Approximation polynomiale uniforme

1 Le théorème de Weierstrass

On note $\mathbb{R}[x]$ l'espace vectoriel sur $\mathbb{R}$ des fonctions polynomiales à coefficients réels. Cet espace est muni de la base $(e_k)_{k\in\mathbb{N}}$ définie par :

$$\forall k \in \mathbb{N}, \quad \forall x \in \mathbb{R}, \quad e_k(x) = x^k.$$

Pour tout entier naturel n, on note $\mathbb{R}_n[x]$ le sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}[x]$ formé des fonctions polynomiales de degré égal au plus n.

$I = [a, b]$ a priori désigne un intervalle réel fermé borné et l'espaces vectoriels $\mathcal{C}(I)$ des fonctions continues de I dans $\mathbb{R}$ est muni de la norme de la convergence uniforme notée $\|\cdot\|_\infty$.

Avec les exercices qui suivent, on propose plusieurs démonstrations du théorème de Weierstrass : l'espace $\mathbb{R}[x]$ est dense dans $(\mathcal{C}(I), \|\cdot\|_\infty)$. C'est-à-dire que toute fonction continue sur I est limite uniforme sur cet intervalle d'une suite de fonctions polynomiales.

On donne aussi quelques applications.

Exercice 1 ***Une démonstration du théorème de Weierstrass due à Landau.***
On définit la suite $(P_n)_{n\geq 1}$ des noyaux de Landau par :

$$\forall n \geq 1,\ P_n(x) = a_n\left(1 - x^2\right)^n,$$

où la suite $(a_n)_{n\geq 1}$ est définie par :

$$\forall n \geq 1,\ \int_{-1}^{1} P_n(x)\,dx = 1.$$

1. *Calculer :*
$$I_n = \int_{-1}^{1} \left(1 - x^2\right)^n dx$$
pour tout entier naturel n et en déduire a_n.
2. *Pour tout réel $\alpha \in]0, 1[$, on note $K_\alpha = [-1, -\alpha] \cup [\alpha, 1]$.*
Montrer que la suite $(P_n)_{n\geq 1}$ converge uniformément vers 0 sur K_α.
3. *Soit f une fonction continue sur l'intervalle $[0, 1]$ telle que $f(0) = f(1) = 0$. On prolonge cette fonction en une fonction continue sur $[-1, 2]$ en posant $f(x) = 0$ pour tout $x \in [-1, 2] \setminus [0, 1]$ et on lui associe la suite de fonctions $(Q_n)_{n\geq 1}$ définie sur $[0, 1]$ par :*
$$Q_n(x) = \int_{-1}^{1} f(x + t)\,P_n(t)\,dt$$
   (a) *Montrer que $(Q_n)_{n\geq 1}$ est une suite de fonctions polynomiales.*
   (b) *Montrer que $(Q_n)_{n\geq 1}$ converge uniformément vers f sur $[0, 1]$.*
4. *Montrer le théorème de Weierstrass.*
5. *Montrer que si la fonction f est limite uniforme sur $\mathbb{R}$ d'une suite de polynômes alors f est un polynôme (le théorème de Weierstrass est faux si l'intervalle I n'est pas borné).*

Exercice 2 ***Une démonstration du théorème de Weierstrass due à Lebesgue.***
On désigne par $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite des coefficients qui interviennent dans le développement en série entière de la fonction $x \mapsto \sqrt{1 - x}$ sur l'intervalle $]-1, 1[$, soit :

$$\forall x \in]-1, 1[,\ \sqrt{1 - x} = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n.$$

Pour tout réel $\alpha \in [0, 1]$, on désigne par h_α la fonction affine par morceaux définie par $x \mapsto h_\alpha(x) = \max(0, x - \alpha)$.

