Théorème de Rolle et formules de Taylor

1 Extrémums des fonctions différentiables à valeurs réelles

1. Soient K un compact d'un espace vectoriel normé $(E, \|\cdot\|)$ et f une fonction définie sur K à valeurs dans $\mathbb{R}$.
   Montrer que si f est continue alors f est bornée et atteint ses bornes. C'est-à-dire qu'il existe x_1 et x_2 dans K tels que :
   $$f(x_1) = \inf_{x \in K} f(x), \quad f(x_2) = \sup_{x \in K} f(x).$$
2. On note $E = \mathcal{C}^0([a,b], \mathbb{R})$ l'espace vectoriel des applications continues sur l'intervalle $[a,b]$ $(a < b)$ et à valeurs dans $\mathbb{R}$ et on munit cet espace de la norme :
   $$f \mapsto \|f\|_\infty = \sup_{x \in [a,b]} |f(x)|.$$
   Soient f une fonction appartenant à $E - \{0\}$ et $\mathcal{B}(0, 2\|f\|)$ la boule fermée de centre 0 et de rayon $2\|f\|$.
   (a) Montrer que $\mathcal{B}_{n,f} = \mathbb{R}_n[x] \cap \mathcal{B}(0, 2\|f\|)$ est compacte dans $\mathbb{R}_n[x]$.
   (b) Montrer qu'il existe un polynôme P dans $\mathcal{B}_{n,f}$ tel que :
   $$\|f - P\|_\infty = \inf_{Q \in \mathcal{B}_{n,f}} \|f - Q\|_\infty.$$
   (c) Montrer que :
   $$\|f - P\|_\infty = \inf_{Q \in \mathbb{R}_n[x]} \|f - Q\|_\infty.$$
3. Soient $\mathcal{O}$ un ouvert non vide d'un espace vectoriel normé $(E, \|\cdot\|)$, $f : \mathcal{O} \to \mathbb{R}$ une fonction différentiable en un point $a \in \mathcal{O}$. Montrer que si f admet un extremum local en a alors $df(a) = 0$ (considérer, pour tout vecteur $h \in E$, la fonction d'une variable réelle φ définie au voisinage de 0 par $\varphi(t) = f(a + th)$).

2 Le théorème de Rolle

1. Soient K un compact d'un espace vectoriel normé $(E, \|\cdot\|)$ d'intérieur non vide, f une fonction continue de K dans $\mathbb{R}$ différentiable sur l'intérieur de K et constante sur la frontière de K, $\mathrm{Fr}(K) = K \setminus \overset{\circ}{K}$. Montrer qu'il existe alors un élément $c \in \overset{\circ}{K}$ tel que $df(c) = 0$.
2. Montrer que si f est une fonction à valeurs réelles définie sur un intervalle fermé $[a, +\infty[$, continue sur cet intervalle et dérivable sur l'intervalle ouvert $]a, +\infty[$ avec $\lim_{x \to +\infty} f(x) = f(a)$, alors il existe un point $c \in]a, +\infty[$ tel que $f'(c) = 0$.
3. Montrer que si $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ est dérivable avec $\lim_{x \to -\infty} f(x) = \lim_{x \to +\infty} f(x)$, alors il existe c dans $\mathbb{R}$ tel que $f'(c) = 0$.
4. Monter que si f est une fonction à valeurs réelles de classe $\mathcal{C}^m$ sur un intervalle réel I, où m est un entier naturel, qui s'annule en $m+1$ points de I distincts, alors il existe un point c dans I tel que $f^{(m)}(c) = 0$.

5. On peut donner une autre démonstration du théorème de Rolle pour les fonctions d'une variable réelle basée sur un principe de dichotomie. L'idée repose sur les trois résultats suivants, où f est une fonction à valeurs réelles définie sur un intervalle compact $[a,b]$ non réduit à un point, continue sur cet intervalle et telle que $f(a) = f(b)$.

   (a) Montrer qu'il existe un intervalle $[\alpha,\beta] \subset [a,b]$ tel que $\beta - \alpha = \dfrac{b-a}{2}$ et $f(\alpha) = f(\beta)$ (utiliser la fonction g définie sur $J = \left[a, a + \dfrac{b-a}{2}\right]$ par $g(x) = f\left(x + \dfrac{b-a}{2}\right) - f(x)$).

   (b) Montrer qu'il existe un intervalle $[\alpha,\beta] \subset]a,b[$ tel que $\beta - \alpha \leq \dfrac{b-a}{2}$ et $f(\alpha) = f(\beta)$.

   (c) Montrer qu'il existe une suite $([a_n, b_n])_{n\geq 1}$ d'intervalles strictement emboîtés (i. e. $[a_{n+1}, b_{n+1}] \subset]a_n, b_n[$) dans $]a,b[$ telle que pour tout $n \geq 1$ on ait :

$$b_{n+1} - a_{n+1} \leq \frac{b_n - a_n}{2}, \quad f(a_n) = f(b_n).$$

   (d) En déduire le théorème de Rolle pour les fonctions d'une variable réelle (utiliser le théorème des segments emboîtés).

