Agrégation Interne

Produits infinis de fonctions, fonction gamma

Ce problème est en relation avec les leçons d'oral suivantes :

— 267 : La fonction Gamma ;
— 223 : Intégrale d'une fonction dépendant d'un paramètre. Propriétés, exemples et applications ;
— 221 : Intégrale impropre d'une fonction continue sur un intervalle de $\mathbb{R}$ (l'intégration sur un segment étant supposée connue). Exemples ;
— 217 : Fonctions convexes d'une variable réelle. Applications.

Il est l'occasion de revoir les points de cours suivant :

— suites, séries, produits infinis ;
— suites, séries et produits infinis de fonctions, théorèmes de dérivation terme à terme d'une série de fonctions ;
— intégrales dépendant d'un paramètre ;
— fonction gamma ;
— convexité.

Ce problème est aussi en relation avec l'épreuve 2 de l'agrégation interne 2015.

On pourra consulter les ouvrages suivants.

— E. Artin. *The Gamma function.* Holt, Rinehart and Winston, Inc. New York (1964).
— A. Chambert-Loir, S. Fermigier. *Analyse 2.* Masson (1995).
— J. F. Dantzer. *Mathématiques pour l'agrégation.* Vuibert (2016).
— X. Gourdon. *Les Maths en tête. Analyse.* Ellipses (1994).
— W. J. Kaczor, M. T. Nowak. *Problems in mathematical analysis. Vol. I. II et III.* American Mathematical Society (2001).
— J. P. Ramis, A. Warusfel. *Mathématiques tout en un pour la licence. Niveau L2.* Dunod. (2007).
— A.W. Roberts, D.E. Varberg. *Convex functions.* Academic Press (1973).
— J. E. Rombaldi. *Éléments d'analyse réelle.* EDP Sciences (2004).
— W. Rudin. *Principes d'analyse mathématique.* Edisciences (1995).

Rappelons quelques versions pratiques des théorèmes classiques sur :

— la continuité et la dérivation d'une fonction définie comme intégrale dépendant d'un paramètre ;
— l'intervertion d'une intégrale et d'une sommation infinie ;
— l'intégration d'une fonction de deux variables (théorème de Fubini) ;
— l'intégration par changement de variables.

On rappelle qu'une fonction continue par morceaux d'un intervalle réel dans $\mathbb{C}$ est dite intégrable si, et seulement si, l'intégrale impropre de f sur I est absolument convergente.

Théorème 1. *Soient I, J deux intervalles réels non réduits à un point, $f : I \times J \to \mathbb{C}$ une fonction continue et $\varphi : J \to \mathbb{R}^+$ une fonction continue par morceaux et intégrable sur J telle que :*

$$\forall (x,t) \in I \times J,\ |f(x,t)| \leq \varphi(t)$$

Dans ces condition, pour tout $x \in I$, la fonction $t \mapsto f(x,t)$ est intégrable sur J et la fonction $x \mapsto \int_J f(x,t)\,dt$ est continue sur I.

Théorème 2. *Soient I, J deux intervalles réels non réduits à un point, $f : I \times J \to \mathbb{C}$ une fonction continue admettant une dérivée partielle par rapport à x en tout point (x,t) de $I \times J$ telle que pour tout réel $x \in I$ la fonction $t \mapsto f(x,t)$ est intégrable sur J et la fonction $t \mapsto \frac{\partial f}{\partial x}(x,t)$ est continue par morceaux sur J.*
S'il existe une fonction $\varphi : J \to \mathbb{R}^+$ continue par morceaux et intégrable sur J telle que :

$$\forall (x,t) \in I \times J,\ \left|\frac{\partial f}{\partial x}(x,t)\right| \leq \varphi(t)$$

alors la fonction $g : x \mapsto \int_J f(x,t)\,dt$ est dérivable sur I avec :

$$g'(x) = \int_J \frac{\partial f}{\partial x}(x,t)\,dt$$

Si de plus la fonction $\frac{\partial f}{\partial x}$ est continue sur $I \times J$ (ou si pour tout $t \in J$, la fonction $x \mapsto \frac{\partial f}{\partial x}(x,t)$ est continue sur I), alors la fonction φ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur I.

Théorème 3. *Si $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite de fonctions continues par morceaux, à valeurs complexes et intégrables sur un intervalle I telle que la série de fonctions $\sum f_n$ converge simplement vers une fonction f continue par morceaux sur I, alors la fonction f est intégrable sur I si la série $\sum \int_I |f_n(x)|\,dx$ est convergente et dans ce cas, on a $\int_I f(x)\,dx = \sum_{n=0}^{+\infty} \int_I f_n(x)\,dx$.*

Théorème 4. (Fubini) *Soient I, J deux intervalles réels non réduits à un point et $f : I \times J \to \mathbb{C}$ une fonction continue telle que :*

— *pour tout* $x \in I$, *la fonction* $t \mapsto f(x,t)$ *est intégrable sur* J *;*

— *la fonction* $x \mapsto \displaystyle\int_J |f(x,t)|\, dt$ *est intégrable sur* I.

