1 Préliminaires

On se place dans $(\mathbb{R}^n, \langle \cdot \mid \cdot \rangle)$ euclidien, le produit scalaire canonique étant défini par :

$$\forall (x, y) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n,\ \langle x \mid y \rangle = {}^t x \cdot y = \sum_{k=1}^{n} x_k y_k$$

On note :
- $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ l'algèbres des matrices carrées réelles d'ordre n ;
- $GL_n(\mathbb{R})$ le groupe multiplicatif des matrices réelles inversibles d'ordre n ;
- $\mathcal{S}_n(\mathbb{R})$ l'espace vectoriel des matrices réelles d'ordre n symétriques.
- $\mathcal{S}_n^+(\mathbb{R})$ l'ensemble des matrices réelles d'ordre n symétriques positives.
- $\mathcal{S}_n^{++}(\mathbb{R})$ l'ensemble des matrices réelles d'ordre n symétriques définies positives.
- $\mathcal{O}_n(\mathbb{R})$ le groupe multiplicatif des matrices réelles d'ordre n orthogonales.

Si $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, on désigne par u l'endomorphisme de $\mathbb{R}^n$ qu'elle définit dans la base canonique.

Exercice 1 *Montrer que $\mathcal{S}_n(\mathbb{R})$ est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ de dimension $\dfrac{n(n+1)}{2}$.*

Exercice 2 *Le produit de deux matrices symétriques réelles est-il symétrique ?*

Exercice 3 *Soit $A \in \mathcal{S}_n(\mathbb{R})$. Montrer que $\ker(u)$ et $\operatorname{Im}(u)$ sont supplémentaires orthogonaux, c'est-à-dire que :*

$$\mathbb{R}^n = \ker(u) \overset{\perp}{\oplus} \operatorname{Im}(u)$$

2 Réduction des matrices symétriques réelles

On note toujours u l'endomorphisme de $\mathbb{R}^n$ canoniquement associé à la matrice A.

Exercice 4 *Montrer que les valeurs propres d'une matrice symétrique réelle A sont toutes réelles.*

Exercice 5 *Montrer le résultat de l'exercice précédent dans le cas $n = 2$ en utilisant le polynôme caractéristique.*

Pour toute valeur propre (réelle) λ de $A \in \mathcal{S}_n(\mathbb{R})$, on désigne par $E_\lambda = \ker(u - \lambda I_d)$ l'espace propre associé.

Exercice 6 *Montrer que si λ est une valeur propre (réelle) de $A \in \mathcal{S}_n(\mathbb{R})$, on a alors :*

$$\mathbb{R}^n = \ker(u - \lambda I_d) \overset{\perp}{\oplus} \operatorname{Im}(u - \lambda I_d)$$

l'espace $\operatorname{Im}(u - \lambda I_d)$ étant stable par u.

Exercice 7 *Montrer que si λ, μ sont deux valeurs propres (réelles) distinctes de $A \in \mathcal{S}_n(\mathbb{R})$, alors les espaces propres E_λ et E_μ sont orthogonaux.*

Exemple 1 *Montrer que si λ_1 est une valeur propre (réelle) de $A \in \mathcal{S}_n(\mathbb{R})$, $e_1 \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ un vecteur propre associé, alors l'hyperplan $H = (\mathbb{R}e_1)^\perp$ est stable par u et la matrice dans une base orthonormée de la restriction de u à H est symétrique (on suppose ici que $n \geq 2$).*

Exercice 8 *Soit $A \in \mathcal{S}_n(\mathbb{R})$. Montrer que si F est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^n$ stable par u, alors $F^\perp$ est aussi stable par u.*

Une récurrence nous permet alors de montrer le résultat suivant (théorème spectral pour les matrices symétriques réelles).