3 Le théorème des accroissements finis

1. Montrer que si f est une fonction à valeurs réelles définie sur un intervalle compact $[a,b]$ non réduit à un point, continue sur cet intervalle et dérivable sur l'intervalle ouvert $]a,b[$, alors il existe un point $c \in]a,b[$ tel que $f(b) - f(a) = f'(c)(b-a)$.
2. Soit f est une fonction à valeurs réelles définie et différentiable sur un ouvert $\mathcal{O}$ de $\mathbb{R}^n$. Montrer que si a, b sont deux points distincts de $\mathcal{O}$ tels que le segment $[a,b]$ soit contenu dans $\mathcal{O}$, alors il existe un point $c \in]a,b[$ tel que :

$$f(b) - f(a) = df(c)(b-a) = \sum_{k=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial x_k}(c)(b_k - a_k).$$

3. Montrer que si f est une fonction à valeurs dans $\mathbb{R}^n$ (ou plus généralement dans un espace préhilbertien) définie sur un intervalle compact $[a,b]$ non réduit à un point, continue sur cet intervalle et dérivable sur l'intervalle ouvert $]a,b[$, alors il existe un point $c \in]a,b[$ tel que $\|f(b) - f(a)\| \leq \|f'(c)\|(b-a)$ où $\|\cdot\|$ désigne la norme euclidienne usuelle sur $\mathbb{R}^n$ (utiliser la fonction g définie sur $[a,b]$ par $g(x) = \langle f(x) \mid f(b) - f(a)\rangle$, où $\langle \cdot \mid \cdot \rangle$ désigne le produit scalaire euclidien usuel sur $\mathbb{R}^n$ et l'inégalité de Cauchy-Schwarz).
4. Montrer que si f, g sont deux fonctions à valeurs réelles définies sur un intervalle compact $[a,b]$ non réduit à un point, continues sur cet intervalle et dérivables sur l'intervalle ouvert $]a,b[$, alors il existe un point $c \in]a,b[$ tel que $(f(b) - f(a))\, g'(c) = (g(b) - g(a))\, f'(c)$ (introduire $g(x) = \lambda g(x) - \mu f(x)$ avec λ, μ bien choisis).
5. Soient f une fonction définie sur $[a,b]$ à valeurs dans $\mathbb{R}^p$ (ou plus généralement dans un espace vectoriel normé E) et g une fonction définie sur $[a,b]$ à valeurs dans $\mathbb{R}$, continues sur $[a,b]$ et dérivables sur $]a,b[$.

   (a) On suppose dans un premier temps que $\|f'(x)\| < g'(x)$ pour tout $x \in]a,b[$. On se fixe un réel $\alpha \in]a,b[$ et on note :

$$E = \{x \in [\alpha, b] \mid \|f(x) - f(\alpha)\| > g(x) - g(\alpha)\}.$$

      i. Montrer que E est ouvert dans $[\alpha, b]$.

ii. En supposant E non vide, on note γ sa borne inférieure. Montrer que $\gamma \in \left]\alpha, b\right[$, $\gamma \notin E$ et en déduire une contradiction.

iii. Montrer que $\|f(b) - f(a)\| \leq g(b) - g(a)$ ..

(b) Montrer que si $\|f'(x)\| \leq g'(x)$ pour tout $x \in \left]a, b\right[$ alors $\|f(b) - f(a)\| \leq g(b) - g(a)$ (remplacer g par la fonction $g_\varepsilon : x \mapsto g(x) + \varepsilon x$ avec $\varepsilon > 0$ quelconque).

4 La formule de Taylor-Lagrange

1. Montrer que si f est une fonction à valeurs réelles définie sur un intervalle compact $[a, b]$ non réduit à un point, de classe $\mathcal{C}^n$ sur cet intervalle et $n+1$ fois dérivable sur l'intervalle ouvert $\left]a, b\right[$, alors il existe un point $c \in \left]a, b\right[$ tel que :

$$f(b) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(a)}{k!} (b-a)^k + \frac{f^{(n+1)}(c)}{(n+1)!} (b-a)^{n+1}.$$

2. Montrer que si f est une fonction à valeurs dans $\mathbb{R}^p$ (ou plus généralement dans un espace vectoriel normé E) définie sur un intervalle compact $[a, b]$ non réduit à un point, de classe $\mathcal{C}^n$ sur cet intervalle et $n+1$ fois dérivable sur l'intervalle ouvert $\left]a, b\right[$ avec $f^{(n+1)}$ majoré sur $\left]a, b\right[$ par une constante M, alors :

$$\left\| f(b) - \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(a)}{k!} (b-a)^k \right\| \leq \frac{M}{(n+1)!} (b-a)^{n+1}$$

(utiliser les fonctions g, h définies sur $[a, b]$ respectivement par $g(x) = f(b) - \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(x)}{k!} (b-x)^k$ et $h(x) = -\frac{M}{(n+1)!} (b-x)^{n+1}$).

