Exemples de calculs de la norme d'une application linéaire continue

Exercice 1 *E et F sont des espaces vectoriels réels de dimensions respectives $n \geq 1$ et $m \geq 1$. Étant données une base $\mathcal{B} = (e_i)_{1 \leq i \leq n}$ de E et une base $\mathcal{B}' = (e'_i)_{1 \leq i \leq n}$ de F, on munit ces espaces de la norme $\|\cdot\|_\infty$, soit :*

$$\forall x = \sum_{k=1}^{n} x_k e_k \in E,\ \|x\|_\infty = \max_{1 \leq k \leq n} |x_k|$$

$$\forall y = \sum_{k=1}^{m} y_k e'_k \in F,\ \|y\|_\infty = \max_{1 \leq k \leq m} |y_k|$$

Soit $u \in \mathcal{L}(E, F)$ de matrice $A = ((a_{ij}))_{\substack{1 \leq im \\ 1 \leq j \leq n}}$ dans les bases $\mathcal{B}$ et $\mathcal{B}'$.
Montrer que :

$$\|u\|_\infty = \max_{1 \leq i \leq m} \sum_{j=1}^{n} |a_{ij}|$$

Les deux exercices qui suivent sont analogues au précédent, mais en dimension infinie.

Exercice 2 *L'espace $E = \ell^\infty$ des suites réelles bornées est normé par $x \mapsto \|x\|_\infty = \sup_{n \in \mathbb{N}} |x_n|$. On se donne une suite $\varphi = (\varphi_n)_{n \in \mathbb{N}} \in E$ telle que la série $\sum \varphi_n$ soit absolument convergente et $u \in \mathcal{L}(E, \mathbb{R})$ est définie par :*

$$\forall x \in E,\ u(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} x_n \varphi_n$$

Montrer que u est continue de $(E, \|f \cdot\|_\infty)$ dans $(\mathbb{R}, |\cdot|)$, avec :

$$\|u\|_\infty = \sum_{n=0}^{+\infty} |\varphi_n|$$

Exercice 3 *$E = \mathcal{C}^0([0,1], \mathbb{R})$ est normé par $f \mapsto \|f\|_\infty = \sup_{x \in [0,1]} |f(x)|$. On se donne $\varphi \in E$ et $u \in \mathcal{L}(E, \mathbb{R})$ est définie par :*

$$\forall f \in E,\ u(f) = \int_0^1 f(t)\,\varphi(t)\,dt$$

Montrer que u est continue de $(E, \|\cdot\|_\infty)$ dans $(\mathbb{R}, |\cdot|)$, avec :

$$\|u\|_\infty = \int_0^1 |\varphi(t)|\,dt$$

Exercice 4 *E et F sont des espaces vectoriels réels de dimensions respectives $n \geq 1$ et $m \geq 1$. Étant données une base $\mathcal{B} = (e_i)_{1 \leq i \leq n}$ de E et une base $\mathcal{B}' = (e'_i)_{1 \leq i \leq n}$ de F, on munit ces espaces de la norme $\|\cdot\|_1$, soit :*

$$\forall x = \sum_{k=1}^{n} x_k e_k \in E,\ \|x\|_1 = \sum_{k=1}^{n} |x_k|$$

$$\forall y = \sum_{k=1}^{m} y_k e'_k \in F,\ \|y\|_1 = \sum_{k=1}^{m} |y_k|$$

Soit $u \in \mathcal{L}(E, F)$ de matrice $A = ((a_{ij}))_{\substack{1 \leq im \\ 1 \leq j \leq n}}$ dans les bases $\mathcal{B}$ et $\mathcal{B}'$.
Montrer que :

$$\|u\|_1 = \max_{1 \leq j \leq n} \sum_{i=1}^{m} |a_{ij}|$$

L'exercice qui suit est analogue au précédent, mais en dimension infinie.

Exercice 5 *$E = \mathcal{C}^0([0,1], \mathbb{R})$ est normé par $f \mapsto \|f\|_1 = \displaystyle\int_0^1 |f(t)|\, dt$. On se donne $\varphi \in E$ et $u \in \mathcal{L}(E)$ est définie par :*

$$\forall f \in E,\ u(f) = \int_0^1 f(t)\varphi(t)\, dt$$

Montrer que u est continue de $(E, \|\cdot\|_1)$ dans $(\mathbb{R}, |\cdot|)$, avec :

$$\|u\|_1 = \|\varphi\|_\infty = \sup_{t\in[0,1]} |\varphi(t)|$$

Exercice 6 *$(E, \langle \cdot \mid \cdot \rangle)$ est un espace euclidien de dimension $n \geq 1$. On note $\|\cdot\|_2$ la norme associée. Soit $u \in \mathcal{L}(E)$ et u^* son adjoint défini par :*

$$\forall (x,y) \in E^2,\ \langle u(x) \mid y \rangle = \langle x \mid u^*(y) \rangle$$

On désigne par $\mathrm{sp}(u)$ l'ensemble des valeurs propres de u et par $\rho(u) = \max_{\lambda\in\mathrm{sp}(u)} |\lambda|$ le rayon spectral de u.

