Quelques inégalités

Exercice 1. Soient $x_1, \cdots, x_n$ des réels positifs. Montrer que si $x_1 x_2 \cdots x_n = 1$, alors
$$x_1 + x_2 + \cdots + x_n \geq n.$$

Exercice 2. Déduire de l'exercice précédent que si $x_1, \cdots, x_n$ sont des réels strictement positifs, alors
$$\frac{x_1}{x_2} + \frac{x_2}{x_3} + \cdots + \frac{x_n}{x_1} \geq n.$$
Dans quel cas a-t-on égalité ?

Exercice 3. En utilisant l'exercice précédent, montrer que si $x_1, \cdots, x_n$ sont positifs, alors
$$\sqrt[n]{x_1 \cdots x_n} \leq \frac{x_1 + \cdots + x_n}{n}$$
l'égalité n'ayant lieu que lorsque les x_i sont égaux.

Exercice 4. **[Inégalité de Bernoulli]** Soit $x \geq -1$.

1. Montrer que si $0 < \alpha < 1$, alors $(1+x)^\alpha \leq 1 + \alpha x$.
2. Montrer que si $\alpha > 1$, alors $(1+x)^\alpha \geq 1 + \alpha x$.
3. Montrer qu'il n'y a égalité que si $x = 0$.

Convexité

Exercice 5. **Inégalité de Young, inégalité de Hölder** Soient a et b deux réels positifs ou nuls, p et q deux réels strictement positifs tels que $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$. Alors
$$ab \leq \frac{a^p}{p} + \frac{b^q}{q}.$$

Soient p et q deux réels strictement positifs tels que $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$ et $a_1, \cdots, a_n$, $b_1, \cdots, b_n$ des réels positifs. Montrer en utilisant l'inégalité de Young que
$$\sum_{i=1}^n a_i b_i \leq \left(\sum a_i^p\right)^{1/p} \left(\sum b_i^q\right)^{1/q}.$$

Soit f et g deux fonctions telle que $|f|^p$ et $|g^q|$ soient intégrables sur $\mathbf{R}$. Montrer que $|fg$ est intégrable et que
$$\int_{\mathbf{R}} |f(t)|\,|g(t)|\,dt \leq \left(\int_{\mathbf{R}} |f|^p\,dt\right)^{1/p} \left(\int_{\mathbf{R}} |g(t)|^q\,dt\right)^{1/q}.$$

Exercice 6. **Inégalité de Minkowski** Soit $p>1$ et $x_1,\cdots,x_n$, $y_1,\cdots,y_n$ des réels positifs. Démontrer en utilisant l'inégalité de Hölder que

$$\left(\sum_1^n (x_i+y_i)^p\right)^{1/p} \leq \left(\sum_1^n x_i^p\right)^{1/p} + \left(\sum_1^n y_i^p\right)^{1/p}.$$

Soit I un intervalle de $\mathbf{R}$ et E l'espace des fonctions continues de puissance p-ième intégrable sur I. Montrer que

$$f \in \mathscr{L}^p(I) \mapsto \|f\|_p = \left(\int_I |f(t)|^p\,dt\right)^{1/p}$$

définit une norme

Exercice 7. **Inégalité de Jensen : cas discret** Soient f une fonction convexe définie sur un intervalle I de $\mathbf{R}$, $x_1,\cdots,x_n$ des éléments de I. Si $\lambda_1,\cdots,\lambda_n$ sont positifs de somme égale à 1, alors

$$f\left(\sum \lambda_i x_i\right) \leq \sum \lambda_i f(x_i).$$

1. En déduire que si $x_1,\cdots,x_n$ sont des réels positifs,

$$\sqrt[n]{x_1\cdots x_n} \leq \frac{1}{n}\sum_1^n x_i.$$

2. Si les x_i sont strictement positifs, montrer que

$$\frac{n}{\frac{1}{x_1}+\cdots+\frac{1}{x_n}} \leq \frac{x_1+\cdots+x_n}{n}.$$

Exercice 8. **Inégalité de Jensen** Soit f une fonction continue sur $I=[0,1]$ à valeurs réelles et soit φ une fonction convexe définie sur $\mathbf{R}$.

Montrer que

$$\varphi\left(\int_0^1 f(t)\,dt\right) \leq \int_0^1 \varphi(f(t))\,dt.$$

Cauchy-Schwarz

On rappelle le résultat suivant :

Théorème 1. Inégalité de Cauchy-Schwarz *Soit E est un espace préhilbertien. [Inégalité de Cauchy-Schwarz] Montrer que pour tous x,y dans E on a :*

$$|\langle x \mid y\rangle| \leq \|x\|\,\|y\|$$

l'égalité étant réalisée si, et seulement si, x et y sont liés.

Cette inégalité, fondamentale en analyse, permet de démontrer de nombreux résultats. Sur $\mathbf{R}^n$ muni du produit scalaire canonique, l'inégalité de Cauchy-Schwarz prend la forme suivante :

$$\forall (x,y) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n,\ \left|\sum_{k=1}^n x_k y_k\right|^2 \leq \left(\sum_{k=1}^n x_k^2\right)\left(\sum_{k=1}^n y_k^2\right)$$

Exercice 9. Soient n un entier supérieur ou égal à 1 et $x_1, \cdots, x_n$ des réels. Moontrer que

$$\left(\sum_{k=1}^{n} x_k\right)^2 \leq n \sum_{k=1}^{n} x_k^2$$

Dans quel cas a-t'on égalité ?

En déduire une condition nécessaire et suffisante, sur les réels a et b, pour que l'application φ : $(x, y) \mapsto a \sum_{i=1}^{n} x_i y_i + b \sum_{1 \leq i \neq j \leq n} x_i y_j$ définissent un produit scalaire sur $\mathbb{R}^n$, où $n \geq 2$.

Exercice 10. On se donne un entier $n \geq 1$ et des réels $x_1, \cdots, x_n$ strictement positifs.

1. Montrer que :
$$\left(\sum_{k=1}^{n} x_k\right)\left(\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{x_k}\right) \geq n^2$$
Dans quel cas a-t'on égalité ?
2. Montrer que :
$$\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^2} \geq \frac{6n}{(n+1)(2n+1)}$$