Agrégation Interne

Nombres premiers, inégalité de Tchebytchev

On pourra consulter les ouvrages suivants.

– V. Beck, J. Malick, G. Peyre. *Objectif Agrégation.* H et K (2004).
– O. Bordelles. *Thèmes d'arithmétique.* Ellipses (2006).
– J. M. De Koninck, A. Mercier. *1001 problèmes en théorie classique des nombres.* Ellipses. (2003).
– S. Francinou, H. Gianella, S. Nicolas. *Oraux X-ENS. Algèbre 1.* Cassini (2009).
– S. Francinou, H. Gianella. *Exercices de mathématiques pour l'agrégation. Algèbre 1.* Masson (1994).
– X. Gourdon. *Les Maths en tête. Algèbre.* Ellipses.
– D. Perrin. *Cours d'algèbre.* Ellipses (1996).
– J. P. Ramis, A. Warusfel. *Mathématiques tout en un pour la licence. L1, L2, L3.* Dunod. (2007).
– F. Moulin, J. P. Ramis, A. Warusfel. Cours de m*athématiques pures et appliquées. Algèbre et géométrie.* De Boeck. (2010).
– P. Tauvel. *Mathématiques générales pour l'agrégation.* Masson (1993).
– G. Tenenbaum. *Introduction to analytic and probabilistic number theory.* Cambridge University Press. (1995).

1 Énoncé

On note $(p_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ la suite strictement croissante des nombres premiers et $\mathcal{P}$ l'ensemble de ces nombres premiers.

Pour tout entier naturel non nul n, on note :

$$\mathcal{P}_n = \mathcal{P} \cap [1, n]$$

l'ensemble des nombres premiers compris entre 1 et n et :

$$\pi(n) = \mathrm{card}(\mathcal{P}_n)$$

son cardinal.

Pour tout nombre premier p et tout entier naturel $n \geq 2$, on note $\nu_p(n)$ l'exposant de p dans la décomposition de n en facteurs premiers ($\nu_p(n) = 0$ si p ne figure pas dans cette décomposition), soit :

$$\nu_p(n) = \max\left\{k \in \mathbb{N} \mid p^k \text{ divise } n\right\}$$

On a :

$$\nu_p(n) \neq 0 \Leftrightarrow (p \text{ divise } n).$$

On dit que $\nu_p(n)$ est la valuation p-adique de n.

Par convention, on note $\nu_p(1) = 0$.

La décomposition en facteurs premiers d'un entier $n \geq 2$ peut donc s'écrire sous la forme :

$$n = \prod_{p\in\mathcal{P}_n} p^{\nu_p(n)}$$

– I – Inégalités de Tchebychev

Le théorème des nombres premiers (de démonstration délicate) nous dit que :

$$\pi(n) \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{n}{\ln(n)}$$

Dans cette partie, on se propose de montrer que :

$$\forall n \geq 3,\ \ln(2)\frac{n}{\ln(n)} \leq \pi(n) \leq e\frac{n}{\ln(n)} \tag{1}$$

1. Pour tout entier $n \geq 2$, on note :

$$\mu_n = \mathrm{ppcm}(1, 2, \cdots, n)$$

et on se propose de montrer que :

$$\forall n \geq 7,\ \mu_n \geq 2^n$$

(théorème de Nair).

(a) Calculer μ_n pour n compris entre 2 et 8.

(b) Pour $1 \leq m \leq n$ entiers, on note :

$$I_{n,m} = \int_0^1 x^{m-1}(1-x)^{n-m}\, dx$$

i. Montrer qu'il existe un entier $a_{n,m} \in \mathbb{N}^*$ tel que :

$$I_{n,m} = \frac{a_{n,m}}{\mu_n}$$

ii. En calculant la somme :

$$P_n(y) = \sum_{m=1}^{n} \binom{n-1}{m-1} I_{n,m} y^{m-1}$$

pour tout réel $y \in \left]0,1\right[$, montrer que :

$$I_{n,m} = \frac{1}{m\binom{n}{m}}$$

iii. Montrer que, pour $1 \leq m \leq n$, $m\binom{n}{m}$ divise μ_n.

iv. Montrer que, pour tout entier $n \geq 1$, μ_{2n+1} est multiple de $n(2n+1)\binom{2n}{n}$.

v. Montrer que, pour tout entier $n \geq 1$, on a :

$$\max_{0 \leq k \leq 2n} \binom{2n}{k} = \binom{2n}{n}$$

puis en déduire que $(2n+1)\binom{2n}{n} \geq 2^{2n}$.

vi. Déduire de ce qui précède que $\mu_{2n+1} \geq 2^{2n+1}$ pour tout $n \geq 2$, $\mu_{2n+2} \geq 2^{2n+2}$ pour tout $n \geq 4$, puis que $\mu_n \geq 2^n$ pour tout $n \geq 7$.

