Sous-groupes de $\mathbb{R}^n$

Ce problème sur les sous-groupes additifs de $\mathbb{R}$ et de $\mathbb{R}^n$ est l'occasion de revoir quelques notions de topologie.

Les points de cours qu'il peut être utile de revoir sont les suivants ;
bornes inférieure et supérieure sur $\mathbb{R}$;
valeurs d'adhérence d'une suite ;
fermés, compacts de $\mathbb{R}^n$;
partie dense dans un espace vectoriel normé ;
convergence des séries numériques ;
fonctions périodiques.

S'il est nécessaire de revoir le cours, on pourra consulter les ouvrages suivants.

A. Chambert-Loir, S. Fermigier. *Analyse 2.* Masson (1995).

C. Deschamps, A. Warusfel. *Mathématiques tout en un. Série E. Ramis. Volumes 1 et 2.* Dunod. (1999).

R. Goblot. *Algèbre commutative.* Masson (1996).

H. Queffelec. *Topologie.* Masson (1998).

P. Samuel. *Théorie algébrique des nombres.* Hermann (1997).

P. Tauvel. *Algèbre pour l'agrégation interne.* Masson.

– I – Sous-groupes additifs de $\mathbb{R}$

On dit qu'un sous-ensemble X de $\mathbb{R}$ est discret si son intersection avec toute partie bornée de $\mathbb{R}$ est finie (éventuellement vide), ce qui revient à dire que pour tout réel $R > 0$, l'ensemble $X \cap [-R, R]$ est fini.

1. Soit H un sous-groupe additif de $\mathbb{R}$. Montrer que H est discret si, et seulement si, il existe un réel α tel que :
$$H = \mathbb{Z}\alpha = \{p\alpha \mid p \in \mathbb{Z}\}$$
(H est monogène).
2. Montrer qu'un sous-groupe discret de $\mathbb{R}$ est fermé.
3. Montrer que les sous-groupes additifs de $\mathbb{R}$ sont denses ou discrets.
4. Montrer la densité de l'ensemble $\mathbb{D}$ des nombres décimaux et de l'ensemble $\mathbb{Q}$ des nombres rationnels dans $\mathbb{R}$ en utilisant la question précédente.
5. Soient a, b deux réels non nuls.
Montrer que le groupe additif engendré par a et b :
$$\mathbb{Z}a + \mathbb{Z}b = \left\{pa + qb \mid (p, q) \in \mathbb{Z}^2\right\}$$
est discret [resp. dense dans $\mathbb{R}$] si, et seulement si, $\frac{a}{b}$ est rationnel [resp. irrationnel].
Pour $\frac{a}{b} = \frac{p}{q}$ rationnel avec $(p, q) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}^*$, on a $\mathbb{Z}a + \mathbb{Z}b = \mathbb{Z}\frac{b}{q} = \mathbb{Z}\frac{a}{p}$.
6. Soient a, b deux réels non nuls.
Montrer que le groupe $\mathbb{Z}a + \mathbb{Z}b$ est fermé si, et seulement si, $\frac{a}{b}$ est rationnel (pour $\frac{a}{b}$ irrationnel, cela nous donne un exemple de situation où la somme de deux fermés n'est pas un fermé).
7. Soient a, b deux réels non nuls.
Montrer que $\frac{a}{b}$ est rationnel [resp. irrationnel] si, et seulement si $\mathbb{Z}a \cap \mathbb{Z}b \neq \{0\}$ [resp. $\mathbb{Z}a \cap \mathbb{Z}b = \{0\}$].
Pour $\frac{a}{b} = \frac{p}{q}$ rationnel avec $(p, q) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}^*$, on a $\mathbb{Z}a \cap \mathbb{Z}b = \mathbb{Z}qa = \mathbb{Z}pb$.
8. Soient $a_1, \cdots, a_n$ une suite de $n \geq 2$ réels non nuls. Donner une condition nécessaire et suffisante pour que le groupe engendré par les a_k :
$$\sum_{k=1}^{n} \mathbb{Z}a_k = \left\{\sum_{k=1}^{n} p_k a_k \mid (p_1, \cdots, p_n) \in \mathbb{Z}^n\right\}$$
soit dense dans $\mathbb{R}$.
9. Soient a, b deux réels non nuls tels que $\frac{a}{b}$ soit irrationnel.
On se propose de montrer que l'ensemble :
$$\mathbb{N}a + \mathbb{Z}b = \{pa + qb \mid (p, q) \in \mathbb{N} \times \mathbb{Z}\}$$
est dense dans $\mathbb{R}$.
On se donne deux réels $x < y$.
   (a) Justifier l'existence de $(p, q) \in \mathbb{Z}^2$ tel que :
$$0 < pa + qb < y - x$$