1. *Préciser la valeur des coefficients a_n.*
2. *Montrer que la série $\sum\limits_{n=0}^{+\infty} a_n$ est convergente.*
3. *Montrer que si h est fonction continue et affine par morceaux sur $[0, 1]$, il existe alors des réels $x_1 = 0 < x_2 < \cdots < x_p = 1$ et des réels $y_0, y_1, \cdots, y_p$ tels que $h = y_0 + \sum\limits_{k=1}^{p} y_k h_{x_k}$.*

4. Montrer que toute fonction continue sur $[0,1]$ est limite uniforme sur cet intervalle d'une suite de fonctions continues et affines par morceaux.
5. Montrer que :
   (a) la fonction $x \mapsto \sqrt{1-x}$ est limite uniforme d'une suite de polynômes sur l'intervalle $[-1,1]$;
   (b) pour tout réel $\alpha \in [0,1]$ les fonctions $x \mapsto |x-\alpha|$ et h_α sont limites uniformes de suites de polynômes sur l'intervalle $[0,1]$;
   (c) toute fonction continue et affine par morceaux sur $[0,1]$ est limite uniforme d'une suite de polynômes sur cet intervalle.
6. En déduire le théorème de Weierstrass.

Exercice 3 ***Une démonstration du théorème de Weierstrass due à Bernstein.***
I est l'intervalle $[0,1]$.
Pour tout entier n strictement positif, on note φ_n la fonction définie sur $\mathbb{R}^2$ par :

$$\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2,\ \varphi_n(x,y) = \left(xe^{\frac{y}{n}} + 1 - x\right)^n.$$

Pour tout entier k compris entre 0 et n, on désigne par $B_{n,k}$ la fonction polynomiale définie par :

$$\forall x \in I,\ B_{n,k}(x) = C_n^k x^k (1-x)^{n-k}$$

et B_n est l'opérateur de Berstein défini par :

$$\forall f \in \mathcal{C}(I),\ B_n(f) = \sum_{k=0}^{n} f\left(\frac{k}{n}\right) B_{n,k}.$$

1. Pour tout réel y on désigne par f_y la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par :
$$\forall x \in \mathbb{R},\ f_y(x) = e^{xy}.$$
   (a) Montrer que :
$$\forall x \in I,\ B_n(f_y)(x) = \varphi_n(x,y).$$
   (b) Montrer que pour tout entier naturel j on a :
$$B_n(e_j)(x) = \frac{\partial^j \varphi_n}{\partial y^j}(x,0).$$
   (c) Exprimer $B_n(e_j)$ dans la base $(e_k)_{k\in\mathbb{N}}$ pour $j = 0,1,2$.
2. On se donne un entier naturel $n \geq 1$, une fonction $f \in \mathcal{C}(I)$ et un réel $x \in I = [0,1]$.
   (a) Montrer que :
$$|B_n(f)(x) - f(x)| \leq \sum_{k=0}^{n} \left| f\left(\frac{k}{n}\right) - f(x) \right| B_{n,k}(x)$$
   (b) Montrer que :
$$\sum_{k=0}^{n} (k-nx)^2 B_{n,k}(x) \leq \frac{n}{4}.$$
   (c) On se donne un réel $\varepsilon > 0$, on lui associe un réel $\eta > 0$ tel que :
$$\left((x,y) \in I^2 \text{ et } |x-y| < \eta\right) \Rightarrow \left(|f(y) - f(x)| < \varepsilon\right)$$
   et on note $E_x = \left\{k \in \{0,1,\cdots,n\} \mid \left|\frac{k}{n} - x\right| < \eta\right\}$, $F_x = \{0,1,\cdots,n\} \setminus E_x$.
      i. Justifier l'existence de η, pour ε donné.
      ii. Montrer que :
$$\sum_{k\in E_x} \left| f\left(\frac{k}{n}\right) - f(x) \right| B_{n,k}(x) \leq \varepsilon$$

iii. Montrer que :

$$\sum_{k \in F_x} \left| f\left(\frac{k}{n}\right) - f(x) \right| B_{n,k}(x) \leq \frac{\|f\|_\infty}{2n\eta^2}.$$

3. *Déduire de ce qui précède que pour toute fonction $f \in \mathcal{C}(I)$ la suite $(B_n(f))_{n\geq 1}$ converge uniformément vers f sur I.*