5 Formule de Taylor avec reste intégral

1. Soit $n \in \mathbb{N}$. Montrer que si f est une fonction à valeurs réelles (ou dans un espace de Banach) définie et de classe $\mathcal{C}^{n+1}$ sur un intervalle compact $[a, b]$ non réduit à un point, alors :

$$f(b) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(a)}{k!} (b-a)^k + \int_a^b \frac{f^{(n+1)}(t)}{n!} (b-t)^n \, dt.$$

6 Théorème de Darboux

1. Montrer que si f est une fonction à valeurs réelles définie et dérivable sur un intervalle I, alors sa fonction dérivée f' vérifie la propriété des valeurs intermédiaires (si $f'(a) < f'(b)$ et $\lambda \in \left]f'(a), f'(b)\right[$, considérer la fonction $\varphi(x) = f(x) - \lambda x$).
2. Montrer qu'il existe des fonctions qui vérifient la propriété des valeurs intermédiaires sans être continue.
3. Montrer que si f est une fonction à valeurs réelles définie sur un intervalle I vérifiant la propriété des valeurs intermédiaires (i. e. pour tout intervalle J contenu dans I, $f(J)$ est un intervalle) alors f est continue si et seulement si pour tout réel y, l'ensemble $f^{-1}\{y\}$ est fermé dans I.

7 Applications du théorème de Rolle

1. *Racines de polynômes.* Monter que si P est un polynôme réel de degré $n \geq 2$ scindé sur $\mathbb{R}$ alors il en est de même de son polynôme dérivé. Précisément si $\lambda_1 < \lambda_2 < \cdots < \lambda_p$ sont les racines réelles distinctes de P avec $p \geq 2$, la racine λ_j étant de multiplicité $m_j \geq 1$ ($\sum\limits_{j=1}^{p} m_j = n$), alors le polynôme dérivé P' admet les réels λ_j pour racines de multiplicités respectives $m_j - 1$, pour1 $\leq j \leq p$ (une multiplicité nulle signifie que λ_j n'est pas racine de P') et des racines simples $\mu_j \in \left]\lambda_j, \lambda_{j+1}\right[$ pour $1 \leq j \leq p-1$.
2. *Racines de polynômes.* Soit $n \geq 2$, a, b réels et $P(x) = x^n + ax + b$. Montrer que si n est pair alors P a au plus 2 racines réelles et si n est impair alors P a au plus 3 racines réelles.
3. Montrer que pour tout entier n, on a :
$$\left(\frac{1}{1+x^2}\right)^{(n)} = \frac{P_n(x)}{(1+x^2)^{n+1}},$$
où P_n est un polynôme de degré n avec n racines réelles.
4. *Racines des polynômes de Legendre.* Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on note $\pi_{2n}(x) = (x^2-1)^n$ et $L_n = \pi_{2n}^{(n)}$. Les polynômes L_n sont les polynômes de Legendre sur $[-1,1]$.
   (a) Montrer que, pour $n \geq 1$ et $k \in \{0, \cdots, n-1\}$, le polynôme $\pi_{2n}^{(k)}$ s'annule en -1, 1 et en k points distincts de $\left]-1,1\right[$.
   (b) Monter que pour $n \geq 1$, le polynôme L_n admet n racines réelles simples dans l'intervalle $\left]-1,1\right[$.
5. *Racines des polynômes de Laguerre.* Soit $\alpha > -1$. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on définit le polynôme $L_{\alpha,n}$ par $(x^{n+\alpha}e^{-x})^{(n)} = L_{\alpha,n}(x)\, x^\alpha e^{-x}$. Les polynômes $L_{\alpha,n}$ sont les polynômes de Laguerre sur $\left]0,+\infty\right[$. Montrer que pour tout réel $\alpha > -1$ et tout entier $n \geq 1$, le polynôme $L_{\alpha,n}$ admet n racines réelles distinctes dans $\left]0,+\infty\right[$.
6. *Racines des polynômes d'Hermite.* Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on définit le polynôme H_n par $\left(e^{-x^2}\right)^{(n)} = H_n(x)\, e^{-x^2}$. Les polynômes H_n sont les polynômes d'Hermite sur $\mathbb{R}$. Montrer que pour tout $n \geq 1$, le polynôme H_n admet n racines réelles distinctes.
7. *Majoration de l'erreur dans l'interpolation de Lagrange.*
Soient $I = [a,b]$ un intervalle réel fermé borné avec $a < b$, n un entier naturel non nul et $(x_i)_{0 \leq i \leq n}$ une suite de réels deux à deux distincts dans I. À toute fonction f définie sur I et à valeurs réels on associe le polynôme d'interpolation de Lagrange $L_n(f)$ défini par :
$$\begin{cases} L_n(f) \in \mathbb{R}_n[x], \\ L_n(f)(x_i) = f(x_i) \quad (0 \leq i \leq n). \end{cases}$$
Pour $n \geq 1$, on note π_{n+1} la fonction polynomiale définie par :
$$\pi_{n+1}(x) = \prod_{i=0}^{n} (x - x_i).$$
Montrer que si f est une fonction de classe $\mathcal{C}^{n+1}$ sur l'intervalle I, alors pour tout x dans I il existe un point c_x appartenant à I tel que :
$$f(x) - L_n(f)(x) = \frac{1}{(n+1)!}\pi_{n+1}(x)\, f^{(n+1)}(c_x).$$
8. *Un critère de convexité.* Soit I un intervalle réel non réduit à un point. Montrer que si $f : I \longrightarrow \mathbb{R}$ est une fonction deux fois dérivable telle que $f''(x) \geq 0$ pour tout $x \in I$, alors f est convexe.

