Valeurs propres

$\mathbb{K}$ est un corps commutatif et $\mathbb{K}[X]$ est l'algèbre des polynômes à coefficients dans $\mathbb{K}$.

E est un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension infinie ou de dimension finie $n \geq 1$.

$\mathcal{L}(E)$ est l'algèbre des endomorphismes de E, $GL(E)$ est le groupe des automorphismes de E.

$\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ est l'algèbre des matrices carrées d'ordre n à coefficients dans $\mathbb{K}$, $GL_n(\mathbb{K})$ est le groupe des matrices inversibles dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$.

On note Id [resp. I_n] l'endomorphisme [resp. la matrice] identité.

En dimension finie, le choix d'une base de E permet de réaliser un isomorphisme d'algèbres de $\mathcal{L}(E)$ sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$.

On note Id [resp. I_n] l'endomorphisme [resp. la matrice] identité.

Dans ce qui suit, u est un endomorphisme de E et l'ensemble des valeurs propres de u est noté $\mathrm{Sp}(u)$.

En dimension finie, $P_u(X) = \det(u - XId)$ est le polynôme caractéristique de u et π_u son polynôme minimal.

1 Valeurs propres

Exercice 1 *$E = \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R})$ est l'espace des fonctions indéfiniment dérivables de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ et u est l'opérateur de dérivation, $u : f \mapsto f'$. Déterminer les valeurs propres et espaces propres de u.*

Exercice 2 *Soit $a < b$ deux réels. $E = \mathcal{C}^0([a,b])$ est l'espace des fonctions continues de $[a,b]$ dans $\mathbb{R}$ et u est l'opérateur de primitivation $u : f \mapsto g$, où g est la fonction définie par :*

$$\forall x \in [a,b],\ g(x) = \int_a^x f(t)\,dt$$

Déterminer les valeurs propres et espaces propres de u.

Exercice 3 *$E = \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}^{+,*})$ et u est l'opérateur différentiel, $u : f \mapsto xf'$. Déterminer les valeurs propres et espaces propres de u.*

Exercice 4 *Montrer que les valeurs propres d'une matrice symétrique réelle $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ sont toutes réelles.*

Exercice 5 *Soit :*

$$A = \begin{pmatrix} a_1 & b_1 & 0 & \cdots & 0 \\ b_1 & a_2 & b_2 & \ddots & \vdots \\ 0 & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & \ddots & b_{n-2} & a_{n-1} & b_{n-1} \\ 0 & \cdots & 0 & b_{n-1} & a_n \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$$

une matrice réelle tridiagonale symétrique avec $b_i \neq 0$ pour tout i compris entre 1 et $n-1$.

1. *Montrer que les valeurs propres de A sont simples.*
2. *Décrire un algorithme de calcul de l'espace propre associé à une valeur propre de A.*

Exercice 6 *Soient $n \geq 3$ et :*

$$A = \begin{pmatrix} a_1 & c_1 & 0 & \cdots & 0 \\ b_2 & a_2 & c_2 & \ddots & \vdots \\ 0 & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & \ddots & b_{n-1} & a_{n-1} & c_{n-1} \\ 0 & \cdots & 0 & b_n & a_n \end{pmatrix}$$

une matrice tridiagonale à coefficients réels telle que $b_k c_{k-1} > 0$ pour tout k compris entre 2 et n.

1. Montrer que A a le même polynôme caractéristique que la matrice :

$$T = \begin{pmatrix} a_1 & \varepsilon_2\sqrt{b_2c_1} & 0 & \cdots & 0 \\ \varepsilon_2\sqrt{b_2c_1} & a_2 & \varepsilon_3\sqrt{b_3c_2} & \ddots & \vdots \\ 0 & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & \ddots & \varepsilon_{n-1}\sqrt{b_{n-1}c_{n-2}} & a_{n-1} & \varepsilon_n\sqrt{b_nc_{n-1}} \\ 0 & \cdots & 0 & \varepsilon_n\sqrt{b_nc_{n-1}} & a_n \end{pmatrix}$$

où $\varepsilon_k = \pm 1$ est le signe de b_k.