Exercice 4 ***Utilisation des opérateurs de Bernstein.***

1. *Montrer que pour toute fonction $f \in \mathcal{C}(I)$, on a :*

$$B_n(f)' = \begin{cases} f(1) - f(0) \ \text{ si } n = 1, \\ n \sum_{k=0}^{n-1} \left(f\left(\frac{k+1}{n}\right) - f\left(\frac{k}{n}\right) \right) B_{n-1,k} \ \text{ si } n > 1. \end{cases}$$

2. *Montrer que pour toute fonction f de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[0,1]$ la suite $\left(B_n(f)'\right)_{n\geq 1}$ converge uniformément vers f' sur $[0,1]$. (on peut utilier le théorème des accroissements finis).*
3. *Pour toute fonction f de classe $\mathcal{C}^p$ sur $[0,1]$, avec $p \geq 0$, la suite $\left(B_n(f)^{(p)}\right)_{n\geq 1}$ converge uniformément vers $f^{(p)}$ sur $[0,1]$.*
4. *Montrer que si $f \in \mathcal{C}([0,1])$ est croissante alors pour tout entier naturel non nul n la fonction $B_n(f)$ est croissante (les opérateurs de Bernstein conservent la monotonie).*
5. *Montrer que si $f \in \mathcal{C}([0,1])$ est convexe alors pour tout entier naturel non nul n la fonction $B_n(f)$ est convexe sur $[0,1]$ (les opérateurs de Bernstein conservent la convexité).*
6. *Montrer que toute fonction convexe sur un intervalle fermé borné I est limite uniforme d'une suite de fonctions convexes indéfiniment dérivables sur I.*
7. *En utilisant la suite $(P_n(f))_{n\geq 1}$ par :*

$$\forall n \geq 1,\ \forall x \in [0,1],\ P_n(f)(x) = \sum_{k=0}^{n} \left[f\left(\frac{k}{n}\right) C_n^k \right] x^k (1-x)^{n-k}.$$

montrer que toute fonction f continue sur $[0,1]$ avec $f(0)$ et $f(1)$ entiers relatifs est limite uniforme sur $[0,1]$ d'une suite de polynômes à coefficients entiers relatifs.

8. *Montrer que si $I = [a,b]$ est un intervalle réel ne contenant pas d'entiers relatifs, alors l'anneau $\mathbb{Z}[x]$ des fonctions polynomiales à coefficients entiers relatifs est dense dans $(\mathcal{C}(I), \|\cdot\|_\infty)$.*

Exercice 5 ***Une démonstration probabiliste du théorème de Bernstein.***

À tout entier naturel non nul n et tout réel $x \in [0,1]$ on associe la variable aléatoire $X_{n,x}$ qui suit une loi binomiale $\mathcal{B}(n,x)$, c'est-à-dire que $X_{n,x}$ est à valeurs dans $\{0, 1, \cdots, n\}$ et sa loi de probabilité est définie par :

$$\forall j \in \{0, 1, \cdots, n\},\ \mathbb{P}(X_{n,x} = j) = C_n^j x^j (1-x)^{n-j}.$$

À toute fonction f continue sur $[0,1]$ et à valeurs réelles, on associe la variable aléatoire $Y_{n,x} = f\left(\frac{X_{n,x}}{n}\right)$. En notant $\{y_0, \cdots, y_p\}$ les valeurs prises par $Y_{n,x}$, on a :

$$\forall k \in \{0, \cdots, p\},\ \mathbb{P}(Y_{n,x} = k) = \sum_{\substack{0 \leq j \leq n \\ f\left(\frac{j}{n}\right) = y_k}} \mathbb{P}(X_{n,x} = j).$$

1. *Montrer que l'espérance de $Y_{n,x}$ est donnée par :*

$$\mathbb{E}(Y_{n,x}) = B_n(f)(x),$$

où B_n est l'opérateur de Bernstein.