Exercice 9 *Montrer que toute matrice symétrique réelle $A \in \mathcal{S}_n(\mathbb{R})$ se diagonalise dans une base orthonormée, c'est-à-dire qu'il existe une matrice orthogonale $P \in \mathcal{O}_n(\mathbb{R})$ et une matrice diagonale D telles que ${}^t PAP$ soit diagonale.*

Exercice 10 *Vérifier que le résultat de l'exercice précédent n'est plus valable pour les matrices complexes.*

Exercice 11 *Diagonaliser dans une base orthonormée la matrice :*

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix}$$

Exercice 12 *On se donne deux réels α, β et $A(\alpha, \beta)$ est la matrice d'ordre $n \geq 2$:*

$$A(\alpha, \beta) = \begin{pmatrix} \beta & \alpha & \alpha & \cdots & \alpha \\ \alpha & \beta & \alpha & \cdots & \alpha \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \alpha & \cdots & \alpha & \beta & \alpha \\ \alpha & \cdots & \alpha & \alpha & \beta \end{pmatrix}$$

1. *Déterminer les valeurs propres de $A(\alpha, \beta)$.*
2. *Diagonaliser $A(\alpha, \beta)$ dans une base orthonormée.*

Exercice 13 *Soit $A = ((a_{ij}))_{1 \leq i,j \leq n} \in \mathcal{S}_n(\mathbb{R})$ de valeurs propres $\lambda_1, \cdots, \lambda_n$. Montrer que :*

$$\sum_{1 \leq i,j \leq n} a_{ij}^2 = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i^2.$$

Exercice 14 *Soit $\{A_i \mid i \in I\}$ une famille de matrices symétriques réelles dans $\mathcal{S}_n(\mathbb{R})$ (I est un ensemble d'indice non nécessairement fini). Montrer que ces matrices sont simultanément diagonalisables dans une base orthonormée (i. e. il existe une matrice orthogonale P telle que pour tout $i \in I$ la matrice ${}^tPA_iP$ est diagonale) si, et seulement si les matrices A_i commutent deux à deux.*

Exercice 15 *Soit $A \in \mathcal{S}_n(\mathbb{R})$. Montrer que $A \in \mathcal{S}_n^+(\mathbb{R})$ [resp. $A \in \mathcal{S}_n^{++}(\mathbb{R})$] si et seulement si toutes ses valeurs propres sont positives [resp. strictement positives].*

Si $A \in \mathcal{S}_n^+(\mathbb{R})$ [resp. $A \in \mathcal{S}_n^{++}(\mathbb{R})$] alors $\det(A) = \prod_{k=1}^{n} \lambda_k \geq 0$ [resp. $\det(A) > 0$], où les λ_k sont les valeurs propres distinctes ou confondues de A.

Exercice 16 *Soit $A \in \mathcal{S}_n(\mathbb{R})$ telle que $A^p = I_n$ où p est un entier naturel non nul. Montrer que $A^2 = I_n$.*

Exercice 17 *Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. Montrer que $A \in \mathcal{S}_n^+(\mathbb{R})$ si, et seulement si, il existe $B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ telle que $A = {}^tBB$.*

Exercice 18 *Une matrice $A = ((a_{ij}))_{1 \leq i,j \leq n} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ est dite à diagonale strictement dominante si :*

$$\forall i \in \{1, 2, \cdots, n\}, \ |a_{ii}| > \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^{n} |a_{ij}|.$$

1. *Soient $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ et $\lambda \in \mathbb{C}$ une valeur propre de A. Montrer qu'il existe un indice $i \in \{1, 2, \cdots, n\}$ tel que :*

   $$|\lambda - a_{ii}| \leq \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^{n} |a_{ij}|.$$

   (théorème de Gerschgörin-Hadamar).
2. *Montrer qu'une matrice symétrique réelle à diagonale strictement dominante $A = ((a_{ij}))_{1 \leq i,j \leq n}$ est définie positive si, et seulement si, $a_{ii} > 0$ pour tout i compris entre 1 et n.*

3 Racine carrée d'une matrice réelle symétrique positive

Exercice 19 *Montrer que si $A \in \mathcal{S}_n^+(\mathbb{R})$, il existe alors une unique $B \in \mathcal{S}_n^+(\mathbb{R})$ telle que $A = B^2$.*

Avec les notations de l'exercice précédent, on dit que B est la racine carrée positive de $A \in \mathcal{S}_n^+(\mathbb{R})$.
Cette racine carrée B est dans $\mathcal{S}_n^{++}(\mathbb{R})$ si $A \in \mathcal{S}_n^{++}(\mathbb{R})$.