8 Applications du théorème des accroissements finis

1. *Sens de variation d'une fonction.*
   (a) Montrer que si f est une fonction à valeurs réelles dérivable sur un intervalle réel I, alors f est croissante sur I si et seulement si $f'(x) \geq 0$ pour tout x dans I.
   (b) Soient f, g deux fonctions dérivables sur un intervalle réel I.
      i. Montrer que la fonction f est décroissante sur I si et seulement si $f'(x) \leq 0$ pour tout x dans I.
      ii. Montrer que la fonction f est constante sur I si et seulement si $f'(x) = 0$ pour tout x dans I.
      iii. Montrer que si $f'(x) > 0$ [resp. $f'(x) < 0$] pour tout x dans I, alors la fonction f est strictement croissante [resp. strictement décroissante] sur I.
      iv. Montrer que si $f'(x) \leq g'(x)$ pour tout x dans $I = [a, b]$, alors :
      $$\forall x \in [a, b], \quad f(x) - f(a) \leq g(x) - g(a).$$
      v. Montrer que si $m \leq f'(x) \leq M$ pour tout x dans $I = [a, b]$, alors :
      $$\forall x \in [a, b], \quad m(x-a) \leq f(x) - f(a) \leq M(x-a).$$

2. Les résultats précédents peuvent aussi se démontrer en utilisant le principe de dichotomie sans utiliser le théorème des accroissements finis. Pour ce faire on introduit la notation suivante, où I est un intervalle réel d'intérieur non vide, f une fonction à valeurs réelles définie sur I et x, y deux points distincts de I :
   $$\tau(x, y) = \frac{f(y) - f(x)}{y - x}.$$
   (a) Soient $a < b$ dans I. Montrer que pour tout $c \in]a, b[$, $\tau(a, b)$ est entre $\tau(a, c)$ et $\tau(c, b)$.
   (b) En déduire, en utilisant le principe de dichotomie, que si f est dérivable sur I avec $f'(x) \geq 0$ pour tout x dans I, alors la fonction f est croissante.

3. *Limites et dérivation.*
   (a) Soit f une fonction à valeurs réelles continue sur $[a, b]$ et dérivable sur $]a, b[\setminus \{c\}$ où c est un point de $]a, b[$. Montrer que si la fonction dérivée f' a une limite ℓ en c, alors f est dérivable en c avec $f'(c) = \ell$.
   (b) Montrer que la fonction f définie par $f(0) = 0$ et $f(x) = e^{-\frac{1}{x^2}}$ pour $x \neq 0$ est indéfiniment dérivable sur $\mathbb{R}$ avec $f^{(n)}(0) = 0$ pour tout entier naturel n. On dispose ainsi d'une fonction de classe $\mathcal{C}^\infty$ qui n'est pas développable en série entière au voisinage de 0.
   (c) Soient f, g deux fonctions à valeurs réelles continues sur un intervalle ouvert I, dérivables sur $I \setminus \{c\}$ avec $g'(x) \neq 0$ pour tout $x \in I \setminus \{c\}$ où $c \in I$. Montrer que si $\lim\limits_{x \to c} \dfrac{f'(x)}{g'(x)} = \ell$ alors $\lim\limits_{x \to c} \dfrac{f(x) - f(c)}{g(x) - g(c)} = \ell$.
   (d) Montrer que la réciproque du résultat précédent est fausse.
   (e) Soit f une fonction dérivable de $]0, +\infty[$ dans $\mathbb{R}$ telle que $\lim\limits_{x \to +\infty} f'(x) = \ell$. Montrer que $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{f(x)}{x} = \ell$.
   (f) Soit f une fonction dérivable de $]0, 1[$ dans $\mathbb{R}$ de dérivée bornée. Montrer que f se prolonge par continuité en 0 et 1.