2. *Pour $\varepsilon > 0$, on désigne par $\eta > 0$ un réel tel que $|f(x) - f(y)| < \varepsilon$ pour x, y dans $[0,1]$ vérifiant $|x - y| < \eta$ (uniforme continuité de f sur $[0,1]$) et, pour x fixé dans $[0,1]$, on note :*

$$\begin{cases} J_{1,x} = \left\{ j \in \{0, 1, \cdots, n\} \mid \left| f\left(\frac{j}{n}\right) - f(x) \right| < \varepsilon \right\} \\ J_{2,x} = \left\{ j \in \{0, 1, \cdots, n\} \mid \left| f\left(\frac{j}{n}\right) - f(x) \right| \geq \varepsilon \right\} \end{cases}$$

(a) *Montrer que :*
$$|B_n(f)(x) - f(x)| \leq \varepsilon + 2\|f\|_\infty \sum_{j\in J_{2,x}} \mathbb{P}(X_{n,x} = j).$$

(b) *Montrer que :*
$$|B_n(f)(x) - f(x)| \leq \varepsilon + 2\|f\|_\infty \mathbb{P}(|Y_{n,x} - f(x)| \geq \varepsilon).$$

(c) *Montrer que :*
$$|B_n(f)(x) - f(x)| \leq \varepsilon + 2\|f\|_\infty \mathbb{P}(|X_{n,x} - nx| \geq n\cdot\eta).$$

(d) *En utilisant l'inégalité de Bienaymé-Tchebychev, montrer que :*
$$|B_n(f)(x) - f(x)| \leq \varepsilon + \frac{\|f\|_\infty}{2n\cdot\eta^2}$$

et conclure.

Exercice 6 ***Utilisation du théorème de Weierstrass***

1. *Montrer que l'espace $(\mathcal{C}(I), \|\cdot\|_\infty)$ est séparable (i. e. il existe dans E une partie dense dénombrable).*
2. *Montrer que si f est une fonction continue sur un intervalle réel fermé borné $[a,b]$ à valeurs réelles telle que $\int_a^b f(x)x^n dx = 0$ pour tout entier naturel n alors elle est identiquement nulle (théorème des moments de Hausdorff). Pour F de dimension infinie, on a toujours $F\cap F^\perp = \{0\}$ mais pas nécessairement $E = F\oplus F^\perp$, c'est que nous montre ce résultat.*
3. *On note $\omega = e^{i\frac{\pi}{4}}$ et on désigne par f la fonction définie sur $[0,+\infty[$ par :*
$$\forall x \geq 0,\ f(x) = e^{-x^{\frac{1}{4}}}\sin\left(x^{\frac{1}{4}}\right).$$
   (a) *Calculer $I_n = \int_0^{+\infty} t^n e^{-\omega t}dt$ pour tout entier naturel n.*
   (b) *Montrer que $\int_0^{+\infty} x^n f(x)\,dx = 0$ pour tout entier naturel n (c'est-à-dire que le résultat de la question précédente n'est pas valable sur $[0,+\infty[$).*
4. *Montrer que si f est une fonction continue sur $\mathbb{R}_+^*$ à valeurs réelles telle que l'intégrale de f sur $\mathbb{R}_+^*$ soit convergente et $\int_0^{+\infty} f(x)e^{-nx}dx = 0$ pour tout entier naturel n alors elle est identiquement nulle.*
5. *Montrer que toute fonction paire, continue et 2π-périodique de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ peut être approchée uniformément sur $\mathbb{R}$ par une suite de polynômes trigonométriques de la forme :*
$$\sum_{k=0}^{n} a_k\cos(kx).$$

Exercice 7 ***Un théorème de Korovkin déduit de Weierstrass.***

On dit qu'un opérateur linéaire sur $\mathcal{C}(I)$ est positif (ou monotone) s'il transforme toute fonction positive appartenant à $\mathcal{C}(I)$ en une fonction positive.
On dit qu'un opérateur bilinéaire v sur $\mathcal{C}(I)\times\mathcal{C}(I)$ est positif si :
$$\forall f\in\mathcal{C}(I),\ v(f,f)\geq 0.$$