Exercice 20 *Soient $A \in \mathcal{S}_n^{++}(\mathbb{R})$ et $B \in \mathcal{S}_n^+(\mathbb{R})$. Montrer que AB a toutes ses valeurs propres réelles positives et est diagonalisable.*

4 Décomposition polaire

Exercice 21 *Montrer que toute matrice $A \in GL_n(\mathbb{R})$ peut s'écrire de manière unique $A = \Omega S$ où Ω est une matrice orthogonale et S une matrice symétrique définie positive.*

De la densité de $GL_n(\mathbb{R})$ dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, on peut déduire une généralisation à $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ du théorème de décomposition polaire des matrices inversibles. Pour ce faire on a besoin du résultat suivant.

Exercice 22 *Montrer que l'ensemble $\mathcal{O}_n(\mathbb{R})$ des matrices réelles orthogonales est compact dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.*

Exercice 23 *Montrer que $\mathcal{O}_n(\mathbb{R})$ est un sous-groupe compact maximal de $GL_n(\mathbb{R})$, c'est-à-dire que $\mathcal{O}_n(\mathbb{R})$ est compact et que si G est sous-groupe compact de $GL_n(\mathbb{R})$ qui contient $\mathcal{O}_n(\mathbb{R})$, alors $G = \mathcal{O}_n(\mathbb{R})$.*

Exercice 24 *Montrer que toute matrice $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ peut s'écrire $A = \Omega S$ où Ω est une matrice orthogonale et S une matrice symétrique positive.*

Remarque 1 *Si A est de rang $r < n$, alors la décomposition ci-dessus n'est pas unique. En effet, on peut diagonaliser la matrice symétrique positive S dans une base orthonormée $(e_i)_{1\leq i\leq n}$ avec $Se_i = \lambda_i e_i$ pour $1 \leq i \leq n$ où $\lambda_i = 0$ pour $1 \leq i \leq n-r$ et $\lambda_i > 0$ sinon (si A n'est pas inversible alors il en est de même de S et 0 est valeur propre de S). Les Ωe_i sont alors uniquement déterminés pour $n-r+1 \leq i \leq n$, mais pour $1 \leq i \leq n-r$ il n'y a pas unicité.*

Le théorème de décomposition polaire des matrices inversibles peut s'exprimer comme suit en utilisant la compacité de $\mathcal{O}_n(\mathbb{R})$.

Exercice 25 *Montrer que l'application $(\Omega, S) \longmapsto \Omega S$ réalise un homéomorphisme de $\mathcal{O}_n(\mathbb{R}) \times \mathcal{S}_n^{++}(\mathbb{R})$ sur $GL_n(\mathbb{R})$.*

5 Rayon spectral des matrices symétriques

On munit l'espace vectoriel $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ de la norme matricielle $\|\cdot\|$ induite par la norme euclidienne de $\mathbb{R}^n$.
On rappelle que si $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$, son rayon spectral est le réel :

$$\rho(A) = \max_{\lambda \in \mathrm{sp}(A)} |\lambda|.$$

Le théorème de diagonalisation des matrices symétriques réelles permet de calculer la norme d'une matrice réelle.

Exercice 26 *Montrer que si $A \in \mathcal{S}_n(\mathbb{R})$, alors :*

$$\|A\| = \rho(A).$$

Exercice 27 *Soient A et B deux matrices symétriques réelles. Montrer que :*

$$\rho(AB) \leq \rho(A)\rho(B).$$

Exercice 28 *Montrer que pour toute matrice $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, on a :*

$$\|A\| = \sqrt{\|\,{}^tAA\|} = \sqrt{\rho(\,{}^tAA)}.$$

Exercice 29 *On désigne par A la matrice réelle d'ordre n supérieur ou égal à 2 définie par :*

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \ddots & 0 \\ 0 & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & 0 & 0 & 1 \\ 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

1. *Calculer les valeurs propres de ${}^tAA$.*
2. *Calculer $\|A\|$.*

Exercice 30 *On désigne par A la matrice réelle d'ordre n supérieur ou égal à 2 définie par :*

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 & -1 \\ -1 & 1 & 0 & \ddots & 0 \\ 0 & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & -1 & 1 & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}.$$