1. *Montrer que si u est symétrique (i. e. $u^* = u$), on a alors :*

$$\|u\|_2 = \rho(u)$$

2. *Montrer que $\|u^*\|_2 = \|u\|_2$.*
3. *Montrer que :*

$$\|u\|_2 = \sqrt{\|u^* \circ u\|_2} = \sqrt{\rho(u^* \circ u)}$$

4. *Soient u et v deux endomorphismes symétriques. Montrer que :*

$$\rho(u \circ v) \leq \rho(u)\rho(v)$$

Exercice 7 *$(E, \langle \cdot \mid \cdot \rangle)$ est un espace préhilbertien (de dimension finie ou non) et $\|\cdot\|_2$ est la norme associée.*

1. *Montrer que si u est continue, on a alors :*

$$\|u\| = \sup_{\|x\|_2=\|y\|_2=1} |\langle u(x) \mid y \rangle|$$

2. *On dit que $u \in \mathcal{L}(E)$ est symétrique si :*

$$\forall (x,y) \in E^2,\ \langle u(x) \mid y \rangle = \langle x \mid u(y) \rangle$$

Montrer que si u est continue et symétrique, on a alors :

$$\|u\| = \sup_{\|x\|_2=1} |\langle u(x) \mid x \rangle|$$

Exercice 8 *Soient $E = \mathcal{C}^0([0,1], \mathbb{R})$, $\varphi \in E$ et $u \in \mathcal{L}(E)$ définie par :*

$$\forall f \in E,\ u(f) = \int_0^1 f(t)\varphi(t)\, dt$$

1. *En munissant E de la norme $f \mapsto \|f\|_2 = \sqrt{\int_0^1 f^2(t)\,dt}$, montrer que u est continue de $(E, \|\cdot\|_2)$ dans $(\mathbb{R}, |\cdot|)$, avec :*

$$\|u\|_2 = \|\varphi\|_2$$

2. *On suppose que φ est à valeurs positives et on se donne un réel $p > 1$.*

   En munissant E de la norme $f \mapsto \|f\|_p = \sqrt[p]{\int_0^1 |f(t)|^p\,dt}$, montrer que u est continue de $\left(E, \|\cdot\|_p\right)$ dans $(\mathbb{R}, |\cdot|)$, avec :

$$\|u\|_p = \|\varphi\|_q$$

   où $q > 1$ est tel que $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$.

Exercice 9 *Soient $I = [a, b]$ un intervalle réel fermé borné avec $a < b$ et $\mathcal{C}(I)$ l'algèbre des fonctions continues de I dans $\mathbb{R}$ muni de la norme $\|\cdot\|_\infty$.*

1. *Pour tout entier naturel non nul n, on se donne une suite $(x_{n,i})_{0 \leq i \leq n}$ de réels deux à deux distincts dans I et une suite $(\lambda_k)_{0 \leq k \leq n}$ de fonctions dans $\mathcal{C}(I)$. Montrer que l'opérateur u définie sur $\mathcal{C}(I)$ par :*

$$\forall f \in \mathcal{C}(I),\ \forall x \in [a, b],\ u(f)(x) = \sum_{k=0}^{n} f(x_k)\,\lambda_k(x)$$

   est continue avec :

$$\|u\| = \sup_{x \in I} \sum_{k=0}^{n} |\lambda_k(x)|.$$

2. *Pour tout fonction f appartenant à $\mathcal{C}(I)$, on note $L_n(f)$ le polynôme d'interpolation de Lagrange défini par :*

$$\begin{cases} L_n(f) \in \mathbb{R}_n[x] \\ L_n(f)(x_{n,i}) = f(x_{n,i})\ (0 \leq i \leq n) \end{cases}$$

   (a) *Montrer que :*

$$L_n(f) = \sum_{i=0}^{n} f(x_{n,i})\,L_{n,i},$$

   avec :

$$L_{n,i}(x) = \prod_{\substack{j=0 \\ j \neq i}}^{n} \frac{x - x_{n,j}}{x_{n,i} - x_{n,j}}\ (0 \leq i \leq n).$$

   puis que l'opérateur linéaire L_n est un continu de $\mathcal{C}(I)$ dans $\mathbb{R}_n[x]$ avec :

$$\|L_n\| = \sup_{x \in I} \sum_{i=0}^{n} |L_{n,i}(x)|$$

   La suite $(\lambda_n)_{n \geq 1} = (\|L_n\|)_{n \geq 1}$ est la suite des constantes de Lebesgue associées à la suite double $(x_{n,i})_{0 \leq i \leq n < +\infty}$.

   (b) *On note $E_n(f) = d(f, \mathbb{R}_n[x]) = \inf_{P \in \mathbb{R}_n[x]} \|f - P\|_\infty$ le degré d'approximation uniforme par des polynômes de degré au plus n d'une fonction $f \in \mathcal{C}(I)$. Montrer que, pour toute fonction f dans $\mathcal{C}(I)$, on a :*

$$\forall n \geq 1,\ E_n(f) \leq \|f - L_n(f)\|_\infty \leq (1 + \lambda_n)\,E_n(f)$$

(c) *Montrer que* $\lim\limits_{n \to +\infty} E_n(f) = 0$.

(d) *Montrer que si* f *est une fonction appartenant à* $\mathcal{C}(I)$ *telle* $\lim\limits_{n \to +\infty} \lambda_n E_n(f) = 0$, *alors la suite* $(L_n(f))_{n \in \mathbb{N}}$ *des polynômes d'interpolation de Lagrange de* f *converge uniformément vers* f *sur* I.

(e) *Montrer que pour des points d'interpolation équidistants dans* I, *on a :*

$$\forall n \geq 1, \ \frac{2^n}{4n^2} \leq \lambda_n \leq 2^n.$$