1. *Montrer qu'un opérateur linéaire u sur $\mathcal{C}(I)$ est positif si, et seulement si, pour toutes fonctions f,g dans $\mathcal{C}(I)$ telles que $f\leq g$ on a $u(f)\leq u(g)$.*
2. *Montrer que si u est un opérateur linéaire positif sur $\mathcal{C}(I)$, alors :*
$$\forall f\in\mathcal{C}(I),\ |u(f)|\leq u(|f|).$$
3. *Montrer qu'un opérateur u linéaire positif sur $\mathcal{C}(I)$ est l'opérateur nul si, et seulement si, $u(e_0) = 0$.*
4. *Montrer qu'un opérateur linéaire positif u sur $\mathcal{C}_b(I)$ est continu et qu'on a :*
$$\|u\| = \|u(e_0)\|_\infty,$$

5. *Soient u un opérateur linéaire positif sur $\mathcal{C}(I)$ tel que $u(e_0) \leq e_0$ et v l'opérateur bilinéaire symétrique défini sur $\mathcal{C}(I) \times \mathcal{C}(I)$ par :*

$$v(f,g) = u(fg) - u(f)u(g).$$

   (a) *Montrer que v est positif et qu'on a l'inégalité de Cauchy-Schwarz :*

$$v(f,g) \leq \sqrt{v(f,f)}\sqrt{v(g,g)} \leq \sqrt{\|v(f,f)\|_\infty}\sqrt{\|v(g,g)\|_\infty}$$

   (b) *Montrer que pour toutes fonctions f,g dans $\mathcal{C}(I)$, on a :*

$$\|u(fg) - u(f)u(g)\|_\infty^2 \leq 2\|f\|_\infty^2 \left\|u(g^2) - (u(g))^2\right\|_\infty$$

6. *Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite d'opérateurs linéaires positifs sur $\mathcal{C}(I)$ telle que :*
   - *pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a $u_n(e_0) \leq e_0$;*
   - *pour $k = 0,1,2$, la suite de fonctions $(u_n(e_k))_{n\in\mathbb{N}}$ converge uniformément vers e_k sur I.*

   Montrer que pour toute fonction polynomiale P, la suite de fonctions $(u_n(P))_{n\in\mathbb{N}}$ converge uniformément vers P sur I.

7. *Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite d'opérateurs linéaires positifs sur $\mathcal{C}(I)$ telle que pour $k = 0,1,2$, la suite de fonctions $(u_n(e_k))_{n\in\mathbb{N}}$ converge uniformément vers e_k sur I.*

   (a) *Montrer que pour toute fonction polynomiale P, la suite de fonctions $(u_n(P))_{n\in\mathbb{N}}$ converge uniformément vers P sur I.*

   (b) *Montrer que pour toute fonction f appartenant à $\mathcal{C}(I)$ la suite de fonctions $(u_n(f))_{n\in\mathbb{N}}$ converge uniformément vers f sur I.*

8. *Montrer que l'identité est le seul opérateur linéaire positif sur $\mathcal{C}(I)$ [resp. sur $\mathcal{F}$] tel que $u(e_k) = e_k$ pour $k = 0,1,2$ [resp. $u(c_k) = c_k$ pour $k = 0,1$ et $u(s_1) = s_1$].*

9. *Pour tout entier naturel n, on définit l'application u_n sur $\mathcal{C}([0,1])$ par :*

$$\forall f \in \mathcal{C}([0,1]),\ \forall x \in [0,1],\ u_n(f)(x) = \int_0^{\frac{\pi}{2}} n\sin^n(t)\cos(t) f\left(\frac{2}{\pi}xt\right) dt.$$

   Montrer que pour toute fonction $f \in \mathcal{C}([0,1])$ la suite de fonctions $(u_n(f))_{n\geq 0}$ converge uniformément vers f sur $[0,1]$.

10. *Soit $I = [0,b]$ avec b réel strictement positif.*
    Si f est une fonction continue sur I, on la prolonge en une fonction continue sur $\mathbb{R}^+$ en posant $f(x) = f(b)$ pour x supérieur ou égal à b.

