Séries entières de matrices

Ce problème est l'occasion de revoir quelques points de cours :
- espaces normés, suites, séries, ouverts, fermés, applications linéaires continues, compacité, espaces de Banach ;
- polynôme d'interpolation de Lagrange ;
- matrices nilpotentes, valeurs propres, rayon spectral, normes matricielles, diagonalisation, trigonalisation, décomposition de Dunford-Schwarz ;
- calcul différentiel.

$\mathbb{C}$ désigne le corps des nombres complexes.

– I – Algèbres de Banach

Une algèbre de Banach unitaire E est un espace vectoriel normé $(E, \|\cdot\|)$ complexe muni d'une structure d'anneau unitaire et tel que $\|xy\| \leq \|x\| \|y\|$ pour tous x, y dans E (on dit que la norme est sous-multiplicative) et $\|1_E\| = 1$, en désignant par 1_E l'élément neutre pour la multiplication interne de E.

On rappelle qu'une série de terme général x_n est dite normalement convergente dans un espace normé $(E, \|\cdot\|)$ si la série réelle de terme général $\|x_n\|$ est convergente.

1. Soit $(E, \|\cdot\|)$ un espace vectoriel normé.
   (a) Montrer qu'une suite de Cauchy dans $(E, \|\cdot\|)$ qui admet une sous-suite convergente est convergente.
   (b) Montrer que $(E, \|\cdot\|)$ est complet si, et seulement si, toute série normalement convergente dans $(E, \|\cdot\|)$ est convergente.
2. Soit $(E, \|\cdot\|)$ une algèbre de Banach. Montrer que l'application $(x, y) \mapsto xy$ est continue de $E \times E$ dans E. En particulier, pour tout y fixé dans E, l'application $x \mapsto xy$ est continue de E dans E.
3. Soit $(E, \|\cdot\|)$ une algèbre de Banach unitaire et $G(E)$ l'ensemble de tous les éléments inversibles (pour le produit) de E. On vérifie facilement que $G(E)$ est un groupe multiplicatif.
   (a) Montrer que pour tout $x \in E$ tel que $\|x\| < 1$, $1_E - x$ est inversible d'inverse $\displaystyle\sum_{k=0}^{+\infty} x^k$.
   (b) Montrer que $G(E)$ est ouvert dans E.
   (c) Montrer que l'application $x \mapsto x^{-1}$ est continue sur $G(E)$.

– II – Rayon spectral des matrices complexes

$\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ est l'algèbre des matrices carrées d'ordre n à coefficients dans $\mathbb{C}$, $GL_n(\mathbb{C})$ est le groupe multiplicatif des matrices inversibles dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$.

Une matrice $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ est identifiée à l'endomorphisme de $\mathbb{C}^n$ qu'elle définit dans la base canonique.

Une matrice diagonale de termes diagonaux $\lambda_1, \cdots, \lambda_n$ est notée $\mathrm{diag}(\lambda_1, \cdots, \lambda_n)$.

On se donne une norme vectorielle $x \mapsto \|x\|$ sur $\mathbb{C}^n$ et on lui associe la norme matricielle induite sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ définie par :

$$\forall A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C}), \ \|A\| = \sup_{x \in \mathbb{C}^n \setminus \{0\}} \frac{\|Ax\|}{\|x\|} = \sup_{\substack{x \in \mathbb{C}^n \\ \|x\|=1}} \|Ax\|$$

Cette norme est une norme d'algèbre (vérification immédiate) et $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ ainsi normé est une algèbre de Banach (puisque $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ est de dimension finie).

Pour toute matrice $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$, on désigne par $\mathrm{sp}(A)$ l'ensemble de toutes les valeurs propres complexes de A et par :

$$\rho(A) = \max_{\lambda \in \mathrm{sp}(A)} |\lambda|$$

le rayon spectral de A.

On rappelle le résultat suivant.

Théorème 1 (Dunford-Schwarz) *Pour toute matrice $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$, il existe un unique couple de matrices (D, V) tel que D soit diagonalisable, V soit nilpotente, D et V commutent et $A = D + V$. De plus D et V sont des polynômes en A et les valeurs propres de D sont celles de A avec les mêmes multiplicités.*

On note :

$$\mathcal{U}_n(\mathbb{C}) = \{A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C}) \mid U^*U = I_n\}$$

le sous groupe de $GL_n(\mathbb{C})$ formé des matrices unitaires, où $U^* = {}^t\overline{U}$ est la matrice adjointe de U.

On rappelle qu'une matrice unitaire est la matrice de passage de la base canonique de $\mathbb{C}^n$ à une base orthonormée, où $\mathbb{C}^n$ est muni de sa structure hermitienne canonique.