2. En déduire que A est diagonalisable à valeurs propres simples.

Exercice 7 *On suppose que $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ et que u^2 a une valeur propre $\mu > 0$. Montrer que $\sqrt{\mu}$ ou $-\sqrt{\mu}$ est valeur propre de u.*

Exercice 8 *Soient $n \geq 3$, a, b dans $\mathbb{K}$ et $A(a,b) = ((a_{ij}))_{1\leq i,j\leq n}$ dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ définie par :*

$$\forall i \in \{1, 2, \cdots, n\}, \begin{cases} a_{ii} = b, \\ a_{ij} = a \text{ si } j \in \{1, 2, \cdots, n\} - \{i\}. \end{cases}$$

1. Calculer $\Delta(a,b) = \det(A(a,b))$.
2. Calculer le polynôme caractéristique et les valeurs propres avec leur multiplicité de la matrice $A(a,b)$.

Exercice 9 *On suppose que $n \geq 2$.*

1. Pour toute matrice $A = ((a_{ij}))_{1\leq i,j\leq n} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ et tout nombre complexe t, on note $A_t = ((a_{ij} + t))_{1\leq i,j\leq n}$. Montrer que :

$$\forall t \in \mathbb{C},\ \det(A_t) = \det(A) + tS(A),$$

la constante complexe $S(A)$ ne dépendant que des coefficients de A.

2. Soient a, b, c des nombres complexes et $M(a,b,c) = ((m_{ij}))_{1\leq i,j\leq n} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ définie par :

$$\forall i \in \{1, \cdots, n\}, \begin{cases} m_{ii} = b, \\ m_{ij} = c \text{ si } j \in \{i+1, \cdots, n\}, \\ m_{ij} = a \text{ si } j \in \{1, \cdots, i-1\}. \end{cases}$$

   (a) En prenant, pour $a \neq c$, $A = M(a,b,c)$, $t = -a$ et $t = -c$ dans la question précédente, calculer le déterminant de $M(a,b,c)$.

   (b) Calculer le polynôme caractéristique et les valeurs propres de $M(a,b,c)$.

Exercice 10 *On suppose que $n \geq 2$ et que le corps $\mathbb{K}$ est algébriquement clos.*
On dit qu'une matrice $A = ((a_{ij}))_{1\leq i,j\leq n} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ est de Hessenberg si $a_{ij} = 0$ pour tout couple (i,j) tel que $j < i - 1$. On dit que A est irréductible si $a_{i,i-1} \neq 0$ pour tout $i = 2, \cdots, n$.

1. Montrer que si A est une matrice de Hessenberg irréductible et λ une valeur propre de A, alors l'espace propre associé est de dimension 1.
2. En déduire que les valeurs propres d'une matrice de Hessenberg irréductible sont simples si et seulement si la matrice est diagonalisable.

3. *Soit :*

$$A = \begin{pmatrix} a_1 & b_1 & 0 & \cdots & 0 \\ c_2 & a_2 & b_2 & \ddots & \vdots \\ 0 & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & \ddots & c_{n-1} & a_{n-1} & b_{n-1} \\ 0 & \cdots & 0 & c_n & a_n \end{pmatrix}$$

une matrice tridiagonale à coefficients complexes.

   (a) *Donner un algorithme de calcul du polynôme caractéristique de A.*

   (b) *Montrer que A admet les mêmes valeurs propres que la matrice :*

$$B = \begin{pmatrix} a_1 & c_2 b_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 1 & a_2 & c_3 b_2 & \ddots & \vdots \\ 0 & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & \ddots & 1 & a_{n-1} & c_n b_{n-1} \\ 0 & \cdots & 0 & 1 & a_n \end{pmatrix}.$$

   (c) *Montrer que si $a_i \in \mathbb{R}$ pour tout $i = 1, 2, \cdots, n$ et $c_{i+1} b_i \in \mathbb{R}_+^*$ pour tout $i = 1, 2, \cdots, n-1$, alors A admet n valeurs propres réelles simples et est diagonalisable.*

Exercice 11 *$E = \mathcal{C}^0(\mathbb{R}, \mathbb{C})$ est le $\mathbb{C}$-espace vectoriel des fonctions continues de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{C}$ et u est l'endomorphisme de E défini par :*

$$\forall f \in E,\ \forall x \in \mathbb{R},\ u(f)(x) = \begin{cases} f(0) & \text{si } x = 0 \\ \frac{1}{x} \int_0^x f(t)\, dt & \text{si } x \neq 0 \end{cases}$$

