Agrégation Interne

Développement de $\dfrac{\sin(z)}{z}$ en produit infini

Ce problème est l'occasion de revoir les points de cours suivant :

— suites, séries, produits infinis ;
— suites, séries et produits infinis de fonctions, théorèmes de dérivation terme à terme d'une série de fonctions ;
— séries de Fourier, théorème de Dirichlet.

On pourra consulter les ouvrages suivants.

— X. Gourdon. *Les Maths en tête. Analyse.* Ellipses (1994).
— W. J. Kaczor, M. T. Nowak. *Problems in mathematical analysis. Vol. I.* American Mathematical Society (2001).
— J. P. Ramis, A. Warusfel. *Mathématiques tout en un pour la licence. Niveau L2.* Dunod. (2007).
— G. Valiron. *Théorie des fonctions.* Masson (1966).

À toute suite de nombres complexes $(u_n)_{n\geq n_0}$ on associe la suite $(P_n)_{n\geq n_0}$ de ses produits partiels définie par :

$$\forall n \geq n_0,\ P_n = \prod_{k=n_0}^{n} u_k$$

On dit que le produit infini $\prod u_n$ est convergent si la suite $(P_n)_{n\geq n_0}$ est convergente et on note alors $\prod\limits_{n=n_0}^{+\infty} u_n = \lim\limits_{\substack{n\to+\infty \\ n\geq n_0}} \left(\prod\limits_{k=n_0}^{n} u_k\right)$ la limite de cette suite. Dans le cas où cette limite est non nulle, on dit que le produit infini est strictement convergent.

– I – Développement en produit infini de $\dfrac{\sin(x)}{x}$ pour x réel

1. Montrer que, pour tout réel x, le produit infini $\prod \left(1 - \dfrac{x^2}{n^2\pi^2}\right)$ est convergent, la convergence étant stricte pour $x \in \mathbb{R} \setminus \pi\mathbb{Z}$.
2.
   (a) Montrer que, pour tout entier naturel n, on a :

   $$\sum_{k=0}^{n} \binom{2n+1}{2k+1} = \sum_{k=0}^{n} \binom{2n+1}{2k} = 2^{2n}$$

   (b) Montrer que, pour tout entier naturel n, il existe un polynôme P_n de degré n tel que $\sin((2n+1)t) = \sin(t) P_n(\sin^2(t))$ pour tout réel t. On vérifiera que le coefficient dominant de P_n est $\alpha_n = (-1)^n 2^{2n}$ et que $P_n(0) = 2n+1$ (*on peut utiliser la relation :* $\sin((2n+1)t) = \Im\left(e^{i(2n+1)t}\right)$).

   (c) Déterminer les racines du polynôme P_n, pour tout entier naturel non nul n et en déduire que, pour tout réel t, on a :

   $$P_n(t) = (2n+1) \prod_{k=1}^{n} \left(1 - \frac{t}{\sin^2\left(\frac{k\pi}{2n+1}\right)}\right)$$

   (d) En déduire que pour tout entier naturel non nul n et tout réel x, on a :

   $$\sin(x) = (2n+1)\sin\left(\frac{x}{2n+1}\right) \prod_{k=1}^{n} \left(1 - \frac{\sin^2\left(\frac{x}{2n+1}\right)}{\sin^2\left(\frac{k\pi}{2n+1}\right)}\right)$$

3. On se fixe un réel x dans $\mathbb{R} \setminus \pi\mathbb{Z}$ et pour $n > m$ dans $\mathbb{N}^*$, on note :

   $$P_{m,n} = \prod_{k=1}^{m} \left(1 - \frac{\sin^2\left(\frac{x}{2n+1}\right)}{\sin^2\left(\frac{k\pi}{2n+1}\right)}\right),\ Q_{m,n} = \prod_{k=m+1}^{n} \left(1 - \frac{\sin^2\left(\frac{x}{2n+1}\right)}{\sin^2\left(\frac{k\pi}{2n+1}\right)}\right)$$

   (a) Montrer que, pour tout entier $m \in \mathbb{N}^*$ les suites $(P_{m,n})_{n>m}$ et $(Q_{m,n})_{n>m}$ sont convergentes et en notant respectivement P_m et Q_m les limites de ces suites, vérifier que ces limites sont non nulles et que l'on a $\dfrac{\sin(x)}{x} = P_m Q_m$ pour tout $m \in \mathbb{N}^*$.