    (a) *Montrer que pour toute fonction f appartenant à $\mathcal{C}(I)$ et pour tout entier naturel n strictement positif on peut définir une fonction $u_n(f)$ appartenant à $\mathcal{C}(I)$ en posant :*

$$\forall x \in I,\ u_n(f)(x) = e^{-nx}\sum_{k=0}^{+\infty} f\left(\frac{k}{n}\right)\frac{n^k}{k!}x^k.$$

    (b) *Montrer que pour toute fonction f appartenant à $\mathcal{C}(I)$ la suite de fonctions $(u_n(f))_{n\geq 1}$ converge uniformément vers f sur I.*

Exercice 8 ***Un théorème de Korovkin sur $\mathcal{C}(I)$***

On note $I = [a,b]$ avec $a < b$ et $E = \mathcal{C}(I)$ l'espace des fonctions continues de I dans $\mathbb{R}$. L'espace E est muni de la norme de la convergence uniforme définie par :

$$\forall f \in E,\ \|f\|_\infty = \sup_{x\in I}|f(x)|.$$

On désigne par $\mathcal{L}(E)$ l'espace vectoriel des endomorphismes de E. Un élément de $\mathcal{L}(E)$ est aussi appelé un opérateur linéaire sur E.
On dit qu'un opérateur linéaire u est positif s'il transforme toute fonction positive appartenant à E en une fonction positive.
On note $\mathbb{R}[x]$ l'espace vectoriel sur $\mathbb{R}$ des fonctions polynomiales d'une variable à coefficients réels. Cet espace est muni de la base $\{e_k \mid k \in \mathbb{N}\}$ définie par :

$$\forall k \in \mathbb{N},\ \forall x \in \mathbb{R},\ e_k(x) = x^k.$$

1. *Soit u un opérateur linéaire positif sur E. Montrer que :*

$$\forall f \in E,\ |u(f)| \leq u(|f|).$$

2. *Soit u un opérateur linéaire positif sur E. Montrer que u est l'endomorphisme nul si et seulement si $u(e_0) = 0$.*
3. *Montrer que tout opérateur linéaire positif sur E est continu et exprimer $\|u\|_\infty = \sup\limits_{f \in \mathcal{H} \setminus \{0\}} \dfrac{\|u(f)\|_\infty}{\|f\|_\infty}$ en fonction de u et de e_0.*
4. *Soit f un élément de E. Montrer que pour tout réel $\varepsilon > 0$, on peut trouver un réel $\eta > 0$ tel que :*

$$\forall (t,x) \in I \times I,\ |f(t) - f(x)| \leq \varepsilon + 2\frac{\|f\|_\infty}{\eta^2}(t-x)^2. \tag{1}$$

5. *Pour toute fonction g appartenant à E, pour tout entier naturel k et pour tout réel x fixé dans I, on désigne par $g - g(x)e_k$ la fonction de I dans $\mathbb{R}$ définie par :*

$$t \mapsto g(t) - g(x)t^k.$$

Soit f appartenant à E. Montrer que pour tout réel $\varepsilon > 0$, on peut trouver un réel $\eta > 0$ tel que :

$$\forall x \in I,\ |f - f(x)e_0| \leq \varepsilon e_0 + 2\frac{\|f\|_\infty}{\eta^2}\left(e_2 - 2xe_1 + x^2 e_0\right). \tag{2}$$

6. *Soient u un opérateur linéaire positif sur E et f une fonction appartenant à E. Montrer que pour tout réel $\varepsilon > 0$, on peut trouver un réel $\eta > 0$ tel que :*

$$\forall x \in I,\ |u(f - f(x)e_0)| \leq \varepsilon u(e_0) + 2\frac{\|f\|_\infty}{\eta^2}\left(u(e_2) - 2xu(e_1) + x^2 u(e_0)\right). \tag{3}$$

7. *Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite d'endomorphismes positifs de E telle que pour toute fonction f appartenant à $\{e_0, e_1, e_2\}$ la suite $(u_n(f))_{n\in\mathbb{N}}$ converge uniformément vers f sur I.*
   (a) *Montrer que la suite de fonctions $(g_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par :*

   $$\forall n \in \mathbb{N},\ g_n = u_n(e_2) - 2e_1 u_n(e_1) + e_2 u_n(e_0)$$

   converge uniformément vers la fonction nulle sur I.