1. *Vérifier que, pour tout $f \in E$, $u(f)$ est bien un élément de E.*
2. *Montrer que 0 n'est pas valeur propre de u.*
   On définit les sous-espaces vectoriels E_0, E_1, E_2 de E par :

$$E_0 = \{\text{fonctions constantes}\},$$
$$E_1 = \left\{ f \in E \mid f_{|\mathbb{R}^-} = 0 \right\},\ E_2 = \left\{ f \in E \mid f_{|\mathbb{R}^+} = 0 \right\}$$

3. *Montrer que chaque sous-espace E_k, pour $k = 0, 1, 2$, est stable par u. On note alors u_k la restriction de u à E_k (c'est un endomorphisme de E_k).*
4. *Déterminer l'ensemble $\mathrm{Sp}(u_1)$ des valeurs propres de u_1 et les espaces propres associés.*
5. *Déterminer l'ensemble $\mathrm{Sp}(u_2)$ des valeurs propres de u_2 et les espaces propres associés.*
6. *Vérifier que $E = E_0 \oplus E_1 \oplus E_2$.*
7. *Déterminer l'ensemble $\mathrm{Sp}(u)$ des valeurs propres de u et les espaces propres associés.*

Exercice 12 *On suppose que le corps $\mathbb{K}$ est infini et que l'espace E est de dimension finie $n \geq 1$.*

1. *Montrer que pour tout $u \in \mathcal{L}(E)$, il existe une infinité de scalaires λ tels que $u - \lambda Id$ soit inversible.*
2. *En déduire que pour tous u et v dans $\mathcal{L}(E)$, $u \circ v$ et $v \circ u$ ont même polynôme caractéristique et même polynôme minimal (considérer d'abord le cas où u est inversible).*

Exercice 13 *Soit :*

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 \\ 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 & 0 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$$

la matrice de permutation associée au n-cycle $\sigma = (1, 2, \cdots, n)$.
Déterminer les valeurs propres de A et les espaces propres associés.

Exercice 14 *Montrer que si $\lambda \in \mathbb{K}$ est une valeur propre de u et $x \in E \setminus \{0\}$ un vecteur propre associé, alors pour tout polynôme $P \in \mathbb{K}[X]$, $P(\lambda)$ est une valeur propre de $P(u)$ et x est un vecteur propre associé.*

Exercice 15 *On suppose que E est de dimension finie $n \geq 1$.*

1. *Montrer que les valeurs propres de u sont les racines de son polynôme minimal.*
2. *Montrer que si $\lambda \in \mathbb{K}$ est une valeur propre de u de multiplicité α en tant que racine du polynôme caractéristique de u, on a alors :*

$$1 \leq \dim(\ker(u - \lambda Id)) \leq \alpha.$$

Exercice 16 *On suppose que $\mathbb{K}$ est algébriquement clos. Déterminer les valeurs propres de $P(u)$ pour tout polynôme $P \in \mathbb{K}[X]$.*

Exercice 17 *Montrer que si $\mathrm{Sp}(u) = \{\lambda_1, \cdots, \lambda_p\}$, alors les sous-espaces propres $E_k = \ker(u - \lambda_k Id)$, pour k compris entre 1 et p, sont en somme directe.*

2 Polynômes orthogonaux vecteurs propres d'un opérateur différentiel

Ici, $E = \mathbb{R}[X]$.
On se donne deux polynômes réels non nuls :

$$\begin{cases} A(X) = a_0 + a_1 X + a_2 X^2, \\ B(X) = b_0 + b_1 X \end{cases}$$

et on leur associe l'opérateur différentiel u défini sur E par :

$$\forall P \in E,\ u(P) = AP'' + BP'.$$

Il est clair que u est un endomorphisme de $\mathbb{R}[X]$ qui laisse stable chaque sous-espace $\mathbb{R}_n[x]$ pour $n \in \mathbb{N}$.

On note pour tout entier naturel n, u_n la restriction de u à $\mathbb{R}_n[x]$ (c'est un endomorphisme de $\mathbb{R}_n[x]$).

