Comparaison séries et intégrales

Ce problème est en relation avec les leçons suivantes :

- 202 : Séries à termes réels positifs. Applications.
- 203 : Séries à termes réels ou complexes : convergence absolue, semi-convergence (les résultats relatifs aux séries à termes réels positifs étant supposés connus).
- 215 : Comparaison d'une série et d'une intégrale. Applications.
- 221 : Intégrale impropre d'une fonction continue sur un intervalle de $\mathbb{R}$
- 404 : Exemples d'étude de la convergence de séries numériques.
- 405 : Exemples de calcul exact de la somme d'une série numérique.
- 407 : Exemples d'évaluation asymptotique de restes de séries convergentes, de sommes partielles de séries divergentes.
- 408 : Exemples d'étude de séries réelles ou complexes non absolument convergentes.
- 422 : Exemples d'étude d'intégrales impropres.

On pourra consulter les ouvrages suivants :

- C. Deschamps, A. Warusfel. *Mathématiques tout en un. Série E. Ramis. Volumes 2.* Dunod. (1999).
- X. Gourdon. *Les Maths en tête. Analyse.* Ellipses (1994).
- W. J. Kaczor, M. T. Nowak. *Problems in mathematical analysis. Vol. II et III.* American Mathematical Society (2001).
- K. Madere. *Préparation à l'oral de l'agrégation. Leçons d'analyse.* Ellipses (1997).
- A. Pommelet. *Agrégation de mathématiques.* Cours d'analyse. Ellipses (1994).
- J. M. Arnaudies, H. Fraysse. *Cours de mathématiques. Vol. 2 et 3.* Dunod (1989).

– I – Comparaison de $\sum f(n)$ et $\int_0^{+\infty} f(t)\,dt$

Exercice 1 *Soit $f : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}$ une fonction décroissante telle que $\int_0^{+\infty} f(t)\,dt$ converge.*

1. *Montrer que $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = 0$ et que f est à valeurs positives.*
2. *Montrer que $\lim\limits_{x\to+\infty} xf(x) = 0$, c'est-à-dire que $f(x) = \underset{x\to+\infty}{o}\left(\frac{1}{x}\right)$.*
3. *Sans l'hypothèse de décroissance pour f, est-ce que la convergence de $\int_0^{+\infty} f(t)\,dt$ entraîne que $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = 0$?*

Exercice 2 *Soit $f : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^+$ une fonction décroissante à valeurs positives et $F : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^+$ la fonction définie par :*

$$\forall x \in \mathbb{R}^+,\ F(x) = \int_0^x f(t)\,dt$$

1. *Montrer que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par :*

$$\forall n \in \mathbb{N},\ u_n = \sum_{k=0}^{n} f(k) - F(n)$$

   est convergente vers un réel $\ell \in [0, f(0)]$.

2. *Montrer que la série $\sum f(n)$ est de même nature que l'intégrale généralisée $\int_0^{+\infty} f(t)\,dt$.*
3. *Dans le cas où $\int_0^{+\infty} f(t)\,dt = +\infty$, montrer que :*

$$\sum_{k=0}^{n} f(k) \underset{n\to+\infty}{\sim} F(n)$$

4. *Dans le cas où $\int_0^{+\infty} f(t)\,dt < +\infty$ et la suite $\left(\int_n^{+\infty} f(t)\,dt\right)_{n\in\mathbb{N}}$ est à valeurs strictement positives avec $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{\int_{n+1}^{+\infty} f(t)\,dt}{\int_n^{+\infty} f(t)\,dt} = 1$ (ce qui signifie qu'elle converge lentement vers 0), montrer que :*

$$\sum_{k=n+1}^{+\infty} f(k) \underset{n\to+\infty}{\sim} \int_n^{+\infty} f(t)\,dt$$

