Agrégation Interne

Probabilités

1 Énoncé

– 0 – Quelques rappels

Ω est un ensemble non vide et $\mathcal{P}(\Omega)$ est l'ensemble des parties de Ω.

Une tribu (ou σ-algèbre) sur Ω est une partie $\mathcal{B}$ de $\mathcal{P}(\Omega)$ telle que :

- $\emptyset \in \mathcal{B}$;
- $\forall A \in \mathcal{B},\ \Omega \setminus A \in \mathcal{B}$ ($\mathcal{B}$ est stable par passage au complémentaire) ;
- pour toute partie I de $\mathbb{N}$ et toute famille $(A_i)_{i\in I}$ d'éléments de $\mathcal{B}$, on a $\bigcup\limits_{i\in I} A_i \in \mathcal{B}$ ($\mathcal{B}$ est stable par réunion dénombrable).

Si $\mathcal{B}$ est une tribu sur Ω, on dit alors que le couple $(\Omega, \mathcal{B})$ est un espace probabilisable (ou mesurable).

L'ensemble Ω est appelé univers et les éléments de $\mathcal{B}$ sont appelés événements.

Dans le cas où Ω est dénombrable (fini ou infini), on prend souvent $\mathcal{B} = \mathcal{P}(\Omega)$.

Deux événements disjoints sont dits incompatibles.

Si $\mathcal{C}$ est une famille de parties de Ω, on dit alors que l'intersection de toutes les tribus sur Ω qui contiennent $\mathcal{C}$ est la tribu engendrée par $\mathcal{C}$.

C'est aussi la plus petite tribu sur Ω (pour l'ordre de l'inclusion sur $\mathcal{P}(\Omega)$) qui contient $\mathcal{C}$.

On la note $\sigma(\mathcal{C})$ et on a :

$$\sigma(\mathcal{C}) = \bigcap_{\substack{\mathcal{B} \text{ tribu sur } \Omega \\ \mathcal{C} \subset \mathcal{B}}} \mathcal{B}$$

La tribu de Borel sur $\mathbb{R}$ est la tribu engendrée par les intervalle ouverts (ou par les ouverts de $\mathbb{R}$, puisque tout ouvet est réunion dénombrable d'intervalles ouverts), on la note $\mathcal{B}(\mathbb{R})$ et ses éléments sont les boréliens de $\mathbb{R}$.

Une mesure de probabilité (ou simplement une probabilité) sur l'espace probabilisable $(\Omega, \mathcal{B})$ est une application :

$$\mathbb{P} : \mathcal{B} \to [0, 1]$$

telle que :

- $\mathbb{P}(\Omega) = 1$;
- pour toute suite $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ d'éléments de $\mathcal{B}$ deux à deux disjoints (i. e. $A_n \cap A_m = \emptyset$ pour $n \neq m$ dans $\mathbb{N}$), on a :

$$\mathbb{P}\left(\bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n\right) = \sum_{n\in\mathbb{N}} \mathbb{P}(A_n)$$

(σ-additivité de $\mathbb{P}$).

Avec ces conditions, on dit que le triplet $(\Omega, \mathcal{B}, \mathbb{P})$ est un espace probabilisé.

Pour tout événement $A \in \mathcal{B}$, $\mathbb{P}(A)$ est la probabilité de A.

Pour tout entier $r \geq 1$, on dit que les événements $A_1, \cdots, A_r$ sont mutuellement indépendants dans l'espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{B}, \mathbb{P})$ si, pour toute partie J non vide de $\{1, 2, \cdots, r\}$, on a :

$$\mathbb{P}\left(\bigcap_{j\in J} A_j\right) = \prod_{j\in J} \mathbb{P}(A_j)$$

Dans le cas où l'univers $\Omega = \{\omega_i \mid i \in I\}$, où I est une partie non vide $\mathbb{N}$ (i.e. Ω est dénombrable) se donner une probabilité sur $(\Omega, \mathcal{P}(\Omega))$ équivaut à se donner une suite $(p_i)_{i\in I}$ de réels positifs telle que $\sum\limits_{i\in I} p_i = 1$. Dans ce cas la probabilité d'un événement $A \in \mathcal{P}(\Omega)$ est :

$$\mathbb{P}(A) = \sum_{i\in I,\, \omega_i \in A} p_i$$

Une variable aléatoire réelle sur un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{B}, \mathbb{P})$ est une application $X : \Omega \to \mathbb{R}$ telle que pour tout borélien $B \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$, $X^{-1}(B) \in \mathcal{B}$.