(b) On suppose que $p \in \mathbb{N}$. Justifier l'existence de $(k, n) \in \mathbb{N} \times \mathbb{Z}$ tel que $k(pa+qb) + nb \in \left]x, y\right[$.

(c) On suppose que $p < 0$. Justifier l'existence de $(k, n) \in \mathbb{N} \times \mathbb{Z}$ tel que $nb - k(pa+qb) \in \left]x, y\right[$.

(d) Conclure.

10. Soit θ un réel non nul tel que $\dfrac{\pi}{\theta}$ soit irrationnel.

    (a) Montrer que les ensembles $\{\cos(n\theta) \mid n \in \mathbb{N}\}$ et $\{\sin(n\theta) \mid n \in \mathbb{N}\}$ sont denses dans $[-1, 1]$, ce qui signifie que l'ensemble des valeurs d'adhérence de la suite $(\cos(n\theta))_{n\in\mathbb{N}}$ [resp. $(\sin(n\theta))_{n\in\mathbb{N}}$] est $[-1, 1]$.

    (b) Déterminer l'ensemble des valeurs d'adhérence de la suite $(\tan(n\theta))_{n\in\mathbb{N}}$.

11. On se donne une fonction $f : [1, +\infty[\to \mathbb{R}$, de classe $\mathcal{C}^1$ telle que :

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty, \quad \lim_{x\to+\infty} f'(x) = 0$$

$$\forall x \in [1, +\infty[, \; f'(x) > 0$$

et on s'intéresse aux valeurs d'adhérences de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ définie par $u_n = \cos(f(n))$ pour tout $n \geq 1$.

    (a) Justifier le fait que f réalise un $\mathcal{C}^1$-difféomorphisme de $[1, +\infty[$ sur $[f(1), +\infty[$.
    Soient $x \in [-1, 1]$ et $t = \arccos(x) \in [0, \pi]$.

    (b) Montrer qu'il existe un entier $n_0 \in \mathbb{N}$ tel que pour tout entier $n \geq n_0$, il existe un entier naturel $\varphi(n)$ tel que :

$$f(\varphi(n)) \leq t + 2n\pi < f(\varphi(n) + 1) \tag{1}$$

    (c) Montrer qu'il existe un entier $n_1 \geq n_0$ tel que la suite d'entiers $(\varphi(n))_{n\geq n_1}$ soit strictement croissante.

    (d) Montrer que $\lim\limits_{n\to+\infty} (t + 2n\pi - f(\varphi(n))) = 0$.

    (e) Montrer que $\lim\limits_{n\to+\infty} \left(u_{\varphi(n)}\right) = x$.

    (f) En déduire que l'ensemble des valeurs d'adhérence de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est $[-1, 1]$.
    Prenant $f(x) = x^\alpha$ avec $0 < \alpha < 1$ ou $f(x) = \ln(x)$, on en déduit que que l'ensemble des valeurs d'adhérence des suites $(\cos(n^\alpha))_{n\in\mathbb{N}^*}$ et $(\cos(\ln(n)))_{n\in\mathbb{N}^*}$ est $[-1, 1]$.