   (b) *Montrer que pour toute fonction f appartenant à E, la suite de fonctions $(h_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par :*

   $$\forall n \in \mathbb{N},\ \forall x \in I,\ h_n(x) = (u_n(f - f(x)e_0))(x)$$

   converge uniformément vers la fonction nulle sur I (on peut utiliser l'inégalité (3)).

   (c) *Montrer que, pour toute fonction f appartenant à E, la suite $(u_n(f))_{n\in\mathbb{N}}$ converge uniformément vers f sur I (théorème de Korovkin).*
8. *Pour cette question on prend $I = [0,1]$ et on considère la suite des opérateurs de Bernstein $(B_n)_{n\geq 1}$.*
   Montrer que pour toute fonction f appartenant à E, la suite $(B_n(f))_{n\geq 1}$ converge uniformément vers f sur $[0,1]$.
9. *Pour cette question on prend $I = [0,b]$ avec b réel strictement positif. Si f est une fonction continue sur I, on la prolonge en une fonction continue sur $\mathbb{R}^+$ en posant $f(x) = f(b)$ pour x supérieur ou égal à b.*
   (a) *Montrer que pour toute fonction f appartenant à E et pour tout entier naturel $n > 0$, on peut définir une fonction $u_n(f)$ appartenant à E en posant :*

   $$\forall x \in I,\ u_n(f)(x) = e^{-nx}\sum_{k=0}^{+\infty} f\left(\frac{k}{n}\right)\frac{n^k}{k!}x^k.$$

   (b) *Montrer que pour toute fonction f appartenant à E la suite de fonctions $(u_n(f))_{n\geq 1}$ converge uniformément vers f sur I.*

Exercice 9 ***Un théorème de Korovkin sur $\mathcal{F}$***

On note $\mathcal{F}$ l'espace vectoriel réel des fonctions définies sur $\mathbb{R}$ à valeurs réelles périodiques de période 2π et continues. On munit $\mathcal{F}$ de la norme de la convergence uniforme définie par :

$$\forall f \in \mathcal{H},\ \|f\|_\infty = \sup_{x\in\mathbb{R}} |f(x)|.$$

On désigne par $\mathcal{L}(\mathcal{F})$ l'espace vectoriel des endomorphismes de $\mathcal{F}$. Un élément de $\mathcal{L}(\mathcal{F})$ est aussi appelé un opérateur linéaire sur $\mathcal{F}$.
On dit qu'un opérateur linéaire u est positif s'il transforme toute fonction positive appartenant à $\mathcal{F}$ en une fonction positive.
On note $\mathcal{P}$ le sous-espace vectoriel de $\mathcal{F}$ formé des polynômes trigonométriques à coefficients réels, c'est-à-dire des fonctions de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ de la forme :

$$x \mapsto a_0 + \sum_{k=1}^{n} \left(a_k \cos(kx) + b_k \sin(kx)\right),$$

où n est un entier naturel, le coefficient a_0 et les coefficients a_k, b_k pour tout entier k compris entre 1 et n sont réels. Cet espace est muni de la base $\{c_k \mid k \in \mathbb{N}\} \cup \{s_k \mid k \in \mathbb{N} \setminus \{0\}\}$ définie par :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \left\{ \begin{array}{ll} \forall k \in \mathbb{N}, & c_k(x) = \cos(kx), \\ \forall k \in \mathbb{N} \setminus \{0\}, & s_k(x) = \sin(kx). \end{array} \right.$$

Pour toute fonction f appartenant à $\mathcal{F}$, on désigne par $(a_k(f))_{k\geq 0}$ et $(b_k(f))_{k\geq 1}$ les coefficients de Fourier de f définis par :

$$\forall k \in \mathbb{N},\ a_k(f) = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(t)\cos(kt)\,dt,$$

$$\forall k \in \mathbb{N} \setminus \{0\},\ b_k(f) = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(t)\sin(kt)\,dt.$$

