf{K}_{i-1}$.

3. Une condition nécessaire et suffisante de constructibilité

a. Soit *M* un point constructible. Démontrer qu'il existe une suite finie $(\mathbf{K}_i)_{0\le i\le p}$ de sous-corps de **R** ayant la propriété 'TEQ" telle que les coordonnées de *M* soient éléments de $\mathbf{K}_p$.

b. Soit une suite finie $(\mathbf{K}_i)_{0\le i\le p}$ de sous-corps de **R** ayant la propriété 'TEQ". Démontrer par récurrence que les points du plan dont les coordonnées sont dans $\mathbf{K}_p$ sont constructibles.

4. Une condition nécessaire de constructibilité

a. Soient *F*, *G* et *H* trois sous-corps emboîtés du corps des réels. On suppose que *G* est un *F*-espace vectoriel de dimension finie *p*, et que *H* est un *G*-espace vectoriel de dimension finie *q*. Montrer que *H* est un *F*-espace vectoriel de dimension finie égale à *pq*.

b. Soit une suite finie $(\mathbf{K}_i)_{0\le i\le p}$ de sous-corps de **R** ayant la propriété 'TEQ". Quelle est la dimension du **Q**-espace vectoriel $\mathbf{K}_p$?

c. En déduire que si le réel α est constructible, alors α est un nombre algébrique sur **Q**, et deg(α,**Q**) est une puissance de 2.

Note historique : en particulier, un nombre algébrique aussi simple que $\sqrt[3]{2}$ n'est donc pas constructible à la règle et au compas : cela explique l'embarras des Grecs lorsque la Pythie leur demanda un autel deux fois plus grand dans le temple d'Appolon à Delphes. Dans le même ordre d'idée, cela prouve aussi que le fameux problème de la quadrature du cercle posé par ces mêmes Grecs n'a pas de solution : en effet, construire un carré de même aire qu'un cercle donné revient à construire le nombre $\sqrt{\pi}$. Or, Ferdinand LINDEMANN a démontré en 1882 que π, et donc aussi $\sqrt{\pi}$, est transcendant, ce qui lui interdit d'être constructible…

5. La réciproque de la question précédente est inexacte

On se propose ici de prouver qu'il existe des réels de degré 4 sur **Q**, et qui ne sont pas constructibles.

Envisageons le polynôme $P = X^4 - 4X + 2$.

a. Prouver que *P* possède exactement deux racines réelles r_1 et r_2, et que celles-ci sont irrationnelles.

b. On factorise *P* dans **R**[*X*] sous la forme : $P = (X^2 + aX + b)(X^2 + cX + d)$.

Prouver que le réel $t = b + d$ est racine d'une équation du troisième degré que l'on explicitera.

Déterminer le degré de *t* sur **Q**.

c. Prouver que *P* est irréductible sur **Q**, et en déduire le degré des r_i sur **Q**.

d. Démontrer que l'un au moins des deux réels r_1 et r_2 n'est pas constructible.

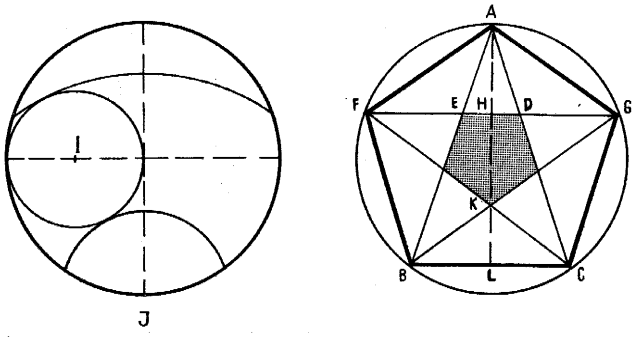
6. Polygones réguliers constructibles

Considérons les polygones réguliers à n côtés (n entier plus grand que 3) inscrits dans le cercle unité. Désignons par A_1, A_2, … , A_n leurs sommets. On supposera que le point A_1 est confondu avec le point I, et que A_2 est celui de ces points dont les coordonnées sont $\left(\cos\frac{2\pi}{n}, \sin\frac{2\pi}{n}\right)$.

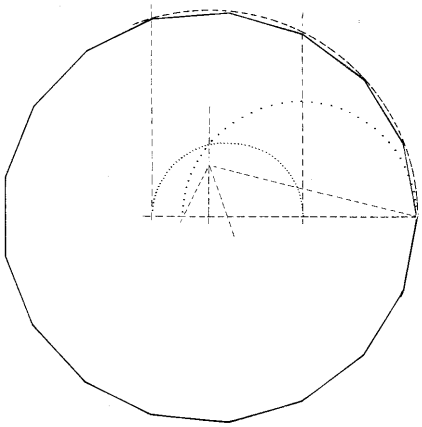
Quels sont, parmi les polygones réguliers à n côtés (pour $3 \le n \le 10$), ceux qui sont constructibles ?

Note historique (deuxième) : A la suite des travaux de Gauss qui, à dix-neuf ans, a prouvé la constructibilité du polygone régulier à 17 côtés, on a pu déterminer une condition nécessaire et suffisante pour que le polygone régulier à n côtés soit constructible : il faut et il suffit que n s'écrive $2^p F_1 F_2 \dots F_k$ où p et k sont des entiers quelconques, les F_i étant des nombres premiers de Fermat deux à deux distincts. Cela explique que le polygone à 17 côtés, mais aussi les polygones à 257 et 65537 côtés, soient constructibles (une construction de ce dernier existe ; elle est monstrueuse…)

Le pentagone régulier



L'heptadécagone régulier



Pour mieux voir, consulter : http://www.ac-poitiers.fr/math/prof/resso/ima/sar1/