Dans ces condition, la fonction f *est intégrable sur* $I \times J$ *et :*

$$\iint_{I \times J} f(x,t)\, dt dx = \int_I \left(\int_J f(x,t)\, dt \right) dx$$

Dans le théorème de Fubini, on peut permuter les rôles de x et t. D'un point de vue pratique, pour $f : I \times J \to \mathbb{C}$ continue telle que les intégrales $\displaystyle\int_I \left(\int_J |f(x,t)|\, dt \right) dx$ et $\displaystyle\int_J \left(\int_I |f(x,t)|\, dx \right) dt$ aient un sens, on a :

$$\iint_{I \times J} f(x,t)\, dt dx = \int_I \left(\int_J f(x,t)\, dt \right) dx = \int_J \left(\int_I f(x,t)\, dx \right) dt$$

Théorème 5. (Changement de variables) *Soient* I, J *deux intervalles réels non réduits à un point et* $\varphi : I \to J$ *un* $\mathcal{C}^1$*-difféomorphisme croissant. Une fonction continue* $f : J \to \mathbb{C}$ *est intégrable sur* J *si, et seulement si, la fonction* $(f \circ \varphi)\, \varphi'$ *est intégrable sur* I *et dans ce cas, on a :*

$$\int_J f(x)\, dx = \int_I f(\varphi(t))\, \varphi'(t)\, dt$$

– I – Fonctions logarithmiquement convexes

Soit I un intervalle réel non réduit à un point. Une fonction $f : I \to \mathbb{R}^{+,*}$ est dite logarithmiquement convexe si la fonction $\ln(f)$ est convexe.

1. Montrer que la limite d'une suite de fonctions convexes de I dans $\mathbb{R}$ est convexe.
2. Soit $f : \mathbb{R}^{+,*} \to \mathbb{R}$ une fonction convexe. Montrer que, pour tout réel $\alpha > 0$, les fonctions $x \mapsto f(x+\alpha)$ et $x \mapsto f(\alpha x)$ sont convexes.
3. Montrer qu'une fonction $f : I \to \mathbb{R}^{+,*}$ logarithmiquement convexe est convexe.
4. Soit $f : I \to \mathbb{R}^{+,*}$. Montrer que les assertions suivantes sont équivalentes :
   (a) f est logarithmiquement convexe ;
   (b) pour tout réel $\alpha > 0$ la fonction $x \mapsto \alpha^x f(x)$ est convexe ;
   (c) pour tous réels x, y dans I et tout réel $\lambda \in [0,1]$, on a :
   $$f((1-\lambda)x + \lambda y) \leq (f(x))^{1-\lambda} (f(y))^{\lambda}$$
5. Soit $f : I \to \mathbb{R}$ une fonction convexe. Montrer que pour tout segment $[a,b] \subset I$ et tout $x \in [a,b]$, on a $f(x) \leq \max(f(a), f(b))$ (en fait, une fonction convexe sur I est bornée sur tout segment $[a,b] \subset I$).
6. Montrer qu'une fonction $f : \mathbb{R}^{+,*} \to \mathbb{R}$ convexe et T-périodique (avec $T > 0$) est constante.

– II – Un produit infini de fonctions

À toute suite réelle $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ on associe la suite $(P_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ de ses produits partiels définie par :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*,\ P_n = \prod_{k=1}^{n} u_k$$

On dit que le produit infini $\prod u_n$ est convergent si la suite $(P_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est convergente et on note alors $\prod_{n=1}^{+\infty} u_n = \lim_{n\to+\infty} \left(\prod_{k=1}^{n} u_k \right)$ la limite de cette suite. Dans le cas où cette limite est non nulle, on dit que le produit infini est strictement convergent.

1. Justifier la convergence de la suite $(\gamma_n)_{n\in\mathbb{N}^*} = \left(\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} - \ln(n) \right)_{n\in\mathbb{N}^*}$. La limite de cette suite est notée γ (constante γ d'Euler).
2. Soit $(\varphi_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ la suite de fonctions définie sur $\mathbb{R}^+$ par :
   $$\forall n \in \mathbb{N}^*,\ \forall x \in \mathbb{R}^+,\ \varphi_n(x) = \frac{e^{\frac{x}{n}}}{1 + \frac{x}{n}}$$
   Montrer que :
   (a) pour tout réel $x \in \mathbb{R}^+$, le produit infini $\prod \varphi_n(x)$ est convergent vers un réel strictement positif $\varphi(x)$;

(b) $\varphi(1) = e^{\gamma}$;

(c) la fonction φ est indéfiniment dérivable sur $\mathbb{R}^{+}$;

(d) la fonction φ est logarithmiquement convexe.