Comme la tribu de Borel $\mathcal{B}(\mathbb{R})$ est engendrée par les intervalles ouverts, une application $X : \Omega \to \mathbb{R}$ est une variable aléatoire si, et seulement si, on a $X^{-1}(I) \in \mathcal{B}$ pour tout intervalle ouvert I.

Dans le cas d'une variable aléatoire réelle, on note pour tout borélien $B \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$, $(X \in B)$ l'événement $X^{-1}(B) \in \mathcal{B}$, soit :

$$(X \in B) = X^{-1}(B) = \{\omega \in \Omega \mid X(\omega) \in B\}$$

Dans le cas particulier des intervalles, on note respectivement $(X = x)$, $(X < a)$, $(a \leq X < b)$, $\cdots$, les événements $X^{-1}(\{x\})$, $X^{-1}(]-\infty, a[)$, $X^{-1}([a, b[)$, $\cdots$

Si $X : \Omega \to F \subset \mathbb{R}$ est une variable aléatoire réelle sur un espace probabilisé $(X, \mathcal{B}, \mathbb{P})$, on vérifie alors que la famille :

$$\mathcal{C} = \left\{B \in \mathcal{P}(F) \mid X^{-1}(B) \in \mathcal{B}\right\}$$

est une tribu sur la partie F de $\mathbb{R}$ et l'application :

$$\begin{array}{rccc} \mathbb{P}_X : & \mathcal{C} & \to & [0,1] \\ & B & \mapsto & \mathbb{P}(X \in B) \end{array}$$

est une mesure de probabilité sur $(F, \mathcal{C})$.

On dit que $\mathbb{P}_X$ est la loi de la variable aléatoire réelle X.

On dit qu'une variable aléatoire réelle $X : \Omega \to F \subset \mathbb{R}$ sur un espace probabilisé $(X, \mathcal{B}, \mathbb{P})$ est discrète si F est une partie dénombrable de $\mathbb{R}$.

Une application $X : \Omega \to F \subset \mathbb{R}$ où F est dénombrable est une variable aléatoire si, et seulemet si, on a $X^{-1}(\{x\}) \in \mathcal{B}$ pour tout réel x.

En notant, dans le cas discret, $F = \{x_i \mid i \in I\}$ ou I est une partie non vide de $\mathbb{N}$, la loi de X est définie par :

$$\forall B \in \mathcal{P}(F),\ \mathbb{P}(X \in B) = \sum_{i\in I,\, x_i \in B} \mathbb{P}(X = x_i)$$

la suite de réels positifs $(p_i)_{i\in I} = (\mathbb{P}(X = x_i))_{i\in I}$ étant telle que $\sum\limits_{i\in I} p_i = 1$.

Cette suite $(p_i)_{i\in I}$ caractérise la loi de X.

Si $X : \Omega \to F$ est une variable aléatoire discrète avec $F = \{x_i \mid i \in I\}$ ou I est une partie non vide de $\mathbb{N}$, on dit alors qu'elle est intégrable si :

$$\sum_{i\in I} \mathbb{P}(X = x_i)\,|x_i| < +\infty$$

et son espérance est le réel :

$$\mathbb{E}(X) = \sum_{i\in I} \mathbb{P}(X = x_i)\, x_i$$

Cette espérance est linéaire et positive.

Si $f : F \to \mathbb{R}$ est telle que $\sum_{i \in I} \mathbb{P}(X = x_i) |f(x_i)| < +\infty$, la fonction $f(X) = f \circ X$ est alors une variable aléatoire discrète intégrable d'espérance :

$$\mathbb{E}(f(X)) = \sum_{i \in I} \mathbb{P}(X = x_i) f(x_i)$$

(théorème de transport).

On dit qu'une variable aléatoire discrète $X : \Omega \to F$ est de carré intégrable si la variable aléatoire X^2 est intégrable.