4. *Intégration et dérivation.*

   (a) En utilisant la fonction $f : x \mapsto \dfrac{x}{\ln(|x|)} \cos\left(\dfrac{1}{x}\right)$ sur $I = \left[-\dfrac{1}{2}, \dfrac{1}{2}\right]$ prolongée par continuité en 0 avec $f(0) = 0$, montrer que si f est une fonction dérivable sur $[a, b]$ le résultat $\displaystyle\int_a^b f'(x)\,dx = f(b) - f(a)$ n'est pas toujours assuré.

   (b) Montrer que si f est une fonction dérivable sur $[a, b]$ avec f' Riemann-intégrable sur $[a, b]$ alors :
   $$\int_a^b f'(x)\,dx = f(b) - f(a).$$

   (c) Montrer que si f, g sont deux fonctions dérivables sur $[a, b]$ avec f', g' Riemann-intégrables sur $[a, b]$ alors :
   $$\int_a^b f(x)\,g'(x)\,dx = f(b)\,g(b) - f(a)\,g(a) - \int_a^b f'(x)\,g(x)\,dx.$$

5. *Longueur d'un arc géométrique.* Soit γ un arc géométrique compact paramétré par une application continue $\gamma : [a, b] \to \mathbb{R}^n$.
   À toute subdivision de $[a, b]$:
   $$\sigma = \left\{(t_0, t_1, ..., t_p) \in \mathbb{R}^{p+1} \mid a = t_0 < t_1 < ... < t_p = b\right\}$$
   on associe la ligne polygonale γ_σ de sommets $M_i = \gamma(t_i)$ $(0 \leq i \leq p)$. Une telle ligne polygonale peut être définie par la paramétrisation $\gamma_\sigma : [a, b] \to \mathbb{R}^n$, avec :
   $$\forall i \in \{0, \cdots, p-1\}, \quad \forall t \in [t_i, t_{i+1}], \quad \gamma_\sigma(t_i) = (1-t)\,M_i + tM_{i+1}.$$
   La longueur de γ_σ est alors naturellement définie par :
   $$L(\gamma_\sigma) = \sum_{i=0}^{p-1} \|M_i M_{i+1}\| = \sum_{i=0}^{p-1} \|\gamma(t_{i+1}) - \gamma(t_i)\|.$$
   On dit que l'arc paramétré continu $\gamma : [a, b] \to \mathbb{R}^n$ est rectifiable si :
   $$\sup\{L(\gamma_\sigma) \mid; \sigma \text{ subdivision de } [a, b]\}$$
   est fini. Dans ce cas cette borne supérieure est la longueur de l'arc paramétré $(\gamma, [a, b])$ et on la note $L(\gamma, [a, b])$.
   Si $f = \gamma \circ \varphi$ est une autre paramétrisation de γ sur l'intervalle $[\alpha, \beta]$, alors l'homéomorphisme φ permet de réaliser une bijection de l'ensemble des subdivisions de $[\alpha, \beta]$ sur l'ensemble des subdivisions de $[a, b]$ (si φ est décroissante alors cette bijection inverse l'ordre des points des subdivisions) et on a $L(\gamma, [a, b]) = L(f, [\alpha, \beta])$. C'est-à-dire que la longueur d'un arc géométrique (quand elle est définie) ne dépend pas du choix d'une paramétrisation. De manière précise, on peut donner la définition suivante.
   Soit γ un arc géométrique compact et continu. On dit qu'il est rectifiable si pour toute paramétrisation $\gamma : [a, b] \to \mathbb{R}^n$, $(\gamma, [a, b])$ est rectifiable. La longueur de γ est alors la longueur de $(\gamma, [a, b])$ et on la note $L(\gamma)$.

   (a) Montrer que si γ est un arc géométrique compact de classe $\mathcal{C}^1$ paramétré par $\gamma : [a, b] \to \mathbb{R}^n$, alors il est rectifiable et sa longueur est donnée par :
   $$L(\gamma) = \int_a^b \|\gamma'(t)\|\,dt.$$

(b) En utilisant l'arc géométrique paramétré par :

$$\begin{array}{llll} \gamma : & [0,1] & \rightarrow & \mathbb{R}^2 \\ & t & \longmapsto & \gamma(t) = (t, y(t)) \end{array}$$

où :

$$y(t) = \left\{ \begin{array}{l} t \sin\left(\dfrac{\pi}{t}\right) \text{ si } t \neq 0 \\ 0 \text{ si } t = 0 \end{array} \right.$$

montrer qu'une courbe continue non dérivable n'est pas nécessairement rectifiable

6. *Points fixes attractifs et répulsifs.* Pour cet exercice, I désigne un intervalle fermé de $\mathbb{R}$ (non nécessairement borné) et f une fonction définie sur I à valeurs réelles telle que $f(I) \subset I$. On dit que l'intervalle I est stable par f.
On dit que $\alpha \in I$ est un point fixe de f si $f(\alpha) = \alpha$.
L'idée de la méthode des approximations successives pour obtenir une valeur approchée d'un point fixe de la fonction f est de construire la suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de points de I par la relation de récurrence :

$$\left\{ \begin{array}{l} x_0 \in I, \\ \forall n \in \mathbb{N}, \quad x_{n+1} = f(x_n). \end{array} \right.$$

Si cette suite converge vers $\alpha \in I$ et si la fonction f est continue on a alors nécessairement $\alpha = f(\alpha)$, c'est-à-dire que α est un point fixe de f dans I.
Avec les notations qui précèdent on dit que la suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite d'approximations successives du point fixe α de premier terme (ou de valeur initiale) x_0.
On dit que la fonction f est strictement contractante s'il existe un réel $\lambda \in [0,1[$ tel que :

$$\forall (x,y) \in I \times I, \quad |f(x) - f(y)| \leq \lambda |x - y|.$$

On dit que λ est une constante de contraction pour f.