3. Soit $(\theta_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ la suite de fonctions définie sur $\mathbb{R}^{+,*}$ par :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*,\ \forall x \in \mathbb{R}^{+,*},\ \theta_n(x) = \frac{n!n^x}{x(x+1)\cdots(x+n)}$$

Montrer que :

(a) cette suite de fonctions converge sur $\mathbb{R}^{+,*}$ vers la fonction $\theta : x \mapsto \dfrac{e^{-\gamma x}}{x}\varphi(x)$;

(b) $\theta(1) = 1$;

(c) $\forall x \in \mathbb{R}^{+,*}$, $\theta(x+1) = x\theta(x)$;

(d) θ est logarithmiquement convexe.

– III – Théorème de Bohr-Mollerup

On se donne une fonction $f : \mathbb{R}^{+,*} \to \mathbb{R}^{+,*}$ qui vérifie les trois conditions :

(i) $f(1) = 1$;

(ii) $\forall x \in \mathbb{R}^{+,*}$, $f(x+1) = xf(x)$;

(iii) f est logarithmiquement convexe.

La fonction θ définie en **II.3** par :

$$\forall x \in \mathbb{R}^{+,*},\ \theta(x) = \lim_{n\to+\infty} \frac{n!n^x}{x(x+1)\cdots(x+n)} = \frac{e^{-\gamma x}}{x}\prod_{n=1}^{+\infty}\frac{e^{\frac{x}{n}}}{1+\frac{x}{n}}$$

vérifie ces conditions.

1. Montrer que la fonction $h = \dfrac{f}{\theta}$ est 1-périodique sur $\mathbb{R}^{+,*}$.
2. Montrer que la fonction h est convexe sur $\mathbb{R}^{+,*}$.
3. Déduire de ce qui précède que $f = \theta$.

Nous avons donc montré le résultat suivant.

Théorème 6. (Bohr-Mollerup) : *La fonction θ est l'unique fonction de $\mathbb{R}^{+,*}$ dans $\mathbb{R}^{+,*}$ qui vérifie les conditions (i), (ii) et (iii).*

– IV – Fonction gamma d'Euler

On rappelle que la fonction eulérienne (de deuxième espèce) gamma est définie sur $\mathbb{R}^{+,*}$ par :

$$\forall x \in \mathbb{R}^{+,*},\ \Gamma(x) = \int_0^{+\infty} t^{x-1} e^{-t} dt$$

et que la fonction eulérienne bêta (de premières espèce) est définie sur $(\mathbb{R}^{+,*})^2$ par :

$$\forall (x,y) \in \left(\mathbb{R}^{+,*}\right)^2,\ B(x,y) = \int_0^1 t^{x-1} (1-t)^{y-1} dt$$

On admet que pour tout réel x, on a :

$$\sin(x) = x \prod_{n=1}^{+\infty} \left(1 - \frac{x^2}{n^2\pi^2}\right) \tag{1}$$

(voir le problème sur le développement de $\dfrac{\sin(z)}{z}$ en produit infini).

1. Justifier la définition de la fonction Γ sur $\mathbb{R}^{+,*}$ et de la fonction B sur $(\mathbb{R}^{+,*})^2$.
2. Montrer que la fonction Γ vérifie les conditions suivantes :
   (i) $\Gamma(1) = 1$;
   (ii) $\forall x \in \mathbb{R}^{+,*}$, $\Gamma(x+1) = x\Gamma(x)$;
   (iii) Γ est logarithmiquement convexe.
3. Déduire de la question précédente que pour tout réel $x > 0$, on a :

$$\Gamma(x) = \int_0^{+\infty} t^{x-1} e^{-t} dt = \lim_{n\to+\infty} \frac{n! n^x}{x(x+1)\cdots(x+n)} = \frac{e^{-\gamma x}}{x} \prod_{n=1}^{+\infty} \frac{e^{\frac{x}{n}}}{1+\frac{x}{n}}$$