Exercice 18 *Montrer que les valeurs propres de u_n, pour tout entier naturel n, sont données par :*

$$\lambda_k = k((k-1)a_2 + b_1) \ (0 \leq k \leq n)$$

On suppose, dans ce qui suit, que :

$$\forall p \in \mathbb{N},\ pa_2 + b_1 \neq 0$$

Exercice 19 *Montrer que, pour tout entier naturel n, u_n est diagonalisable, chaque espace propre* $\ker(u_n - \lambda_k Id)$, *pour $0 \leq k \leq n$, étant de dimension 1 engendré par un polynôme de degré k.*

Pour $n \in \mathbb{N}$, et $0 \leq k \leq n$, on désigne par P_k le générateur unitaire (de degré k) de $\ker(u_n - \lambda_k Id)$.

On suppose qu'il existe un intervalle ouvert $I =]a, b[$ avec $-\infty \leq a < b \leq +\infty$ et une fonction $\pi : I \to \mathbb{R}$ de classe $\mathcal{C}^\infty$ telle que :

$$\begin{array}{l} \forall x \in I, \ A(x) y'(x) = (B(x) - A'(x)) y(x) \\ \forall x \in I, \ \pi(x) > 0 \\ \forall k \in \mathbb{N}, \ \displaystyle\int_a^b \left|x^k\right| \pi(x) \, dx < +\infty \\ \forall n \in \mathbb{N}, \ \displaystyle\lim_{\substack{x \to a \\ x > a}} x^n A(x) \pi(x) = \lim_{\substack{x \to b \\ x < b}} x^n A(x) \pi(x) = 0 \end{array}$$

On munit l'espace vectoriel E du produit scalaire définit par :

$$\forall (P, Q) \in E^2, \ \langle P \mid Q \rangle = \int_a^b P(x) Q(x) \pi(x) \, dx$$

Exercice 20 *Montrer que u est symétrique pour le produit scalaire associé la fonction π, c'est-à-dire que :*

$$\forall (P, Q) \in E^2, \ \langle u(P) \mid Q \rangle = \langle P \mid u(Q) \rangle .$$

Exercice 21 *En déduire que la famille $(P_n)_{n \in \mathbb{N}}$ de vecteurs propres de u est une base orthogonale de $(E, \langle \cdot \mid \cdot \rangle)$.*

La suite de fonctions $(\varphi_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est définie par :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \ \varphi_n = \pi A^n$$

Exercice 22 *Montrer que :*

$$\forall n \in \mathbb{N}, \ \varphi_n^{(k)} = \pi A^{n-k} Q_{n,k} \ (0 \leq k \leq n)$$

où $Q_{n,k}$ est un polynôme de degré k.

Exercice 23 *Montrer qu'il existe une suite $(\alpha_n)_{n \in \mathbb{N}}$ de réels non nuls telle que :*

$$\forall n \in \mathbb{N}, \ P_n = \alpha_n \frac{1}{\pi} \varphi_n^{(n)}.$$

Exercice 24 *Étudier les cas particuliers suivants.*

1. $A(X) = X^2 - 1, \ B(X) = 2X, \ I =]-1, 1[$.
2. $A(X) = X^2 - 1, \ B(X) = X, \ I =]-1, 1[$.
3. $A(X) = X, \ B(X) = -X + \alpha + 1$ *avec* $\alpha > -1, \ I =]0, +\infty[$.
4. $A(X) = 1, \ B(X) = -2X, \ I = \mathbb{R}$.

3 Localisation des valeurs propres d'une matrice réelle ou complexe

Ici, $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$.

Si $x \mapsto \|x\|$ est une norme sur $E = \mathbb{K}^n$, on lui associe alors la norme matricielle induite qui est définie par :

$$\forall A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K}), \ \|A\| = \sup_{x \in E \setminus \{0\}} \frac{\|Ax\|}{\|x\|} = \sup_{\substack{x \in E \\ \|x\|=1}} \|Ax\|$$

On rappelle qu'une telle norme matricielle est sous-multiplicative, c'est-à-dire que $\|AB\| \leq \|A\| \|B\|$ pour toutes matrices A, B.