La variance d'une telle variable aléatoire est :

$$\mathbb{V}(X) = \mathbb{E}\left((X - \mathbb{E}(X))^2\right) = \mathbb{E}\left(X^2\right) - (\mathbb{E}(X))^2$$

– I – Quelques classiques et moins classiques résultats probabilistes

1. Soit $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ un espace probabilisé. Que dire d'un événement A qui est indépendant de tout autre événement ?
2. Soient $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ un espace probabilisé et $A_1, \cdots, A_n$, où $n \geq 2$, des événements mutuellement indépendants dans $\mathcal{A}$.
   (a) Montrer que $\Omega \setminus A_1, A_2, \cdots, A_n$ sont mutuellement indépendants.
   (b) En déduire que pour tout entier k compris entre 1 et n, les événements $\Omega \setminus A_1, \cdots, \Omega \setminus A_k, A_{k+1}, \cdots, A_n$ sont mutuellement indépendants.
3. Soit $n \geq 2$ un entier naturel.
   On considère l'espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{P}(\Omega), \mathbb{P})$, où $\Omega = \{1, \cdots, n\}$ et :

   $$\forall k \in \Omega,\ \mathbb{P}(\{k\}) = \frac{1}{n}$$

   ce qui revient à considérer l'expérience aléatoire qui consiste à choisir de manière équiprobable un entier compris entre 1 et n.
   Pour tout diviseur positif d de n, on désigne par A_d l'événement :« le nombre choisi est divisible par d ».
   (a) Calculer $\mathbb{P}(A_d)$ pour tout diviseur positif d de n.
   (b) Montrer que si $2 \leq p_1 < p_2 < \cdots < p_r$ sont tous les diviseurs premiers de n, les événements $A_{p_1}, \cdots, A_{p_r}$ sont alors mutuellement indépendants.
   (c) On désigne par φ la fonction indicatrice d'Euler définie sur $\mathbb{N}^*$ par

   $$\varphi(n) = \operatorname{card}\{k \in \{1, \cdots, n\} \mid k \wedge n = 1\}$$

   Montrer que

   $$\varphi(n) = n \prod_{k=1}^{r} \left(1 - \frac{1}{p_k}\right)$$

   (d) Soit d un diviseur positif d de n. Calculer la probabilité de l'événement B_d : « le nombre a choisi est tel que $a \wedge n = d$ ».
   (e) En déduire que :

   $$n = \sum_{d/n} \varphi\left(\frac{n}{d}\right)$$

4. On munit l'ensemble $\mathbb{N}^*$ de la tribu $\mathcal{P}(\mathbb{N}^*)$.
On rappelle que la fonction dzéta de Riemann est définie par :

$$\forall \alpha > 1,\ \zeta(\alpha) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^\alpha}$$

On note :

$$2 = p_1 < p_2 < \cdots < p_n < p_{n+1} < \cdots$$

la suite infinie des nombres premiers rangée dans l'ordre strictement croissant.

(a) Montrer que l'on définit une probabilité sur $(\mathbb{N}^*, \mathcal{P}(\mathbb{N}^*))$ en posant :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*,\ \mathbb{P}(\{n\}) = \frac{1}{\zeta(\alpha)} \frac{1}{n^\alpha}$$

(b) Montrer que :

$$\forall p \in \mathbb{N}^*,\ \mathbb{P}(p\mathbb{N}^*) = \frac{1}{p^\alpha}$$

où on a noté $p\mathbb{N}^*$ l'ensemble de tous les multiples positifs de p.

(c) Montrer que :

$$\mathbb{P}\left(\bigcap_{n=1}^{+\infty} (\mathbb{N}^* \setminus p_n\mathbb{N}^*)\right) = \frac{1}{\zeta(\alpha)}$$

(d) En déduire que :

$$\forall \alpha > 1,\ \prod_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{1 - \frac{1}{p_n^\alpha}} = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^\alpha}$$

(e) Montrer que $\lim\limits_{\alpha \to 1^+} \zeta(\alpha) = +\infty$.

(f) Déduire de la question précédente que $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{p_n} = +\infty$.

5. Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite réelle strictement décroissante et de limite nulle.
Déterminer un réel λ pour lequel il existe une mesure de probabilité $\mathbb{P}$ sur $(\mathbb{N}, \mathcal{P}(\mathbb{N}))$ telle que :

$$\forall n \in \mathbb{N},\ \mathbb{P}(\mathbb{N} \cap [n, +\infty[) = \lambda u_n$$

6. Soit $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ un espace probabilisé. Montrer que, pour toute suite $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ d'événements deux à deux incompatibles, on a $\lim\limits_{n\to+\infty} \mathbb{P}(A_n) = 0$.