(a) Soit $f : I \longrightarrow I$ strictement contractante de constante de contraction $\lambda \in [0,1[$. Montrer que la fonction f admet alors un unique point fixe $\alpha \in I$. De plus pour tout $x_0 \in I$ la suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad x_{n+1} = f(x_n)$$

converge vers α et une majoration de l'erreur est donnée par :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad |x_n - \alpha| \leq \frac{|x_1 - x_0|}{1 - \lambda} \lambda^n.$$

(b) Montrer que si $f : I \longrightarrow I$ est dérivable sur $\overset{\circ}{I}$ avec $\sup\limits_{x \in \overset{\circ}{I}} |f'(x)| = \lambda < 1$ alors f admet un unique point fixe $\alpha \in I$ et ce point fixe est limite de toute suite d'approximations successives de valeur initiale $x_0 \in I$.

(c) Soit $f \in \mathcal{C}^1(I)$ admettant un unique point fixe $\alpha \in \overset{\circ}{I}$.

i. Montrer que si $|f'(\alpha)| < 1$ alors il existe un réel $\eta > 0$ tel que l'intervalle $[\alpha - \eta, \alpha + \eta]$ soit stable par f et pour tout $x_0 \in [\alpha - \eta, \alpha + \eta]$ la suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par $x_{n+1} = f(x_n)$ converge vers α (point fixe attractif).

ii. Montrer que si $|f'(\alpha)| > 1$ et $f(I) \subset I$ alors pour tout $x_0 \in I$ la suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par $x_{n+1} = f(x_n)$ est soit stationnaire (sur α) à partir d'un certain rang soit divergente (point fixe répulsif).

iii. Que peut-on dire dans le cas où $|f'(\alpha)| = 1$.

7. *Majoration de l'erreur dans la méthode de Simpson.*

   (a) Soit g une fonction à valeurs réelles de classe $\mathcal{C}^4$ sur $[-1,1]$. On désigne par φ la fonction définie sur $[0,1]$ par :

   $$\forall x \in [0,1], \quad \varphi(x) = \int_{-x}^{x} g(t)\,dt - \frac{x}{3}\left(g(-x) + 4g(0) + g(x)\right)$$

   (erreur dans la méthode de Simpson sur $[-x,x]$).

      i. Montrer que pour tout $x \in [0,1]$ on a $|\varphi'''(x)| \leq 2\dfrac{x^2}{3}L_4$, où :

      $$L_4 = \sup_{x\in[-1,1]} \left|g^{(4)}(x)\right|.$$

      ii. En déduire que pour tout $x \in [0,1]$ on a $|\varphi(x)| \leq \dfrac{x^5}{90}L_4$.

   (b) Soit f une fonction à valeurs réelles de classe $\mathcal{C}^4$ sur un intervalle $[a,b]$. Montrer que :

   $$\left|\int_a^b f(x)\,dx - \frac{b-a}{6}\left(f(a) + 4f\left(\frac{a+b}{2}\right) + f(b)\right)\right| \leq \frac{M_4}{2880}(b-a)^5,$$

   où $M_4 = \sup\limits_{x\in[a,b]} \left|f^{(4)}(x)\right|$.
   Cette méthode est encore valable pour la méthode du point milieu ou la méthode du trapèze, mais elle ne s'applique aux méthodes de Newton-Cotes plus générales.

8. *Convergence uniforme de suites de fonctions.*

   (a) Soit $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de fonctions continues de $[a,b]$ dans $\mathbb{R}$, dérivables sur $]a,b[$, qui converge simplement vers une fonction f. Montrer que s'il existe une constante $M > 0$ telle que $|f_n'(x)| \leq M$ pour tout n et tout x dans $]a,b[$, alors la suite $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge uniformément et f est continue.