(b) Montrer que pour $m \in \mathbb{N}^*$ assez grand et tout $n > m$, on a :

$$\prod_{k=m+1}^{n} \left(1 - \frac{x^2}{4k^2}\right) < Q_{m,n} < 1$$

et en déduire que $\lim\limits_{m \to +\infty} Q_m = 1$.

(c) Déduire de ce qui précède que, pour tout réel x, on a :

$$\sin(x) = x \prod_{n=1}^{+\infty} \left(1 - \frac{x^2}{n^2\pi^2}\right) \tag{1}$$

4. Montrer que pour tout réel $x \in \left]0, \pi\right[$, on a :

$$\operatorname{cotan}(x) = \frac{1}{x} - 2x \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2\pi^2 - x^2}$$

5. On peut retrouver le développement (1) en utilisant le développement en série de Fourier de la fonction 2π-périodique $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ telle que :

$$\forall t \in [-\pi, \pi],\ f(t) = \cos(\alpha t)$$

où α est donné dans $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Z}$.

(a) Montrer que la fonction f est développable en série de Fourier et calculer ses coefficients de Fourier.

(b) En déduire que pour tout réel $x \in \left]0, \pi\right[$, on a :

$$\operatorname{cotan}(x) = \frac{1}{x} - 2x \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2\pi^2 - x^2}$$

(c) En déduire le développement (1).

– II – Développement en produit infini de $\dfrac{\sin(z)}{z}$ pour z complexe

Le développement en produit infini (1) est en fait valable pour tout nombre complexe z.

On rappelle que les fonctions exponentielle cosinus, sinus, cosinus hyperbolique et sinus hyperbolique sont définies sur $\mathbb{C}$ par :

$$e^z = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{n!} z^n,\ \cos(z) = \frac{e^{iz} + e^{-iz}}{2},\ \sin(z) = \frac{e^{iz} - e^{-iz}}{2i}$$

$$\operatorname{ch}(z) = \frac{e^z + e^{-z}}{2},\ \operatorname{sh}(z) = \frac{e^z - e^{-z}}{2}$$

1. Soit $(u_{n,k})_{(n,k)\in\mathbb{N}^2}$ une suite double de nombres complexes telle que, pour tout entier $k \in \mathbb{N}$, la suite $(u_{n,k})_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers un nombre complexe u_k. Montrer que s'il existe une suite $(\alpha_k)_{n\in\mathbb{N}}$ de réels positifs ou nuls telle que la série $\sum \alpha_k$ soit convergente et $|u_{n,k}| \leq \alpha_k$ pour tout $(n,k) \in \mathbb{N}^2$, alors pour tout entier $n \in \mathbb{N}$, la série $\sum_{k\in\mathbb{N}} u_{n,k}$ converge absolument vers un nombre complexe S_n, la série $\sum_{k\in\mathbb{N}} u_k$ converge absolument vers un nombre complexe S et la suite $(S_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers S, soit :

$$\lim_{n\to+\infty} \sum_{k=0}^{+\infty} u_{n,k} = \sum_{k=0}^{+\infty} \lim_{n\to+\infty} u_{n,k}$$

(théorème de convergence dominée pour les séries numériques).

2. On désigne par $(S_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ la suite de fonctions définies sur $\mathbb{C}$ par :

$$S_n(z) = \left(1 + \frac{z}{n}\right)^n$$

   (a) En utilisant le théorème de convergence dominée pour les séries numériques, montrer que pour tout nombre complexe z, la suite $(S_n(z))_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge vers e^z.

   (b) On propose ici une deuxième démonstration du résultat précédent.

      i. Montrer que, pour tout réel positif x, la suite $(S_n(x))_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge vers e^x.

      ii. Montrer que, pour tout nombre complexe z, la suite $(S_n(z))_{n\in\mathbb{N}^*}$ est de Cauchy, puis que sa limite est égale à e^z.

3. On désigne par $(P_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ la suite de fonctions polynomiales définie sur $\mathbb{C}$ par :

$$P_n(z) = \frac{1}{2i}\left(\left(1 + \frac{iz}{2n+1}\right)^{2n+1} - \left(1 - \frac{iz}{2n+1}\right)^{2n+1}\right)$$

   (a) Montrer que, pour tout nombre complexe z, on a :

$$\lim_{n\to+\infty} P_n(z) = \sin(z)$$

   (b) Vérifier que, pour tout entier naturel non nul n, la fonction polynomiale P_n est impaire de degré $2n+1$ en précisant les coefficients de z et de z^{2n+1}.