7. Soient $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ un espace probabilisé et $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite d'événements.
On note :

$$\limsup_{n\to+\infty} A_n = \bigcap_{n\in\mathbb{N}} \bigcup_{k\geq n} A_k \text{ et } \liminf_{n\to+\infty} A_n = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} \bigcap_{k\geq n} A_k$$

$\limsup\limits_{n\to+\infty} A_n$ est l'ensemble des $x \in \Omega$ qui appartiennent à une infinité de A_n et $\liminf\limits_{n\to+\infty} A_n$ est l'ensemble des $x \in \Omega$ qui appartiennent à tous les A_n sauf au plus un nombre fini.

(a) Montrer que :

$$\Omega \setminus \limsup_{n\to+\infty} A_n = \liminf_{n\to+\infty} (\Omega \setminus A_n)$$

$$\Omega \setminus \liminf_{n\to+\infty} A_n = \limsup_{n\to+\infty} (\Omega \setminus A_n)$$

$$\left(x \in \limsup_{n\to+\infty} A_n\right) \Leftrightarrow \left(\sum_{n\in\mathbb{N}} \mathbf{1}_{A_n}(x) = +\infty\right)$$

$$\left(x \in \liminf_{n\to+\infty} A_n\right) \Leftrightarrow \left(\sum_{n\in\mathbb{N}} \mathbf{1}_{\Omega\setminus A_n}(x) < +\infty\right)$$

(b) Montrer que :

i. si la série $\sum \mathbb{P}(A_n)$ converge, on a alors $\mathbb{P}\left(\limsup_{n\to+\infty} A_n\right) = 0$;

ii. si les événements A_n sont mutuellement indépendants et la série $\sum \mathbb{P}(A_n)$ diverge, on a alors $\mathbb{P}\left(\limsup_{n\to+\infty} A_n\right) = 1$ (loi du zéro-un de Kolmogorov).

(c) Montrer qu'il n'existe pas de mesure de probabilité $\mathbb{P}$ sur $(\mathbb{N}^*, \mathcal{P}(\mathbb{N}^*))$ telle que :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*,\ \mathbb{P}(n \cdot \mathbb{N}^*) = \frac{1}{n}$$

8. $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ est un espace probabilisé et $\mathbb{R}$ est muni de la tribu de Borel.
On dit qu'une suite $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de variables aléatoires réelles sur $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ converge en probabilité vers une variable aléatoire $X : \Omega \to \mathbb{R}$ si :

$$\forall \varepsilon > 0,\ \lim_{n\to+\infty} \mathbb{P}(|X - X_n| > \varepsilon) = 0$$

où on a noté :

$$(|X - X_n| > \varepsilon) = \{\omega \in \Omega \mid |X(\omega) - X_n(\omega)| > \varepsilon\}$$

(a) Montrer que si $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite de variables aléatoires réelles sur $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ qui converge en probabilité vers les variables aléatoires $X : \Omega \to \mathbb{R}$ et $Y : \Omega \to \mathbb{R}$, on a alors $X = Y$ presque sûrement.

(b) Soient $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de variables aléatoires réelles sur $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ et X une variable aléatoire réelle sur $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$.
Montrer que s'il existe une suite $(Y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de variables aléatoires de Ω dans $\mathbb{R}^+$ qui converge en probabilité vers la variable aléatoire nulle et telle que $|X - X_n| \leq Y_n$ pour tout $n \in \mathbb{N}$, la suite $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge alors en probabilité vers Y.

(c) Soient $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(Y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ deux suites de variables aléatoires réelles sur $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ qui convergent en probabilité vers les variables aléatoires $X : \Omega \to \mathbb{R}$ et $Y : \Omega \to \mathbb{R}$ respectivement.
Montrer que la suite $(X_n + Y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge en probabilité vers $X + Y$.

(d) Soient $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(Y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ deux suites de variables aléatoires réelles sur $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ qui convergent en probabilité vers la variable aléatoire nulle.
Montrer que la suite $(X_n Y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge en probabilité vers la variable aléatoire nulle.