   (b) Soit $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de fonctions dérivables de $[a,b]$ dans $\mathbb{R}$ telle que la suite $(f_n')_{n\in\mathbb{N}}$ converge uniformément sur $[a,b]$ vers une fonction g et qu'il existe $x_0 \in [a,b]$ tel que la suite $(f_n(x_0))_{n\in\mathbb{N}}$ soit convergente.

      i. Montrer, en utilisant le critère de Cauchy uniforme, que la suite $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge uniformément vers une fonction f.

      ii. Montrer que pour $x \neq y$ dans $[a,b]$ et $n \in \mathbb{N}$ on a :

      $$\left|\frac{f(x)-f(y)}{x-y} - g(x)\right| \leq 2\left\|g - f_n'\right\|_\infty + \left|\frac{f_n(x)-f_n(y)}{x-y} - f_n'(x)\right|.$$

      iii. En déduire que la fonction f est dérivable et que $f' = g$.

9. *Existence de primitives.*

   (a) Montrer que toute fonction continue sur un intervalle compact est limite uniforme d'une suite de fonctions affines par morceaux et continues.

   (b) En utilisant l'exercice qui précède (donc sans utiliser de théorie de l'intégration) montrer que toute fonction continue sur un intervalle compact admet des primitives.

10. *Dérivées partielles.*

(a) Soient $\mathcal{O}$ un ouvert de $\mathbb{R}^n$ et f une fonction définie sur $\mathcal{O}$ à valeurs réelles (ou dans un espace normé) admettant des dérivées partielles par rapport à toutes les variables en tout point de $\mathcal{O}$. Montrer que si ces dérivées partielles sont continues en un point a de $\mathcal{O}$ alors f est différentiable en a.

(b) Soient $\mathcal{O}$ un ouvert de $\mathbb{R}^2$ et f une fonction définie sur $\mathcal{O}$ à valeurs réelles admettant sur $\mathcal{O}$ des dérivées partielles $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}$ et $\dfrac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}$ continues en un point (a,b) de $\mathcal{O}$. Montrer que :

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(a,b) = \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(a,b).$$

(c) En utilisant l'exemple de la fonction f définie sur $\mathbb{R}^2$ par $f(0,0) = 0$ et $f(x,y) = \dfrac{xy(x^2-y^2)}{x^2+y^2}$ pour $(x,y) \neq (0,0)$ montrer que le résultat précédent est faux si on en enlève l'hypothèse de continuité des dérivées partielles d'ordre 2.

11. *Théorème de Darboux.* Donner une démonstration du théorème de Darboux qui utilise le théorème des accroissements finis.

12. *Nombres de Liouville.* On dit qu'un réel α est algébrique s'il existe un polynôme P non nul à coefficients entiers relatifs tel que $P(\alpha) = 0$. Parmi tous ces polynômes il en existe un de degré minimal et en le divisant par son coefficient dominant on dispose d'un polynôme P_α unitaire à coefficients rationnels de degré minimal qui annule α. Ce polynôme est unique, on dit que c'est le polynôme minimal de α et le degré de P_α est le degré du nombre algébrique α. On vérifie facilement que P_α est irréductible dans $\mathbb{Q}[X]$.
Soit α un nombre algébrique de degré $d \geq 1$.

(a) Montrer que si $d = 1$ alors α est rationnel et il existe une constante $C_\alpha > 0$ telle que pour tout nombre rationnel $r = \dfrac{p}{q}$ ($p \in \mathbb{Z}$, $q \in \mathbb{N}^*$) distinct de α on a $\left|\alpha - \dfrac{p}{q}\right| \geq \dfrac{C_\alpha}{q}$.

(b) Montrer que si $d \geq 2$ alors α est irrationnel et il existe une constante $C_\alpha > 0$ telle que pour tout nombre rationnel $r = \dfrac{p}{q}$ on a $\left|\alpha - \dfrac{p}{q}\right| \geq \dfrac{C_\alpha}{q^d}$.

9 Applications de la formule de Taylor-Lagrange

1. *Majoration de l'erreur dans la méthode de Newton.* Soit $f \in \mathcal{C}^2([a,b], \mathbb{R})$ telle que :

$$f(a) f(b) < 0;\ \forall x \in [a,b],\ f'(x) \neq 0,\ f''(x) \neq 0.$$

(a) Montrer que pour tout x_0 dans $[a,b]$ tel que $f(x_0) f''(x_0) > 0$, on peut définir la suite $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ de points de $[a,b]$ par :

$$\forall n \geq 0, \quad x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}$$

et cette suite converge vers l'unique solution $\alpha \in]a,b[$ de $f(x) = 0$.

(b) Montrer qu'une majoration de l'erreur est donnée par :

$$|x_n - \alpha| \leq |x_0 - \alpha|^{2^n} \left(\frac{M_2}{2m_1}\right)^{2^n - 1}$$

où :