2. En utilisant la décomposition en facteurs premiers de μ_n, montrer que :

$$\forall n \geq 2,\ \mu_n \leq n^{\pi(n)}$$

puis en déduire que :

$$\forall n \geq 3,\ \ln(2)\frac{n}{\ln(n)} \leq \pi(n)$$

3. Pour tout entier $n \geq 2$, on note :

$$P_n = \prod_{p \in \mathcal{P}_n} p$$

(a) Montrer que :

$$\forall n \geq 2,\ \pi(n)! \leq P_n$$

(b) Montrer que :

$$\forall n \geq 1,\ \frac{P_{2n+1}}{P_{n+1}} \leq \binom{2n+1}{n} \leq 2^{2n}$$

(c) En déduire que :

$$\forall n \geq 2,\ P_n \leq 2^{2n}$$

(d) Montrer que :

$$\forall n \geq 1,\ n(\ln(n)-1) \leq \ln(n!)$$

(e) Montrer que :

$$\forall n \geq 2,\ \pi(n)(\ln(\pi(n))-1) \leq 2n\ln(2)$$

(f) En utilisant la fonction $\varphi : x \mapsto x(\ln(x) - 1)$, montrer que :

$$\forall n \geq 2,\ 2n\ln(2) \leq \varphi\left(e\frac{n}{\ln(n)}\right)$$

et en déduire que :

$$\forall n \geq 2,\ \pi(n) \leq e\frac{n}{\ln(n)}$$

– II – Quelques conséquences des inégalités de Tchebychev

Il résulte immédiatement de l'encadrement (1) que $\pi(n) = \underset{n\to+\infty}{o}(n)$ (théorème de Legendre).

1. Des inégalités de Tchebychev, on peut déduire que :

$$\forall n \geq 2,\ \frac{1}{e}n\ln(n) \leq p_n \leq \frac{2}{\ln(2)}n\ln(n)$$

(a) Montrer que :

$$\forall n \geq 1,\ p_n > \frac{1}{e}n\ln(n)$$

(b) Montrer que :

$$\forall n \geq 2,\ \sqrt{p_n} \leq \frac{2}{\ln(2)}n\frac{\ln\left(\sqrt{p_n}\right)}{\sqrt{p_n}}$$

puis en déduire que :

$$\forall n \geq 7,\ p_n \leq n^2$$

et :

$$\forall n \geq 2,\ p_n \leq \frac{2}{\ln(2)}n\ln(n)$$

2.

(a) Étudier la série $\sum \frac{1}{p_n^\alpha}$, où α est un nombre réel.

(b) Étudier la série $\sum \frac{1}{p_n^\alpha(\ln(p_n))^\beta}$, où α, β sont deux nombres réels.

(c) Quel est le rayon de convergence de la série entière $\sum \frac{z^{p_n}}{p_n}$.

3. Pour tout entier $n \geq 2$, on désigne par :

$$S_n = \sum_{p\in\mathcal{P}_n}\frac{1}{p} = \sum_{k=1}^{\pi(n)}\frac{1}{p_k}$$

la somme partielle d'indice $\pi(n)$ de la série $\sum \frac{1}{p_n}$.

(a) Montrer que :

$$\forall n \geq 2,\ S_n = \sum_{k=2}^{n}\frac{\pi(k) - \pi(k-1)}{k}$$

(b) En déduire que $S_n = \underset{n\to+\infty}{O}\ln(\ln(n))$.

(c) Déduire des inégalités de Tchebychev que $\ln(p_n) \underset{n\to+\infty}{\sim} \ln(n)$, puis en admettant le théorème des nombres premiers montrer que :

$$p_n \underset{n\to+\infty}{\sim} n\ln(n)$$

et en déduire que :

$$S_n \underset{n\to+\infty}{\sim} \ln(\ln(n))$$

4. Pour tout réel x, on note $[x]$ la partie entière de x.
On se donne un entier $n \geq 2$, un nombre premier $p \geq 2$ et on se propose de montrer que :

$$\nu_p(n!) = \sum_{k=1}^{+\infty} \left[\frac{n}{p^k}\right]$$

(formule de Legendre).

(a) Montrer que, pour tout entier naturel k, le nombre d'entiers compris entre 1 et n qui sont multiples de p^k est égal à $\left[\frac{n}{p^k}\right]$.

(b) Montrer que, pour tout entier naturel k, le nombre d'entiers compris entre 1 et n dont la valuation vaut k est égal à $\left[\frac{n}{p^k}\right] - \left[\frac{n}{p^{k+1}}\right]$.

(c) En notant $q_{n,p} = \left[\frac{\ln(n)}{\ln(p)}\right]$, montrer que :

$$\nu_p(n!) = \sum_{k=1}^{q_{n,p}} \left[\frac{n}{p^k}\right] = \sum_{k=1}^{+\infty} \left[\frac{n}{p^k}\right]$$

(d) Déduire de ce qui précède que, pour $p \leq n$, on a :

$$0 \leq \frac{n}{p} - 1 < \nu_p(n!) \leq \frac{n}{p} + \frac{n}{p(p-1)}$$

5. Pour tout entier $n \geq 2$, on désigne par :

$$T_n = \sum_{p\in\mathcal{P}_n} \frac{\ln(p)}{p} = \sum_{k=1}^{\pi(n)} \frac{\ln(p_k)}{p_k}$$

la somme partielle d'indice $\pi(n)$ de la série $\sum \frac{\ln(p_n)}{p_n}$.

(a) Montrer que :

$$\forall n \geq 2,\ \ln(n!) = \sum_{k=1}^{\pi(n)} \nu_{p_k}(n!)\ln(p_k)$$

(b) Comme en **I.3**, on note $P_n = \prod_{p\in\mathcal{P}_n} p$ pour tout $n \geq 2$ et on rappelle que $P_n \leq 2^{2n}$.
Montrer qu'il existe un réel $S > 0$ tel que :

$$\forall n \geq 2,\ \frac{\ln(n!)}{n} - S \leq T_n \leq \frac{\ln(n!)}{n} + 2\ln(2)$$

(c) En déduire que $T_n \underset{n\to+\infty}{\sim} \ln(n)$ (théorème de Mertens).