12. Soient a, b deux réels non nuls.
Montrer que le réel $\dfrac{a}{b}$ est irrationnel si, et seulement si, il existe deux suites $(p_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(q_n)_{n\in\mathbb{N}}$ d'entiers relatifs telles que :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \; p_n a + q_n b \neq 0 \tag{2}$$

$$\lim_{n\to+\infty} (p_n a + q_n b) = 0 \tag{3}$$

On en déduit qu'un réel θ est irrationnel si, et seulement si, il existe deux suites $(p_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(q_n)_{n\in\mathbb{N}}$ d'entiers relatifs telles que :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \; p_n \theta - q_n \neq 0 \tag{4}$$

$$\lim_{n\to+\infty} (p_n \theta - q_n) = 0 \tag{5}$$

13. On utilise le résultat précédent pour montrer l'irrationalité de certains réels.

    (a) Montrer que $e = \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{n!}$ est irrationnel.

(b) Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite d'entiers naturels non nuls telle que :

i. pour tous $n \in \mathbb{N}$, u_n divise u_{n+1} ;

ii. la série de terme général $\dfrac{1}{u_n}$ est convergente ;

iii. le reste d'ordre n, $R_n = \displaystyle\sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{1}{u_k}$, est négligeable devant $\dfrac{1}{u_n}$.

Montrer que, dans ces conditions, le réel $\theta = \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{u_n}$ est irrationnel.

(c) Montrer que la série de terme général $\dfrac{1}{2^{2^n}-1}$ est convergente et que sa somme est irrationnelle.

(d) Montrer que la série de terme général $\dfrac{1}{2^{2^n}+1}$ (nombres de Fermat) est convergente et que sa somme est irrationnelle.

– II – Fonctions périodiques

Si f est une fonction de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$, on dit que $T \in \mathbb{R}$ est une période de f si $f(x+T) = f(x)$ pour tout réel x.

L'ensemble $\mathcal{P}(f)$ de toutes les périodes de f est un sous-groupe additif de $(\mathbb{R}, +)$.

Une fonction f de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ est dite périodique si $\mathcal{P}(f)$ n'est pas réduit à $\{0\}$.

1. Montrer que $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ est constante si, et seulement si, $\mathcal{P}(f) = \mathbb{R}$.
2. Soit G un sous-groupe de $\mathbb{R}$ et f la fonction caractéristique de G. Montrer que $\mathcal{P}(f) = G$.
3. Montrer que si $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ est continue, le groupe $\mathcal{P}(f)$ des périodes de f est alors fermé dans $\mathbb{R}$.
4. Montrer que si f est une fonction continue, périodique, non constante de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$, il existe alors un unique réel $T > 0$ tel que $\mathcal{P}(f) = \mathbb{Z}T$ ($\mathcal{P}(f)$ est discret et T est la plus petite période strictement positive de f).
5. Soient T_1, T_2 deux réels non nuls et f une fonction continue de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$, telle que :
$$\forall x \in \mathbb{R},\ f(x+T_1) = f(x+T_2) = f(x)$$
Montrer que si $\dfrac{T_1}{T_2}$ est irrationnel, la fonction f est alors constante.
6. Montrer que si f, g sont deux fonctions continues périodiques non constantes de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ de plus petites périodes respectives $T_1 > 0$ et $T_2 > 0$ avec $\dfrac{T_1}{T_2}$ irrationnel, la fonction $f + g$ n'est alors pas périodique.
7. Soit H une partie dense de $\mathbb{R}$. Montrer que pour tout réel x, il existe une suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ strictement croissante [resp. strictement décroissante] qui converge vers x.
8. Soient T_1, T_2 deux réels non nuls et f une fonction de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ admettant une limite à gauche [resp. à droite] en un point a et telle que :
$$\forall x \in \mathbb{R},\ f(x+T_1) = f(x+T_2) = f(x)$$
Montrer que si $\dfrac{T_1}{T_2}$ est irrationnel, la fonction f est alors constante.
9. Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction périodique non constante admettant une limite à gauche [resp. à droite] en un point a. Montrer que $\mathcal{P}(f)$ est discret (soit $\mathcal{P}(f) = \mathbb{Z}T$ avec $T > 0$).