5. *Donner un exemple où $\int_0^{+\infty} f(t)\,dt < +\infty$ et $\sum_{k=n+1}^{+\infty} f(k)$ n'est pas équivalent à $\int_n^{+\infty} f(t)\,dt$.*
6. *Étudier le cas particulier des fonctions définies sur $[1, +\infty[$ par $f(t) = \frac{1}{t^\alpha}$, où $\alpha \in \mathbb{R}^{+,*}$.*
7. *Étudier le cas particulier des fonctions définies sur $[2, +\infty[$ par $f(t) = \frac{1}{t(\ln(t))^\beta}$, où $\beta > 0$.*

Exercice 3 *En utilisant l'exercice précédent, justifier le développement asymptotique :*

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} = \ln(n) + \gamma + \frac{1}{2n} - \frac{1}{12n^2} + o\left(\frac{1}{n^2}\right)$$

où $\gamma \in [0, 1]$ est la constante d'Euler.

Exercice 4 *Soit $f : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^{+,*}$ une fonction dérivable de dérivée positive et décroissante. Montrer que les séries $\sum f'(n)$ et $\sum \frac{f'(n)}{f(n)}$ sont de même nature.*

Exercice 5 *Soit $(\lambda_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite strictement croissante de réels telle que $\lim_{n\to+\infty} \lambda_n = +\infty$, la suite $(\lambda_{n+1} - \lambda_n)_{n\in\mathbb{N}}$ étant minorée par un réel $m > 0$ et majorée par un réel $M > 0$. Montrer que, pour toute fonction $f : [\lambda_0, +\infty[\to \mathbb{R}^+$ décroissante et à valeurs positives, la série $\sum f(\lambda_n)$ est de même nature que l'intégrale généralisée $\int_{\lambda_0}^{+\infty} f(t)\, dt$.*

Exercice 6

1. *Soit $f : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}$ une fonction décroissante telle que $\int_0^{+\infty} f(t)\, dt$ converge, cette intégrale étant non nulle.*
   Montrer que, pour tout réel $x > 0$, la série $\sum f(nx)$ est convergente et qu'on a :

$$\sum_{n=1}^{+\infty} f(nx) \underset{x\to 0}{\sim} \frac{1}{x} \int_0^{+\infty} f(t)\, dt$$

2. *Montrer que $\lim_{x\to 0} x \sum_{n=1}^{+\infty} e^{-n^2x^2} = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$ et $\lim_{x\to 0} x \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{1 + x^2n^2} = \frac{\pi}{2}$.*

Exercice 7 *Soit $f : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^{+,*}$ une fonction de classe $\mathcal{C}^1$ telle que $\lim_{x\to+\infty} \frac{f'(x)}{f(x)} = \ell \in \mathbb{R}^*$. Montrer que :*

1. *si $\ell > 0$, alors la série $\sum f(n)$ diverge et on a :*

$$\sum_{k=0}^{n} f(k) \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{\ell}{e^\ell - 1} \int_0^{n+1} f(t)\, dt$$

2. *si $\ell < 0$, alors la série $\sum f(n)$ converge et on a :*

$$\sum_{k=n+1}^{+\infty} f(k) \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{\ell}{e^\ell - 1} \int_n^{+\infty} f(t)\, dt$$

3. *Montrer que, pour tout réel $\alpha > 1$, on a :*

$$\sum_{k=1}^{n} \alpha^k \ln(k) \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{\alpha^{n+1}}{\alpha - 1} \ln(n+1)$$

Exercice 8

1. *Soit $f : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{C}$ une fonction de classe $\mathcal{C}^1$ telle que l'intégrale généralisée* $\displaystyle\int_0^{+\infty} |f'(t)|\, dt$ *soit convergente et $F : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{C}$ la fonction définie par :*
$$\forall x \in \mathbb{R}^+,\ F(x) = \int_0^x f(t)\, dt$$
Montrer que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par :
$$\forall n \in \mathbb{N},\ u_n = \sum_{k=0}^{n} f(k) - F(n+1)$$
est convergente et la série $\sum f(n)$ est de même nature que l'intégrale généralisée $\displaystyle\int_0^{+\infty} f(t)\, dt$.
2. *Étudier la série $\displaystyle\sum \frac{1}{n^\alpha}$ où α est un nombre complexe.*
3. *Étudier la série $\displaystyle\sum \frac{\cos(\sqrt{n})}{n}$.*
4. *Étudier la série $\displaystyle\frac{\cos(\ln(n))}{n^\alpha}$ pour tout réel $\alpha > 0$.*

