Université Joseph Fourier **Année 2015-2016**

M1 Enseignement

Exercice 1. *Soit $(X_n)_{n\in\mathbf{N}}$ une suite de variables alétoires discrètes à valeurs dans $(E,\mathscr{E})$ et N une variable aléatoire à valeurs dans **N** naturelles définies sur espace probabilisable $(\Omega,\mathscr{A})$. On définit une fonction Y par*

$$\forall\omega\in\Omega, Y(\omega) = X_{N(\omega)}(\omega)$$

Montrer que Y est une variable aléatoire discrète.

Exercice 2. *Banach, qui était fumeur, avait deux boîtes d'allumettes, l'une dans la poche gauche, l'autre dans la poche droite. Chaque fois qu'il allumait sa pipe, il puisait au hasard (avec équiprobabilité) dans l'une des boîtes. Les deux boîtes contiennent initialement le même nombre n d'allumettes.*

Quel est, en moyenne, le nombre d'allumettes restant, dans l'autre boîte lorsqu'il veut prendre une allumette et qu'il se rend compte que la boîte qu'il vient d'ouvrir est vide ?

Exercice 3. *On considère une urne contenant $N = N_1 + N_2$ boule, N_1 étant rouges et N_2 blanches. On tire $n \leq N$ boules (on utilise le modèle équiprobable). Déterminer, pour tout entier $k \in [\![0,n]\!]$ la probabilité p_k d'obtenir k boules blanches.*

Déterminer la limite de cette probabilité lorsque $N_1, N_2 \to +\infty$ avec $N_2/N \to p$. (on pourra utiliser la formule de Stirling : $n! \sim \sqrt{2\pi n}\left(\frac{n}{e}\right)^n$).

Exercice 4. *On vous propose le jeu suivant : vous lancez une pièce ; si vous obtenez pile, le jeu s'arrête et vous gagnez 2€ ; sinon vous rejouez et si vous obtenez pile, le jeu s"arrête et vous gagnez 4€ ; sinon vous continuez jusqu'à ce que vous ayez obtenu pile pour la première fois ; si c'est au n -ième lancer, vous gagnez 2^n € et le jeu s'arrête. Combien êtes-vous prêt à payer pour participer à un tel jeu ?*

Exercice 5. *Soit X_1 et X_2 deux variables aléatoires définies sur un espace probabilisé $(\Omega,\mathscr{A},\mathbf{P})$ indépendantes suivant une loi de Bernoulli de paramètre $p \in]0,1[$.*

Déterminer la loi de $Y = \max\{X_1,X_2\}$, la loi de $Z = \min\{X_1,X_2\}$ ainsi que leurs fonctions de répartition.

Exercice 6. *([**?**] pp 165-167) Soit (X_n) une suite de variables aléatoires de Bernoulli définies sur $(\Omega,\mathscr{A},\mathbf{P})$ indépendantes de paramètre $p \in]0,1[$. On note Z_1 la variable aléatoire donnant le rang du premier succès.*

1. *Déterminer la loi de Z_1, son espérance et sa variance.*
2. *On note Z_2 la variable aléatoire donnant le rang du second succès. Déterminer sa loi, son espérance et sa variance.*
3. *Plus généralement, pour tout entier $n \geq 1$, on note Z_n le rang du n -ième succès et*

$$A_n = Z_n - Z_{n-1}.$$

Montrer que pour $n \geq 2$ les variables $A_1,\cdots,A_n$ sont indépendantes et suivent une même loi que l'on déterminera.

Exercice 7. *Soient X_1 et X_2 deux variables aléatoires à valeurs réelles. On suppose que X_i suit une loi de Poisson de paramètre λ_i et que ces deux variables sont indéoendantes. Déterminer la loi de $X_1 + X_2$. On pourra remarquer que $(X_1 + X_2 = k)$ est réunion disjointe des $(X_1 = p)\cap(X_2 = k-p)$ pour $p \in \{0,\cdots,k\}$.*

Exercice 8. *1. Soit X une variable aléatoire à valeurs dans $\mathbf{N}$.*

(a) Montrer que, pour tout $n \in \mathbf{N}^*$, on a :

$$\sum_{k=0}^{n} k\mathbf{P}(X=k) = \sum_{k=0}^{n-1} \mathbf{P}(X>k) - n\mathbf{P}(X>n).$$

(b) On suppose que $\sum_{k=0}^{+\infty} \mathbf{P}(X>k)$ converge. Démontrer que X admet une espérance.