10. Montrer que si f, g sont deux fonctions de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ telles que $\mathcal{P}(f) \cap \mathcal{P}(g) \neq \{0\}$, la fonction $f+g$ est alors périodique.
11. Montrer que si f est une fonction continue de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ de plus petite période strictement positive T, une primitive F de f est T-périodique si, et seulement si, $\displaystyle\int_0^T f(t)\,dt = 0.$
12. Montrer que si f est une fonction périodique de classe $\mathcal{C}^1$ de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$, on a alors $\mathcal{P}(f) = \mathcal{P}(f')$.
13. Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction pour laquelle il existe une fonction polynomiale P de degré au plus égal à $n \in \mathbb{N}$ et un réel $T > 0$ tels que :

$$\forall x \in \mathbb{R},\ f(x+T) = f(x) + P(x)$$

Montrer qu'il existe une fonction g périodique de période T et une fonction polynomiale Q de degré au plus égal à $n \in \mathbb{N}$ telles que :

$$\forall x \in \mathbb{R},\ f(x) = g(x) + xQ(x)$$

– III – Sous-groupes de $\mathbb{R}^n$

On désigne par n un entier naturel non nul, E l'espace euclidien $\mathbb{R}^n$ muni de son produit scalaire canonique noté $\langle \cdot \mid \cdot \rangle$. La norme associée à ce produit scalaire est notée $\|\cdot\|$.

Pour tout a dans E et tout réel $R > 0$ on note $B(a, R)$ [resp. $\overline{B}(a, R)$] la boule ouverte [resp. fermée] de centre a et de rayon R dans E.

Une partie X de E est dite discrète si son intersection avec toute partie bornée de E est finie (éventuellement vide), ce qui revient à dire que pour tout réel $R > 0$, l'ensemble $X \cap \overline{B}(0, R)$ est fini.

On dit qu'un élément x d'une partie non vide X de E est isolé dans X, s'il existe un ouvert $\mathcal{V}$ de E tel que $X \cap \mathcal{V} = \{x\}$.

1. Montrer qu'un compact discret dans E est nécessairement fini.
2. Montrer qu'un sous-groupe discret de E est fermé dans E.
3. Soit G un sous-groupe additif de E. Montrer que les propriétés suivantes sont équivalentes :
   (a) G est discret ;
   (b) 0 est isolé dans G ;
   (c) tous les éléments de G sont isolés dans G.
4. Soit G un sous-groupe discret de E non réduit à $\{0\}$. Montrer que :

$$\delta = \inf_{x \in G \setminus \{0\}} \|x\| > 0$$

5. Soit :

$$G = \left\{ \left(p + q\sqrt{2}, q\sqrt{2}\right) \mid (p, q) \in \mathbb{Z}^2 \right\}$$

   (a) Montrer que G est un sous-groupe discret de $\mathbb{R}^2$.
   (b) On désigne par π_1 la projection $(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mapsto x$. Que dire du groupe $\pi_1(G)$?
6. Soit G un sous-groupe discret de E. Montrer que son adhérence $\overline{G}$ est un sous-groupe fermé de E.

7. On se propose ici de montrer que si G est un sous-groupe discret de E non réduit à $\{0\}$, il existe alors un entier r compris entre 1 et n et une famille libre $(e_i)_{1 \leq i \leq r}$ dans G telle que :

$$G = \left\{ \sum_{i=1}^{r} k_i e_i \mid (k_1, \cdots, k_r) \in \mathbb{Z}^r \right\}$$

ce que l'on note :

$$G = \bigoplus_{i=1}^{r} \mathbb{Z} e_i$$

On se donne un sous-groupe discret G de E non réduit à $\{0\}$ et $m \in \{1, \cdots, n\}$ est la dimension du sous-espace vectoriel $F = \mathrm{Vect}\,(G)$ de E engendré par G.