– II – Comparaison de $\sum \int_{x_n}^{x_{n+1}} f(t)\, dt$ et $\int_a^b f(t)\, dt$ où $-\infty < a < b \leq +\infty$

Exercice 9 *Soient $-\infty < a < b \leq +\infty$ et f une fonction continue par morceaux sur $[a, b[$.*
Montrer que l'intégrale de f sur $[a, b[$ est convergente si, et seulement si, pour toute suite croissante $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de points de $[a, b[$ telle que $x_0 = a$, $x_n > a$ pour tout $n \geq 1$ et $\lim\limits_{n\to+\infty} x_n = b$, la série $\displaystyle\sum \int_{x_n}^{x_{n+1}} f(t)\, dt$ est convergente.
Dans ce cas, on a :
$$\int_a^b f(t)\, dt = \sum_{n=0}^{+\infty} \int_{x_n}^{x_{n+1}} f(t)\, dt$$

Exercice 10 *Montrer que, pour $0 < \alpha \leq 1$, l'intégrale $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{|\sin(t)|}{t^\alpha} dt$ est divergente.*

Exercice 11 *Soient $-\infty < a < b \leq +\infty$ et f une fonction continue par morceaux sur $[a, b[$ à valeurs réelles positives.*
Montrer que l'intégrale de f sur $[a, b[$ est convergente si, et seulement si, il existe une suite croissante $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de points de $[a, b[$ avec $x_0 = a$, $x_n > a$ pour tout $n \geq 1$ et $\lim\limits_{n\to+\infty} x_n = b$, telle que la série $\sum \int_{x_n}^{x_{n+1}} f(t)\, dt$ soit convergente.

Exercice 12 *Soient $\alpha \geq 0$ et $\beta > 0$.Montrer que l'intégrale $\displaystyle\int_\pi^{+\infty} \frac{t^\alpha}{1 + t^\beta \sin^2(t)} dt$ est convergente si, et seulement si, $\beta - 2\alpha > 2$.*

Exercice 13 *Soient $-\infty < a < b \leq +\infty$ et $f : [a, b[\to \mathbb{C}$ une fonction continue par morceaux.*
Montrer que, s'il existe une suite croissante $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de points de $[a, b[$ telle que $x_0 = a$, $x_n > a$ pour tout $n \geq 1$, $\lim\limits_{n\to+\infty} x_n = b$ et $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \int_{x_n}^{x_{n+1}} |f(t)|\, dt = 0$, alors la convergence de la série $\displaystyle\sum \int_{x_n}^{x_{n+1}} f(t)\, dt$ entraîne celle de l'intégrale $\displaystyle\int_a^b f(t)\, dt$.

Exercice 14 *Soit* $f : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^+$ *une fonction continue par morceaux et décroissante à valeurs positives telle que* $\lim_{x \to +\infty} f(x) = 0$. *Montrer que* $\int_0^{+\infty} f(t) \sin(t)\, dt$ *converge. Par exemple pour* $f(t) = \frac{1}{t^\alpha (\ln(t))^\beta}$, *où* $\alpha > 0$ *et* $\beta \geq 0$, *l'intégrale* $\int_0^{+\infty} \frac{\sin(t)}{t^\alpha (\ln(t))^\beta} dt$ *est convergente.*