(e) Montrer que, pour toute variable aléatoire $X : \Omega \to \mathbb{R}$, on a :

$$\lim_{k\to+\infty} \mathbb{P}(|X| > k) = 0$$

(f) Soient $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(Y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ deux suites de variables aléatoires réelles sur $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ qui convergent en probabilité vers les variables aléatoires $X : \Omega \to \mathbb{R}$ et $Y : \Omega \to \mathbb{R}$ respectivement.

i. Montrer que les suites de variables aléatoires $(X(Y - Y_n))_{n\in\mathbb{N}}$ et $((X - X_n) Y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ convergent en probabilité vers la variable aléatoire nulle.

ii. Montrer que la suite $(X_n Y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge en probabilité vers XY.

9. Soit $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ un espace probabilisé.
   Montrer que :
   (a) pour tout $X \in \mathcal{L}^1(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$, on a :
   $$\forall \alpha > 0,\ \mathbb{P}(|X| \geq \alpha) \leq \frac{\mathbb{E}(|X|)}{\alpha}$$
   (inégalité de Markov) ;
   (b) pour tout $X \in \mathcal{L}^1(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$, on a :
   $$(\mathbb{P}(X \geq \alpha) = 1) \Rightarrow (\mathbb{E}(X) \geq \alpha)$$
   $$(\mathbb{P}(X \leq \alpha) = 1) \Rightarrow (\mathbb{E}(X) \leq \alpha)$$
   $$(\mathbb{P}(X = \alpha) = 1) \Rightarrow (\mathbb{E}(X) = \alpha)$$
   (c) pour toute fonction strictement croissante $\varphi : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^+$ et tout $X \in \mathcal{L}^1(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$, on a :
   $$\forall \alpha > 0,\ \mathbb{P}(|X| \geq \alpha) \leq \frac{\mathbb{E}(\varphi \circ |X|)}{\varphi(\alpha)}$$
   (d) pour tout $X \in \mathcal{L}^2(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$, on a :
   $$\forall \alpha > 0,\ \mathbb{P}(|X - \mathbb{E}(X)| \geq \alpha) \leq \frac{\mathbb{V}(X)}{\alpha^2}$$
   (inégalité de Tchebychev) ;
   (e) pour toutes variables aléatoires X, Y dans $\mathcal{L}^1(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ telles que $X > 0$, $Y > 0$ et $XY \geq 1$ presque sûrement, on a :
   $$\mathbb{E}(X)\,\mathbb{E}(Y) \geq 1$$
   (f) pour tout $X \in \mathcal{L}^1(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ telle que $X > 0$ presque sûrement, on a :
   $$\mathbb{E}(X)\,\mathbb{E}\left(\frac{1}{X}\right) \geq 1$$

10. Soient $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ un espace probabilisé et $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite d'événements.
    On rappelle que :
    $$\limsup_{n\to+\infty} A_n = \bigcap_{n\in\mathbb{N}} \bigcup_{k\geq n} A_k \text{ et } \liminf_{n\to+\infty} A_n = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} \bigcap_{k\geq n} A_k$$
    Montrer que :
    $$\mathbb{P}\left(\liminf_{n\to+\infty} A_n\right) \leq \liminf_{n\to+\infty} \mathbb{P}(A_n) \leq \limsup_{n\to+\infty} \mathbb{P}(A_n) \leq \mathbb{P}\left(\limsup_{n\to+\infty} A_n\right)$$

11. Soient $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ un espace probabilisé et $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite d'événements mutuellement indépendants.
    (a) En notant $\mathbb{P}(A)$ la probabilité qu'aucun des événements A_n ne soit réalisé, montrer que :
    $$\mathbb{P}(A) \leq \exp\left(-\sum_{n=0}^{+\infty} \mathbb{P}(A_n)\right)$$

(b) En déduire que :

$$\left(\mathbb{P}\left(\bigcup_{n=0}^{+\infty} A_n\right) = 1\right) \Leftrightarrow \left(\sum_{n=0}^{+\infty} \mathbb{P}\left(A_n\right) = +\infty\right) \Leftrightarrow \left(\sum_{n=0}^{+\infty} \ln\left(1 - \mathbb{P}\left(A_n\right)\right) = -\infty\right)$$

12. Soient $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ un espace probabilisé, $(X_k)_{1\leq k\leq n}$ une famille finie de variables aléatoires indépendantes sur $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ et $(F_k)_{1\leq k\leq n}$ la suite des fonctions de répartition correspondantes.