   La première formule est due à Gauss et la seconde à Weierstrass.
4. Montrer que :
   (a) pour tout entier naturel n, on a $\Gamma(n+1) = n!$;
   (b) la fonction gamma est continue sur $\mathbb{R}^{+,*}$, $\Gamma(x) \underset{x\to 0^+}{\backsim} \dfrac{1}{x}$ et en particulier $\lim\limits_{x\to 0^+} \Gamma(x) = +\infty$;
   (c) pour tout réel $x \in \,]0,1[$, on a $\Gamma(x)\Gamma(1-x) = \dfrac{\pi}{\sin(\pi x)}$ (formule des compléments) ;
   (d) $\Gamma\left(\dfrac{1}{2}\right) = \sqrt{\pi}$ et en déduire que $\displaystyle\int_0^{+\infty} e^{-t^2} dt = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$;
   (e) pour tout entier naturel n, $\Gamma\left(n + \dfrac{1}{2}\right) = \dfrac{(2n)!}{2^{2n} n!}\sqrt{\pi}$;
   (f) pour tout réel strictement positif x, on a :

$$\Gamma(x) = \frac{2^{x-1}}{\sqrt{\pi}} \Gamma\left(\frac{x}{2}\right) \Gamma\left(\frac{x+1}{2}\right)$$

   (formule de Legendre) ;

(g) la fonction gamma est indéfiniment dérivable sur $\mathbb{R}^{+,*}$ avec pour tout entier naturel non nul n et tout réel strictement positif x :

$$\Gamma^{(n)}(x) = \int_0^{+\infty} (\ln(t))^n t^{x-1} e^{-t} dt$$

(h) pour tout réel strictement positif x, on a :

$$\frac{\Gamma'(x)}{\Gamma(x)} = -\gamma - \frac{1}{x} + x \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n(n+x)}$$

(La fonction $\psi = \dfrac{\Gamma'}{\Gamma}$ est la fonction digamma.) ;

(i) $\Gamma'(1) = -\gamma$ et $\Gamma'(n) = (n-1)! \left(-\gamma + \sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{k} \right)$ pour tout entier $n \geq 2$;

(j) $\Gamma'\left(\frac{1}{2}\right) = -\sqrt{\pi}(\gamma + 2\ln(2))$ et pour tout entier naturel non nul n, on a :

$$\Gamma'\left(n + \frac{1}{2}\right) = \frac{(2n)!}{2^{2n} n!} \sqrt{\pi} \left(2 \left(\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{2k-1} - \ln(2) \right) - \gamma \right)$$

5. On se donne deux réels x, y strictement positifs et on se propose de démontrer de trois façons l'égalité $B(x,y) = \dfrac{\Gamma(x)\Gamma(y)}{\Gamma(x+y)}$.

(a) Montrer cette égalité en utilisant le théorème de Bohr-Mollerup.

(b) Montrer que $\Gamma(x)\Gamma(y) = \int_0^{+\infty} \left(\int_0^w u^{x-1}(w-u)^{y-1} du \right) e^{-w} dw$, puis en déduire l'égalité annoncée.

(c) Montrer que :

$$\begin{aligned} B(x,y) &= 2\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^{2x-1}(\theta)\sin^{2y-1}(\theta)\, d\theta \text{ et } \Gamma(x)\Gamma(y) \\ &= 4\iint_{(\mathbb{R}^{+,*})^2} e^{-\left(u^2+v^2\right)} u^{2x-1} v^{2y-1} du dv \end{aligned}$$

puis en déduire l'égalité annoncée.

– V – Exemples d'intégrales liées à la fonction Γ

1.

(a) Montrer que, pour tout $(x,y) \in (\mathbb{R}^{+,*})^2$, on a :

$$\int_0^{+\infty} \frac{t^{x-1}}{(1+t)^{x+y}} dt = \frac{\Gamma(x)\Gamma(y)}{\Gamma(x+y)}$$

(b) En déduire que, pour tout $x \in \left]0,1\right[$, on a :

$$\int_0^{+\infty} \frac{t^{x-1}}{1+t} dt = \frac{\pi}{\sin(\pi x)} \quad \text{et} \quad \int_0^{\frac{\pi}{2}} \tan^{2x-1}(\theta)\, d\theta = \frac{\pi}{2\sin(\pi x)}$$

2.

(a) Montrer que, pour tout réel $x > 0$, l'intégrale $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \ln(t)\, t^{2x-1} dt$ est convergente et donner sa valeur.

(b) Montrer que, pour tout réel $x > 0$, l'intégrale $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \ln(\sin(t)) \sin^{2x-1}(t)\, dt$ est convergente.

(c) Montrer que la fonction $\varphi : x \mapsto \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{2x-1}(t)\, dt$ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}^{+,*}$, puis en déduire que, pour tout réel $x > 0$, on a :

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \ln(\sin(t)) \sin^{2x-1}(t)\, dt = \frac{\sqrt{\pi}}{4} \frac{\Gamma\left(x+\frac{1}{2}\right)\Gamma'(x) - \Gamma'\left(x+\frac{1}{2}\right)\Gamma(x)}{\Gamma^2\left(x+\frac{1}{2}\right)}$$

(d) En déduire les valeurs des intégrales $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \ln(\sin(t))\, dt$ et $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \ln(\sin(t)) \sin^{2n}(t)\, dt$ pour tout entier naturel n.