   (c) Déterminer les racines du polynôme P_n, puis en déduire que :

$$P_n(z) = z\prod_{k=1}^{n}\left(1 - \frac{z^2}{(2n+1)^2 \tan^2\left(\frac{k\pi}{2n+1}\right)}\right)$$

   On a donc pour tout nombre complexe z :

$$\sin(z) = z \lim_{n\to+\infty} \prod_{k=1}^{n}\left(1 - \frac{z^2}{(2n+1)^2 \tan^2\left(\frac{k\pi}{2n+1}\right)}\right)$$

4. Soit $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de nombres complexes telle que la série $\sum v_n$ soit absolument convergente.

   (a) Montrer que la suite $(P_n)_{n\in\mathbb{N}} = \left(\prod_{k=0}^{n}(1+v_k)\right)_{n\in\mathbb{N}}$ des produits partiels du produit infini $\prod(1+v_n)$ est bornée.

   (b) Montrer que la série $\sum(P_n - P_{n-1})$ est absolument convergente et en déduire que le produit infini $\prod(1+v_n)$ est convergent.

5. Montrer que, pour tout nombre complexe z, le produit infini $\prod\left(1-\frac{z^2}{n^2\pi^2}\right)$ est convergent.

6. Soit $(v_{n,k})_{(n,k)\in\mathbb{N}^2}$ une suite double de nombres complexes telle que, pour tout entier $k\in\mathbb{N}$, la suite $(v_{n,k})_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers un nombre complexe v_k. Montrer que s'il existe une suite $(\alpha_k)_{n\in\mathbb{N}}$ de réels positifs ou nuls telle que la série $\sum\alpha_k$ soit convergente et $|v_{n,k}|\leq\alpha_k$ pour tout $(n,k)\in\mathbb{N}^2$, alors pour tout entier $n\in\mathbb{N}$, le produit infini $\prod\limits_{k\in\mathbb{N}}(1+v_{n,k})$ converge vers un nombre complexe T_n, le produit infini $\prod\limits_{k\in\mathbb{N}}(1+v_k)$ converge vers un nombre complexe T et la suite $(T_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers T, soit :

$$\lim_{n\to+\infty}\prod_{k=0}^{+\infty}(1+v_{n,k}) = \prod_{k=0}^{+\infty}\left(1+\lim_{n\to+\infty}v_{n,k}\right)$$

   (théorème de convergence dominée pour les produits infinis).

7. Déduire de ce qui précède que, pour tout nombre complexe z, on a :

$$\sin(z) = z\prod_{k=1}^{+\infty}\left(1-\frac{z^2}{k^2\pi^2}\right) \tag{2}$$

8. Montrer que :

$$\frac{\pi}{2} = \prod_{k=1}^{+\infty}\frac{4k^2}{4k^2-1}$$

   (formule de Wallis).

9.

   (a) Montrer que pour tout nombre complexe $t\in\mathbb{C}\setminus\left(\frac{1}{2}+\mathbb{Z}\right)$ et tout entier naturel k, on a :

$$\frac{4k^2}{4k^2-1}\left(1-\frac{(2t+1)^2}{4k^2}\right) = \frac{1-\frac{2t}{2k-1}}{1-\frac{2t}{2k+1}}\left(1-\frac{4t^2}{(2k+1)^2}\right)$$

   (b) En déduire que pour tout nombre complexe z, on a :

$$\cos(z) = \prod_{k=0}^{+\infty}\left(1-\frac{4z^2}{(2k+1)^2\pi^2}\right) = \prod_{k=0}^{+\infty}\left(1-\frac{z^2}{\left(\frac{\pi}{2}+k\pi\right)^2}\right)$$

(c) Montrer que pour tout réel $x \in \left]0, \frac{\pi}{2}\right[$, on a :

$$\tan(x) = 8\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x}{(2n+1)^2 \pi^2 - 4x^2}$$

10. Montrer que pour tout nombre complexe z, on a :

$$\operatorname{sh}(z) = z\prod_{k=1}^{+\infty}\left(1 + \frac{z^2}{k^2\pi^2}\right) \text{ et } \operatorname{ch}(z) = \prod_{k=0}^{+\infty}\left(1 + \frac{4z^2}{(2k+1)^2\pi^2}\right)$$

11. Montrer que pour tout réel x strictement positif, on a :

$$\frac{1}{\operatorname{th}(x)} = 2\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x}{n^2\pi^2 + x^2}$$

et que pour tout réel x, on a :

$$\operatorname{th}(x) = 8\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x}{(2n+1)^2 \pi^2 + 4x^2}$$