1. Soient $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ et k un entier naturel.
   (a) Montrer $\rho(A) \leq \|A\|$, l'inégalité pouvant être stricte.
   (b) Montrer que $\mathrm{sp}\left(A^k\right) = \left\{\lambda^k \mid \lambda \in \mathrm{sp}(A)\right\}$.
   (c) Montrer $\rho\left(A^k\right) = \rho(A)^k$.
2. Soient $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$.
   (a) Montrer que :
   $$\forall k \geq 1,\ \rho(A) \leq \left\|A^k\right\|^{\frac{1}{k}}$$
   (b) On suppose ici que A est diagonalisable. Montrer qu'il existe une constante réelle $\alpha > 0$ telle que :
   $$\forall k \geq 1,\ \left\|A^k\right\|^{\frac{1}{k}} \leq \alpha^{\frac{1}{k}} \rho(A)$$
   et en déduire que :
   $$\rho(A) = \lim_{k \to +\infty} \left(\left\|A^k\right\|^{\frac{1}{k}}\right).$$
   (c) En utilisant la décomposition de Dunford-Schwarz $A = D + V$, montrer qu'il existe une constante réelle $\beta > 0$ telle que :
   $$\forall k \geq n,\ \left\|A^k\right\| \leq \beta k^n \left\|D^{k-n}\right\|$$
   et en déduire que :
   $$\rho(A) = \lim_{k \to +\infty} \left(\left\|A^k\right\|^{\frac{1}{k}}\right) = \inf_{k \in \mathbb{N}^*} \left(\left\|A^k\right\|^{\frac{1}{k}}\right) \tag{1}$$
   (formule de I. Guelfand).
3. Montrer que, pour toute matrice $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$, on a $\rho(A) = \lim\limits_{k \to +\infty} \left(N\left(A^k\right)^{\frac{1}{k}}\right)$ où $A \mapsto N(A)$ est une norme quelconque sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ (non nécessairement induite par une norme vectorielle).
4. Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$. Montrer que la série $\sum A^k$ est convergente dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ si, et seulement si, $\rho(A) < 1$. En cas de convergence de $\sum A^k$, montrer que $I_n - A$ est inversible d'inverse $\sum\limits_{k=0}^{+\infty} A^k$.

5. Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$. Montrer que $\lim\limits_{k \to +\infty} A^k = 0$ si, et seulement si, $\rho(A) < 1$.
6. Montrer que $\mathcal{U}_n(\mathbb{C})$ est compact dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$.
7. Montrer que, pour toute matrice $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$, il existe une matrice unitaire $U \in \mathcal{U}_n(\mathbb{C})$ telle que U^*AU soit triangulaire supérieure, ce qui revient à dire que A se trigonalise dans une base orthonormée (théorème de Schur).
8. On se propose de montrer que l'application ρ qui associe à toute matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ son rayon spectral est continue, ce qui revient à montrer que si $(A_k)_{k \in \mathbb{N}}$ est une suite de matrices qui converge vers la matrice A dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$, alors la suite $(\rho(A_k))_{k \in \mathbb{N}}$ converge vers $\rho(A)$. dans $\mathbb{R}$.
   (a) Montrer le résultat pour une suite $(T_k)_{k \in \mathbb{N}}$ de matrices triangulaires supérieures qui converge vers une matrice T.
   (b) Montrer qu'une suite réelle est convergente si, et seulement si, elle est bornée et n'a qu'une seule valeur d'adhérence.
   (c) Soit $(A_k)_{k \in \mathbb{N}}$ une suite de matrices qui converge vers la matrice A dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$.
      i. Montrer que la suite $(\rho(A_k))_{k \in \mathbb{N}}$ est bornée dans $\mathbb{R}$.
      ii. Montrer que la suite $(\rho(A_k))_{k \in \mathbb{N}}$ admet $\rho(A)$ pour unique valeur d'adhérence et conclure.
9. Montrer que, pour tout réel $R > 0$, l'ensemble $\{A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C}) \mid \rho(A) < R\}$ est un ouvert de $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$.
10.
   (a) Montrer que, pour toute matrice $P \in GL_n(\mathbb{C})$, l'application $x \mapsto \|x\|_P = \|P^{-1}x\|$ définit une norme sur $\mathbb{C}^n$.
   (b) Montrer que la norme induite sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ par $x \mapsto \|x\|_P$ est $A \mapsto \|A\|_P = \|P^{-1}AP\|$.
   (c) Pour tout réel $\delta > 0$, on note :
   $$D_\delta = \operatorname{diag}\left(1, \delta, \delta^2, \cdots, \delta^{n-1}\right)$$
   Montrer que pour toute matrice triangulaire supérieure $T = ((t_{ij}))_{1 \leq i,j \leq n} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$, on a :
   $$\lim_{\delta \to 0} D_\delta^{-1} T D_\delta = \operatorname{diag}(t_{11}, t_{22}, \cdots, t_{nn})$$
   (d) Montrer que pour toute matrice $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$, il existe une suite de matrices $(P_k)_{k \in \mathbb{N}^*}$ dans $GL_n(\mathbb{C})$ telle que $\lim\limits_{k \to +\infty} P_k^{-1} A P_k = \operatorname{diag}(\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_n)$.
   (e) Montrer que pour toute matrice $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ et tout réel $\varepsilon > 0$, il existe une norme d'algèbre N sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ telle que $N(A) < \rho(A) + \varepsilon$.