– III – Utilisation des permutations des signes $\sum$ et $\int$

Exercice 15 *En utilisant le développement en série entière de* $\frac{1}{1+x^p}$, *pour tout entier* $p \geq 1$, *et en intégrant terme à terme sur* $[0, 1]$ *la série obtenue, montrer de façon élémentaire que :*

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{pn+1} = \int_0^1 \frac{dx}{1+x^p}$$

Exercice 16 *Montrer que, pour tout réel* $\alpha > 0$, *on a :*

$$\int_0^{+\infty} \frac{\sin(x)}{e^{\alpha x} - 1} dx = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{1 + n^2 \alpha^2}$$

Exercice 17 *Montrer que, pour tout réel* $\alpha > 0$, *on a :*

$$\int_0^{+\infty} \frac{x}{e^x - 1} dx = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}$$

Exercice 18 *Montrer que pour tout nombre complexe* α *tel que* $\Re(\alpha) > 0$, *on a :*

$$\int_0^{+\infty} \frac{x^\alpha}{e^x - 1} dx = \Gamma(\alpha + 1) \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^{\alpha+1}}$$

où $\Gamma(z) = \int_0^{+\infty} x^{z-1} e^{-x} dx$ *pour* $\Re(z) > 0$.

Exercice 19 *On désigne par* $\mathcal{H}$ *le demi plan complexe défini par :*

$$\mathcal{H} = \{z \in \mathbb{C} \mid \Re(z) > 0\}$$

Montrer que :

$$\forall (z, \alpha) \in \mathcal{H} \times \mathbb{R}^{+,*}, \ \int_0^{+\infty} \frac{t^z e^{-\alpha t}}{1 - e^{-t}} dt = \Gamma(z+1) \zeta(z+1, \alpha)$$

où ζ *est la fonction dzéta de Hurwitz définie par :*

$$\forall (z, \alpha) \in \mathcal{H} \times \mathbb{R}^{+,*}, \ \zeta(z+1, \alpha) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{(n+\alpha)^{z+1}}$$

En particulier, pour $\alpha = 1$, *on a :*

$$\forall z \in \mathcal{H}, \ \int_0^{+\infty} \frac{t^z}{e^t - 1} dt = \Gamma(z+1) \zeta(z+1)$$

où ζ *est la fonction dzéta de Riemann.*

Exercice 20

1. *Montrer que, tout réel x et tout réel $t \in]-1,1[$ la série* $\sum t^{n-1}\sin(nx)$ *est convergente et calculer sa somme. On notera $f(x,t)$ cette somme.*
2. *Montrer que, pour tout réel $x \in]0,\pi[$, on a :*

$$\int_0^1 f(x,t)\,dt = \frac{\pi - x}{2}$$

3. *Monter que, pour tout réel $x \in]0,\pi[$, on a :*

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\sin(nx)}{n} = \frac{\pi - x}{2}$$

Exercice 21 ***Utilisation d'une intégrale double pour calculer*** $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2}$

1. *Montrer que :*

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2} = -\int_0^1 \frac{\ln(1-y)}{y}dy$$

2. *En déduire que :*

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2} = \int\int_{[0,1]^2} \frac{dxdy}{1-xy}$$

3. *Montrer que l'application $\varphi : (u,v) \mapsto (u-v, u+v)$ est un $\mathcal{C}^1$-difféomorphisme de $\mathbb{R}^2$ sur lui même et préciser son inverse.*
4. *Déterminer l'image par φ^{-1} du carré $[0,1]^2$.*
5. *Montrer que pour tout $u \in]0,1[$, on a :*

$$\arctan\left(\frac{u}{\sqrt{1-u^2}}\right) = \arcsin(u)$$

et :

$$\arctan\left(\frac{1-u}{\sqrt{1-u^2}}\right) = \frac{\pi}{4} - \frac{\arcsin(u)}{2}$$

6. *En utilisant le changement de variable $(x,y) = \varphi(u,v)$, montrer que* $\iint \frac{dxdy}{1-xy} = \frac{\pi^2}{6}$ *et en conséquence* $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}$.