$$m_1 = \inf_{x \in [a,b]} |f'(x)|, \quad M_2 = \sup_{x \in [a,b]} |f''(x)|$$

2. *Majorations de dérivées.* Montrer que si f est une fonction de classe $\mathcal{C}^{n+1}$, avec $n \geq 1$, de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ telle que f et $f^{(n+1)}$ soient bornées sur $\mathbb{R}$, alors toutes les dérivées $f^{(k)}$, pour $k = 1, \cdots, n$ sont également bornées sur $\mathbb{R}$.
3. *Inégalités de Kolmogorov.*
   (a) Montrer que si f est une fonction de classe $\mathcal{C}^2$ de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ telle que f et f'' soient bornées sur $\mathbb{R}$, alors f' est bornée sur $\mathbb{R}$ et :
$$\|f'\|_\infty \leq \sqrt{2\,\|f\|_\infty\,\|f''\|_\infty}.$$
   (b) Montrer que si f est une fonction de classe $\mathcal{C}^{n+1}$, avec $n \geq 1$, de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ telle que f et $f^{(n+1)}$ soient bornées sur $\mathbb{R}$, alors toutes les dérivées $f^{(k)}$, pour $k = 1, \cdots, n$, sont bornées sur $\mathbb{R}$ avec :
$$\left\|f^{(k)}\right\|_\infty \leq 2^{\frac{k(n+1-k)}{2}}\,\|f\|_\infty^{1-\frac{k}{n+1}}\,\left\|f^{(n+1)}\right\|_\infty^{\frac{k}{n+1}}.$$
4. *Estimation de l'erreur dans la méthode des rectangles.*
   (a) À toute fonction $f \in \mathcal{C}^0([0,1], \mathbb{R})$ on associe la suite de ses sommes de Riemann définie par :
$$\forall n \geq 1, \quad S_n(f) = \frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1} f\left(\frac{k}{n}\right).$$
   Montrer que pour toute fonction $f \in \mathcal{C}^3([0,1], \mathbb{R})$ on a le développement asymptotique :
$$S_n(f) = \int_0^1 f(t)\,dt - \frac{1}{2n}(f(1) - f(0)) + \frac{1}{12n^2}(f'(1) - f'(0)) + O\left(\frac{1}{n^3}\right).$$
   (b) Application à $f(t) = \dfrac{1}{1+t}$.

10 Applications de la formule de Taylor avec reste intégral

1. *Un théorème de Bernstein.*
   (a) Soit f une fonction à valeurs réelles de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $]-a, a[$ avec $a > 0$. Montrer que si f est paire et $f^{(2k)}(x) \geq 0$ pour tout entier naturel k et tout $x \in]-a, a[$ alors f est développable en série entière sur $]-a, a[$.
   (b) Soit f une fonction à valeurs réelles de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $]-a, a[$ avec $a > 0$. Montrer que si $f^{(2k)}(x) \geq 0$ pour tout entier naturel k et tout $x \in]-a, a[$ alors f est développable en série entière sur $]-a, a[$.

11 Applications du théorème de Darboux

1. Du théorème de Darboux, on déduit qu'il existe des fonctions définies sur un intervalle réel qui n'admettent pas de primitive. Vérifier directement qu'une fonction en escalier n'admet pas de primitives.
2. Soit f une fonction à valeurs réelles définie et dérivable sur un intervalle I.
   (a) On suppose que $f'(a) = f'(b) = 0$ et on désigne par φ la fonction définie sur $[a, b]$ par :
$$\varphi(x) = \begin{cases} \dfrac{f(x) - f(a)}{x - a} \text{ si } x \in]a, b], \\ 0 \text{ si } x = a. \end{cases}$$

i. Montrer qu'il existe $c \in \left]a, b\right[$ tel que :

$$f(b) - f(a) = \frac{(b-a)^2}{c-a}\left(f'(c) - \frac{f(c) - f(a)}{c-a}\right).$$

ii. En déduire qu'il existe $d \in \left]a, b\right[$ tel que $f'(d) = \dfrac{f(d) - f(a)}{d-a}$.

(b) Montrer que s'il existe deux réels $a < b$ dans I tels que $f'(a) = f'(b)$, alors il existe $c \in \left]a, b\right[$ tel que $f'(c) = \dfrac{f(c) - f(a)}{c-a}$.

3. Soit f une fonction deux fois dérivable de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ telle que $\lim\limits_{|x| \to +\infty} \dfrac{f(x)}{x} = 0$. Montrer qu'il existe un réel c tel que $f''(c) = 0$.

4. Soit f une fonction dérivable de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$, non identiquement nulle et telle que :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad |f'(x)| = |f(x)|. \tag{1}$$

(a) On suppose que f ne s'annule jamais sur $\mathbb{R}$. Montrer alors que f' garde un signe constant sur $\mathbb{R}$ et conclure.

(b) On se donne un réel a tel que $f(a) \neq 0$ et pour fixer les idées on suppose que $f(a) > 0$. On note :

$$E = \{x \in [a, +\infty[\mid f(x) = 0\}$$

et on suppose cet ensemble non vide.

i. Montrer qu'il existe $b > a$ tel que $f(x) > 0$ pour tout $x \in [a, b[$ et $f(b) = 0$.

ii. On suppose que $f'(a) = f(a)$. Montrer alors que $f'(x) = f(x)$ pour tout $x \in [a, b[$ et conclure.

(c) Résoudre (1).