– III – Séries matricielles

On rappelle qu'une fonction φ définie sur un ouvert non vide $\mathcal{O}$ d'un espace normé E et à valeurs dans un espace normé F est dite différentiable en $a \in \mathcal{O}$ s'il existe une forme linéaire continue L de E dans F (en dimension finie, linéaire suffit) telle que :

$$\varphi(a+h) = \varphi(a) + L(h) + o(\|h\|)$$

pour tout h dans un voisinage de 0 (ce qui signifie que $\lim\limits_{h \to 0} \frac{1}{\|h\|}(\varphi(a+h) - \varphi(a) - L(h)) = 0$). On note alors $d\varphi(a) = L$.

On désigne par $\sum a_k z^k$ une série entière à coefficients complexes de rayon de convergence $R > 0$ et on note $f(z) = \sum\limits_{k=0}^{+\infty} a_k z^k$ sa somme pour $z \in \mathbb{C}$ tel que $|z| < R$.

1.

(a) Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ diagonalisable de valeurs propres $\lambda_1, \cdots, \lambda_n$ distinctes ou confondues dans $\mathbb{C}$. Montrer que si $\rho(A) < R$, la série $\sum a_k A^k$ est alors convergente et sa somme, $f(A) = \sum\limits_{k=0}^{+\infty} a_k A^k$, est diagonalisable de valeurs propres $f(\lambda_1), \cdots, f(\lambda_n)$.

(b) Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ nilpotente d'indice $r \geq 1$. Montrer que la série $\sum a_k A^k$ est convergente.

(c) Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ telle que $\rho(A) < R$ et $A = D + V$ sa décomposition de Dunford-Schwarz avec D diagonalisable qui commute à V nilpotente d'indice $r \geq 1$.

i. Montrer que, pour tout entier $j \geq 0$, la série $\sum\limits_{k=j}^{+\infty} a_k \dfrac{k!}{(k-j)!} D^{k-j}$ est convergente. On notera $f^{(j)}(D)$ sa somme.

ii. Montrer que la série $\sum a_k A^k$ est convergente de somme :

$$f(A) = \sum_{k=0}^{+\infty} a_k A^k = \sum_{j=0}^{r-1} \frac{1}{j!} f^{(j)}(D) V^j$$

iii. Montrer que la matrice $f(A)$ est un polynôme en A (dont les coefficients dépendent de A).

iv. Peut-on trouver un polynôme $R \in \mathbb{C}[X]$ tel que $f(A) = R(A)$ pour toute matrice $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$?

(d) Montrer que si $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ est telle que $\rho(A) > R$, la série $\sum a_k A^k$ est alors divergente.

2. En utilisant la formule (1) de Guelfand, montrer que pour toute matrice $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ telle que $\rho(A) < R$, la série $\sum a_k A^k$ est normalement convergente.

3. Soit $D \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ diagonalisable telle que $\rho(D) > R$. Montrer qu'il existe un polynôme $R \in \mathbb{C}_{n-1}[X]$ (qui dépend de D) tel que $f(D) = R(D)$.

4.

(a) Montrer que l'application $f : A \mapsto f(A) = \sum\limits_{k=0}^{+\infty} a_k A^k$ est continue sur l'ouvert $\mathcal{D}_R = \{A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C}) \mid \rho(A) < R\}$.

(b) Montrer que la fonction f est différentiable en 0 avec $df(0) = a_1 I_d$.

5. Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$.

(a) Montrer que si $\rho(A) = 0$, la fonction $\varphi : t \mapsto f(tA)$ est alors de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $I = \mathbb{R}$ et préciser sa dérivée.

(b) Montrer que si $0 < \rho(A) < R$, la fonction $\varphi : t \mapsto f(tA)$ est alors de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $I = \left]-\dfrac{R}{\rho(A)}, \dfrac{R}{\rho(A)}\right[$ et préciser sa dérivée.