(c) Réciproquement, on suppose que X admet une espérance. Démontrer alors que la suite

$$\big(n\mathbf{P}(X>n)\big)_n$$

tend vers 0, puis que la série $\sum_{k=0}^{+\infty} \mathbf{P}(X>k)$ converge, et enfin que

$$\mathbf{E}(X) = \sum_{k=0}^{+\infty} \mathbf{P}(X>k).$$

2. Application : on dispose d'une urne contenant N boules indiscernables au toucher numérotées de 1 à N . On effectue, à partir de cette urne, n tirages successifs d'une boule, avec remise, et on note X le plus grand nombre obtenu.

(a) Que vaut $\mathbf{P}(X \le k)$? En déduire la loi de X .

(b) A l'aide des questions précédentes, donner la valeur de $\mathbf{E}(X)$.

(c) A l'aide d'une somme de Riemann, démontrer que la suite $\left(\frac{1}{N}\sum_{k=0}^{N-1}\left(\frac{k}{N}\right)^n\right)_{N\in\mathbf{N}}$ admet une limite (lorsque N tend vers $+\infty$) que l'on déterminera.

(d) En déduire que $\lim_{N\to+\infty} \frac{\mathbf{E}(X)}{N} = \frac{n}{n+1}$.

Exercice 9. *Soient X et Y deux variables aléatoires discrètes admettant un moment d'ordre 2. Démontrer l'inégalité de Cauchy-Schwarz :*

$$|\mathbf{E}(XY)| \le \big(\mathbf{E}(X^2)\big)^{1/2}\big(\mathbf{E}(Y^2)\big)^{1/2}.$$

Exercice 10. *Soient U et V deux variables aléatoires ayant même loi de Bernoulli de paramètre p . On pose $X = U+V$ et $Y = U-V$.*

1. Calculer $Cov(X,Y)$.

2. Les variables aléatoires X et Y sont-elles indépendantes ?

Exercice 11. *Soient X et Y deux variables aléatoires indépendantes définies sur $(\Omega, \mathscr{A}, \mathbf{P})$, indépendantes, de même loi géométrique sur $\mathbf{N}$ de paramètre $p \in]0,1[$.*

1. Calculer $\mathbf{P}(Y \ge X)$; étudier le cas particulier $p = \frac{1}{2}$.

2. Calculer $\mathbf{P}(Y = X)$; étudier le cas particulier $p = \frac{1}{2}$.

Exercice 12. *([**?**] Ch 7, exercice 9) On suppose que le nombre N d'œufs pondus par une tortue au cours d'une ponte suit une loi de Poisson $\mathscr{P}(\lambda)$. Chaque œuf arrive à éclosion (indépendamment les uns des autres) avec une probabilité p. On note X le nombre de bebés tortues issus d'une ponte. Déterminer la loi de X. On note Y le nombre d'œufs qui n'arrivent pas à éclosion, déterminer la loi de Y. Les variables X et Y sont-elles indépendantes ?*

Réciproquement, soient X et Y deux variables aléatoires indépendantes suivant des lois de Poisson de paramètres λ et μ respectivement. Si $n \in \mathbf{N}$, déterminer la loi conditionnelle de X sachant que $X+Y = n$.

Exercice 13. *On considère des variables aléatoires à valeurs entières N et $(X_i)_{i\in\mathbf{N}}$ définies sur $(\Omega,\mathscr{A},\mathbf{P})$. On suppose les X_i indépendantes et de même loi et on pose, pour tout $\omega\in\Omega$, $S_0=0$*

$$S_N\omega) = \sum_{1}^{N(\omega)} X_k(\omega).$$

On suppose en outre que les X_i et N admettent des espérances. Démontrer l'identité de Wald :

$$\mathbf{E}(S_N) = \mathbf{E}(N)\,\mathbf{E}(X)\,.$$