On note :

$$S_0(f) = \frac{a_0(f)}{2}c_0 \tag{4}$$

et pour tout entier n strictement positif, on désigne par $S_n(f)$ le polynôme trigonométrique défini par :

$$S_n(f) = \frac{a_0(f)}{2}c_0 + \sum_{k=1}^{n} \left(a_k(f)c_k + b_k(f)s_k\right). \tag{5}$$

1. *Montrer que toute fonction f appartenant à $\mathcal{F}$ est uniformément continue sur $\mathbb{R}$*
   Pour tout x fixé dans $\mathbb{R}$, on désigne par ψ_x la fonction définie par :

$$\forall t \in \mathbb{R},\ \psi_x(t) = \sin^2\left(\frac{t-x}{2}\right).$$

2. *Soient f appartenant à $\mathcal{F}$. Montrer que pour tout réel $\varepsilon > 0$, on peut trouver un réel η dans l'intervalle $]0,\pi[$ tel que l'on ait :*

$$\forall (t,x) \in \mathbb{R}^2,\ |f(t) - f(x)| \leq \varepsilon + 2\frac{\|f\|_\infty}{\psi_0(\eta)}\psi_x(t). \tag{6}$$

   Pour f appartenant à $\mathcal{F}$ et x fixé dans $\mathbb{R}$, $f - f(x)c_0$ désigne la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$t \mapsto f(t) - f(x).$$

3. *Soit f une fonction appartenant à $\mathcal{F}$. Montrer que pour tout réel $\varepsilon > 0$, on peut trouver un réel η dans l'intervalle $]0,\pi[$ tel que l'on ait :*

$$\forall x \in \mathbb{R},\ |f - f(x)c_0| \leq \varepsilon c_0 + \frac{\|f\|_\infty}{\psi_0(\eta)}\left(c_0 - \cos(x)c_1 - \sin(x)s_1\right). \tag{7}$$

4. *Soient u un opérateur linéaire positif sur $\mathcal{F}$ et f une fonction appartenant à $\mathcal{F}$. Montrer que pour tout réel $\varepsilon > 0$, on peut trouver un réel η dans l'intervalle $]0,\pi[$ tel que l'on ait :*

$$\forall x \in \mathbb{R},\ |u(f - f(x)c_0)| \leq \varepsilon u(c_0) + \frac{\|f\|_\infty}{\psi_0(\eta)}\left(u(c_0) - \cos(x)u(c_1) - \sin(x)u(s_1)\right). \tag{8}$$

5. *Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite d'endomorphismes positifs de $\mathcal{F}$ telle que pour toute fonction f appartenant à $\{c_0, c_1, s_1\}$, la suite $(u_n(f))_{n\in\mathbb{N}}$ converge uniformément vers f sur $\mathbb{R}$.*

   (a) *Montrer que la suite de fonctions $(g_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par :*

$$\forall n \in \mathbb{N},\ g_n = u_n(c_0) - c_1 u_n(c_1) - s_1 u_n(s_1)$$

   converge uniformément vers la fonction nulle sur $\mathbb{R}$.

(b) *Montrer que, pour toute fonction f appartenant à $\mathcal{F}$, la suite de fonctions $(h_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par :*

$$\forall n \in \mathbb{N},\ \forall x \in \mathbb{R},\ h_n(x) = (u_n(f - f(x)\, c_0))(x),$$

converge uniformément vers la fonction nulle sur $\mathbb{R}$ (on peut utiliser (8)*).*

(c) *Montrer que, pour toute fonction f appartenant à $\mathcal{F}$, la suite $(u_n(f))_{n\in\mathbb{N}}$ converge uniformément vers f sur $\mathbb{R}$ (théorème de Korovkin sur $\mathcal{F}$).*

6. *Montrer que, pour toute fonction f appartenant à $\mathcal{F}$, la suite $(T_n(f))_{n\geq 1}$ définie par par :*

$$T_n(f) = \frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1} S_k(f), \tag{9}$$

converge uniformément vers f sur $\mathbb{R}$.