(a) Montrer que la fonction de répartition de la variable aléatoire $X = \min\limits_{1\leq k\leq n} X_k$ est :

$$F_X = 1 - \prod_{k=1}^{n} (1 - F_k)$$

et que celle de la variable aléatoire $Y = \max\limits_{1\leq k\leq n} X_k$ est :

$$F_Y = \prod_{k=1}^{n} F_k$$

(b) Montrer que, pour tous réels $x < y$, on a :

$$\mathbb{P}\left(x < X \leq Y \leq y\right) = \prod_{k=1}^{n} \left(F_k\left(y\right) - F_k\left(x\right)\right)$$

13. Soit X une variable aléatoire réelle sur un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$.
On dit que X est sans mémoire si :

$$\forall (x, y) \in \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^+,\ \mathbb{P}\left(X > x + y\right) = \mathbb{P}\left(X > x\right)\mathbb{P}\left(X > x\right)$$

(a) Montrer qu'une variable aléatoire réelle suivant une loi exponentielle de paramètre $\lambda > 0$ est sans mémoire.

(b) On se donne une variable aléatoire sans mémoire X de fonction de répartition F_X.

i. Montrer que $\mathbb{P}\left(X > 0\right) = 0$ si, et seulement si, $\mathbb{P}\left(X > x\right) = 0$ pour tout réel $x > 0$.

ii. En supposant que $\mathbb{P}\left(X > 0\right) > 0$, montrer que X suit une loi exponentielle.

14.

(a) Soit $P\left(X\right) = aX^2 - 2bX + c$ un polynôme réel de degré 2 avec $a > 0$.
Calculer :

$$\int_{\mathbb{R}} e^{-P(t)} dt$$

(b) Montrer que si X_1, X_2 sont deux variables aléatoires indépendantes qui suivent des lois normales de paramètres respectifs (μ_1, σ_1) et (μ_2, σ_2), alors la variable aléatoire $X_1 + X_2$ suit une loi normale de paramètres $\left(\mu_1 + \mu_2, \sqrt{\sigma_1^2 + \sigma_2^2}\right)$.

(c) Soit $(X_k)_{1\leq k\leq n}$ une suite de variables aléatoires indépendantes telle que, pour tout k compris entre 1 et n, X_k suit une loi normale de paramètres $(\mu_k, \sigma_k) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^{+,*}$.
Montrer que la variable aléatoire $\sum\limits_{k=1}^{n} X_k$ suit une loi normale de paramètres $\left(\sum\limits_{k=1}^{n} \mu_k, \sqrt{\sum\limits_{k=1}^{n} \sigma_k^2}\right)$.
En particulier, dans le cas où les X_k suivent toutes une même loi normale de paramètres $(\mu, \sigma) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^{+,*}$, la variable aléatoire :

$$Y = \frac{1}{\sqrt{n}\sigma}\left(\sum_{k=1}^{n} X_k - n\mu\right)$$

suit une loi normale centrée réduite.

15. On dit qu'une variable aléatoire réelle X suit une loi gamma de paramètres $a > 0$ et $\lambda > 0$ si elle possède une densité définie par :

$$\forall t \in \mathbb{R},\ f_{a,\lambda}(t) = \frac{\lambda^a}{\Gamma(a)} t^{a-1} e^{-\lambda t} \mathbf{1}_{\mathbb{R}^+}(t)$$

On note $X \hookrightarrow \Gamma(a, \lambda)$.

(a) Montrer qu'une variable aléatoire réelle X qui suit une loi $\Gamma(a, \lambda)$ admet une espérance et une variance données par :

$$\mathbb{E}(X) = \frac{a}{\lambda} \text{ et } \mathbb{V}(X) = \frac{a}{\lambda^2}$$

(b) Soit $(X_k)_{1 \leq k \leq n}$ une suite de variables aléatoires indépendantes telle que, pour tout k compris entre 1 et n, X_k suit une loi gamma de paramètres $a_k > 0$ et $\lambda > 0$.

Montrer que la variable aléatoire $X = \sum\limits_{k=1}^{n} X_k$ suit une loi gamma de paramètres $a = \sum\limits_{k=1}^{n} a_k$ et λ.