On notera $\|A\|_\infty$, $\|A\|_2$ les normes matricielles respectivement associées aux normes $\|x\|_\infty = \max\limits_{1\leq i\leq n} |x_i|$ et $\|x\|_2 = \sqrt{\sum\limits_{i=1}^{n} |x_i|^2}$.

Si A une matrice d'ordre n supérieur ou égal à 2 à coefficients réels ou complexes, on note :

$$\begin{aligned} L_i &= \sum_{\substack{j=1 \\ j\neq i}}^{n} |a_{ij}| \quad (1 \leq i \leq n), \quad L = \max_{1\leq i\leq n} \{L_i + |a_{ii}|\}, \\ C_j &= \sum_{\substack{i=1 \\ i\neq j}}^{n} |a_{ij}| \quad (1 \leq j \leq n), \quad C = \max_{1\leq j\leq n} \{C_j + |a_{jj}|\}. \end{aligned}$$

Exercice 25 *Soient A dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ et λ dans $\mathbb{C}$ une valeur propre de A. Montrer qu'il existe un indice $i \in \{1, 2, \cdots, n\}$ tel que :*

$$|\lambda - a_{ii}| \leq L_i.$$

Exercice 26 *Soient $(a, b) \in \mathbb{R}^2$ et $A(a, b)$ la matrice réelle d'ordre $n \geq 2$ définie par :*

$$A(a,b) = \begin{pmatrix} a & b & 0 & \cdots & 0 \\ b & a & b & \ddots & \vdots \\ 0 & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & \ddots & b & a & b \\ 0 & \cdots & 0 & b & a \end{pmatrix}.$$

Calculer les valeurs propres et les vecteurs propres associés de $A(a, b)$.

Exercice 27 *Soit $n \geq 3$. En utilisant les résultats de l'exercice* **??** *et de l'exercice précédent, déterminer le spectre de la matrice :*

$$A(a,b,c) = \begin{pmatrix} a & c & 0 & \cdots & 0 \\ b & a & c & \ddots & \vdots \\ 0 & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & \ddots & b & a & c \\ 0 & \cdots & 0 & b & a \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$$

où a, b, c sont des réels donnés avec $b > 0$ et $c > 0$.

Exercice 28 *Montrer que pour toute valeur propre $\lambda \in \mathbb{C}$ de $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ on a :*

$$|\lambda| \leq \min\{L, C\}.$$

Une matrice réelle ou complexe A est dite à diagonale strictement dominante si :

$$\forall i \in \{1, 2, \cdots, n\}, \ |a_{ii}| > \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^{n} |a_{ij}| .$$

Exercice 29 *Montrer qu'une matrice réelle ou complexe à diagonale strictement dominante a toutes ses valeurs propres non nulles dans $\mathbb{C}$. En conséquence elle est inversible.*

On rappelle que si p et q sont deux réels strictement positifs tels que $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$, on a alors pour tous vecteurs x, y dans $\mathbb{C}^n$:

$$\left| \sum_{i=1}^{n} x_i \overline{y_i} \right| \leq \left(\sum_{i=1}^{n} |x_i|^p \right)^{\frac{1}{p}} \left(\sum_{i=1}^{n} |y_i|^q \right)^{\frac{1}{q}}$$

(Inégalité de Hölder).

Exercice 30 *Montrer que si $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ n'est pas inversible, alors :*

$$\forall \alpha \in [0, 1], \ \exists i \in \{1, \cdots, n\} \mid |a_{ii}| \leq L_i^{\alpha} C_i^{1-\alpha}$$

Exercice 31 *Soit A dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. Montrer que pour tout réel $\alpha \in [0, 1]$ et toute valeur propre $\lambda \in \mathbb{C}$ de A, il existe $i \in \{1, \cdots, n\}$ tel que :*

$$|\lambda - a_{ii}| \leq L_i^{\alpha} C_i^{1-\alpha}.$$

Exercice 32 *Soit A dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. Montrer que pour toute valeur propre de A, $\lambda \in \mathbb{C}$, il existe $i \in \{1, 2, \cdots, n\}$ tel que :*

$$|\lambda|^2 \leq (L_i + |a_{ii}|)(C_i + |a_{ii}|).$$