(a) Justifier l'existence d'une famille $(g_i)_{1 \leq i \leq m}$ d'éléments G formant une base de F.

(b) Montrer que l'ensemble :

$$K = \left\{ \sum_{i=1}^{m} x_i g_i \mid (x_1, \cdots, x_m) \in [0,1]^m \right\}$$

est un compact de E et que $K \cap G$ est fini non vide.
Notons $K \cap G = \{f_1, \cdots, f_p\}$ et $H = \langle K \cap G \rangle$ le sous-groupe de G engendré par $K \cap G$.

(c) Montrer que $H = G$.

(d) Montrer que, pour tout $g \in G$, il existe une suite $(r_i)_{1 \leq i \leq m}$ de nombres rationnels telle que :

$$g = \sum_{i=1}^{m} r_i g_i$$

(e) Montrer qu'il existe un entier $q \in \mathbb{N}^*$ tel que G soit un sous-groupe de $\displaystyle\bigoplus_{i=1}^{m} \mathbb{Z} \left(\frac{1}{q} g_i \right)$.

(f) En déduire le résultat annoncé, à savoir que $G = \displaystyle\bigoplus_{i=1}^{r} \mathbb{Z} e_i$, où $r \in \{1, \cdots, n\}$ et $(e_i)_{1 \leq i \leq r}$ une famille libre dans G.

8. Soit G un sous-groupe fermé de E non discret.

(a) Montrer que G contient une droite vectorielle.

(b) Montrer que l'ensemble E_1 formé de la réunion de toutes les droites vectorielles contenues dans G est un sous-espace vectoriel de E.

(c) On désigne par E_2 un supplémentaire de E_1 dans E et par H le sous-groupe de E, $H = G \cap E_2$.
Montrer que $G = E_1 + H$ et $E_1 \cap H = \{0\}$. On notera $G = E_1 \oplus H$.

(d) Montrer que H est un sous-groupe discret de E.

(e) En déduire qu'il existe deux entiers $1 \leq r < s \leq n$ et une famille libre $(e_i)_{1 \leq i \leq s}$ dans G tels que :

$$G = \bigoplus_{i=1}^{r} \mathbb{Z} e_i \oplus \bigoplus_{i=r+1}^{s} \mathbb{R} e_i$$

9. Décrire les sous-groupes de $\mathbb{R}^2$.

10. Soit $\theta = (\theta_i)_{1 \leq i \leq n} \in \mathbb{R}^n \setminus \mathbb{Q}^n$.
En notant $(e_i)_{1 \leq i \leq n}$ la base canonique de $\mathbb{R}^n$, on désigne par $G = \langle e_1, \cdots, e_n, \theta \rangle$ le sous-groupe de $\mathbb{R}^n$ engendré par $\{e_1, \cdots, e_n, \theta\}$.

   (a) Montrer que G n'est pas discret.

   (b) Montrer qu'il existe des suites $(q_{k,i})_{k \in \mathbb{N}}$ et $(p_k)_{k \in \mathbb{N}}$ d'entiers relatifs, où i est compris entre 1 et n, telles que :
   $$(q_{k,1} - p_k\theta_1, \cdots, q_{k,n} - p_k\theta_n) \neq 0$$
   et :
   $$\lim_{k \to +\infty} q_{k,i} - p_k\theta_i = 0 \ \ (1 \leq i \leq n)$$

   (c) Montrer que, pour tout réel $\varepsilon \in \left]0, 1\right[$, il existe un entier $p \in \mathbb{N}^*$ et des entiers relatifs $q_1, \cdots, q_n$ tels que :
   $$\left|\theta_i - \frac{q_i}{p}\right| \leq \frac{\varepsilon}{p}$$
   (approximation simultanée de Kronecker).