(c) Soit $(X_k)_{1 \leq k \leq n}$ une suite de variables aléatoires indépendantes telle que, pour tout k compris entre 1 et n, X_k suit une loi exponentielle de paramètre $\lambda > 0$.

Montrer que la variable aléatoire $X = \sum\limits_{k=1}^{n} X_k$ suit une loi gamma de paramètres n et λ.

(d) Soit $(X_k)_{1 \leq k \leq n}$ une suite de variables aléatoires indépendantes telle que, pour tout k compris entre 1 et n, X_k suit une loi normale centrée réduite.

Montrer que la variable aléatoire $\sum\limits_{k=1}^{n} X_k^2$ suit une loi gamma de paramètres $\frac{n}{2}$ et $\frac{1}{2}$.

16.

(a) Soient $a < b$ deux réels et f une fonction continue de $[a, b]$ dans $\mathbb{R}$ que l'on prolonge en une fonction continue sur $\mathbb{R}$ en posant $f(x) = f(a)$ pour tout $x < a$ et $f(x) = f(b)$ pour tout $x > b$.

On suppose que, pour tout réel $x \in [a, b]$, on dispose d'une suite $(Y_{n,x})_{n \in \mathbb{N}}$ de variables aléatoires réelles sur un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$, toutes de carrées intégrables et telles que :

$$\forall n \in \mathbb{N},\ \mathbb{E}(Y_{n,x}) = x$$

$$\lim_{n \to +\infty} \mathbb{V}(Y_{n,x}) = 0$$

la convergence étant uniforme sur $[a, b]$.

Montrer que :

$$\lim_{n \to +\infty} \mathbb{E}(f(Y_{n,x})) = f(x)$$

la convergence étant uniforme sur $[a, b]$.

(b) On se donne une fonction continue $f : [0, 1] \to \mathbb{R}$ et on lui associe la suite $(B_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ des polynômes de Bernstein définie par :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*,\ \forall x \in [0, 1],\ B_n(x) = \sum_{k=0}^{n} f\left(\frac{k}{n}\right) \binom{n}{k} x^k (1 - x)^{n-k}$$

Montrer, en utilisant le résultat de la question précédente, que la suite de fonctions polynomiales $(B_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ converge uniformément vers f sur $[0, 1]$.

(c) On se donne un réel $a > 0$ et une fonction continue $f : [0, a] \to \mathbb{R}$ que l'on prolonge en une fonction continue sur $\mathbb{R}^+$ en posant $f(x) = f(a)$ pour tout $x > a$.
On lui associe la suite de fonctions $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ définie par :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*,\ \forall x \in [0, a],\ u_n(x) = e^{-nx} \sum_{k=0}^{+\infty} f\left(\frac{k}{n}\right) \frac{n^k}{k!} x^k$$

i. Montrer que, pour tout entier $n \in \mathbb{N}^*$, la fonction u_n est bien définie et continue sur $[0, a]$.

ii. Montrer que la suite de fonctions $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge uniformément vers f sur $[0, a]$.

17. [1]On s'intéresse ici au problème de l'aiguille de Buffon.
Sur un plan, on trace des droites parallèles distantes de $h > 0$ et on lance une aiguille de longueur $\ell > 0$: quelle est la probabilité pour que cette aiguille rencontre l'une des droites du réseau ?
Cette situation probabiliste nous conduit à des calculs d'aires de domaines définis par des courbes cartésiennes.

On note X la variable aléatoire égale à la distance du milieu O de l'aiguille à la droite $\mathcal{D}$ la plus proche du réseau et θ la variable aléatoire égale à l'angle géométrique que fait l'aiguille avec la droite passant par O et perpendiculaire à $\mathcal{D}$.
On suppose que X suit une loi uniforme sur $\left[0, \frac{h}{2}\right]$, que θ suit une loi uniforme sur $\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$ et que X et θ sont indépendantes.
On note A l'évènement : « l'aiguille coupe une des droites du réseau ».
On note N la variable aléatoire égale au nombre de points d'intersection de l'aiguille avec le réseau de droites.

(a) On suppose que $0 < \ell < h$. Montrer que $\mathbb{P}(A) = \frac{2\ell}{\pi h}$.

(b) On suppose que $h \leq \ell < 2h$. Calculer $\mathbb{P}(A)$.

(c) Calculer l'espérance de N dans les deux cas précédents.

1. D'après, Raisonnements divins