1. *Calculer les valeurs propres de ${}^tAA$.*
2. *Calculer $\|A\|$.*

6 Réduction des formes quadratiques sur $\mathbb{R}^n$

On peut associer une forme quadratique à une matrice symétrique réelle $A = ((a_{ij}))_{1\leq i,j\leq n}$ en posant, pour tout $x \in \mathbb{R}^n$:

$$q(x) = \langle Ax \mid x\rangle = \sum_{i=1}^{n}\left(\sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j\right)x_i = \sum_{i=1}^{n} a_{ii}x_i^2 + 2\sum_{1\leq i<j\leq n} a_{ij}x_ix_j.$$

La forme polaire associée est alors définie par :

$$\forall (x,y) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n,\ \varphi(x,y) = \frac{1}{2}\left(q(x+y) - q(x) - q(y)\right) = \langle Ax \mid y\rangle,$$

soit :

$$\varphi(x,y) = \sum_{i=1}^{n}\left(\sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j\right)y_i = \sum_{i=1}^{n} a_{ii}x_iy_i + \sum_{1\leq i<j\leq n} a_{ij}(x_iy_j + x_jy_i).$$

Réciproquement si q est une forme quadratique sur $\mathbb{R}^n$ de forme polaire φ, sa matrice dans la base canonique $(e_i)_{1\leq i\leq n}$ (ou dans une base quelconque) de $\mathbb{R}^n$, $A = ((\varphi(e_i,e_j)))_{1\leq i,j\leq n}$, est symétrique.

On se donne $A \in \mathcal{S}_n(\mathbb{R})$ et on désigne par u l'endomorphisme de $\mathbb{R}^n$ et par q la forme quadratique qui lui sont canoniquement associés. On note φ la forme polaire de q.

On rappelle que le cône isotrope de q est définie par :

$$q^{-1}\{0\} = \{x \in \mathbb{R}^n \mid q(x) = 0\}$$

et le noyau de q (ou de φ) est défini par :

$$\ker(q) = \{x \in \mathbb{R}^n \mid \forall y \in \mathbb{R}^n,\ \varphi(x,y) = 0\}$$

Le noyau de q est contenu dans son cône isotrope (pour $x \in \ker(q)$, on a en particulier $q(x) = \varphi(x,x) = 0$).

On dit que q (ou φ) est non dégénérée si son noyau est réduit à $\{0\}$.

On rappelle qu'une forme quadratique q est dite positive [resp. définie positive] si $q(x) \geq 0$ [resp. $q(x) > 0$] pour tout $x \in \mathbb{R}^n$ [resp. $x \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$]. Avec $q(x) = \langle Ax \mid x\rangle$, on voit que cela revient à dire que la matrice symétrique A est positive [resp. définie positive].

On rappelle que deux vecteurs x, y de $\mathbb{R}^n$ sont dits orthogonaux relativement à φ si $\varphi(x,y) = 0$ et pour toute partie non vide X de $\mathbb{R}^n$, l'orthogonal de X relativement à φ est le sous-ensemble de $\mathbb{R}^n$ formé des vecteurs orthogonaux à tous les vecteurs de X, il est notée $X^\perp$ et on a :

$$X^\perp = \{y \in \mathbb{R}^n \mid \forall x \in X,\ \varphi(x,y) = 0\}.$$

Le noyau de q est l'orthogonal de $\mathbb{R}^n$.

Exercice 31 *Montrer que* $\ker(q) = \ker(u)$.

Exercice 32 *Montrer que si q est une forme quadratique positive, on a alors pour tous vecteurs x, y dans $\mathbb{R}^n$:*

$$|\varphi(x,y)| \leq \sqrt{q(x)}\sqrt{q(y)},$$

où φ est la forme polaire de q.

Exercice 33 *Montrer que pour A positive, on a $q^{-1}\{0\} = \ker(u) = \ker(q)$, c'est-à-dire que le cône isotrope de q est égal à son noyau.*

On note $S^1 = \{x \in \mathbb{R}^n \mid \|x\| = 1\}$ la sphère unité de $\mathbb{R}^n$. Cette sphère unité est compacte puisqu'on est en dimension finie.

Exercice 34 *Montrer que le réel $\lambda_1 = \sup\limits_{x\in S^1} q(x)$ est valeur propre de A.*

Exercice 35 *Montrer que la matrice A se diagonalise dans une base orthonormée de $\mathbb{R}^n$.*

On se donne une forme quadratique non nulle q sur $\mathbb{R}^n$.

Exercice 36 *Montrer qu'il existe un entier r compris entre 1 et n, des réels non nuls $\lambda_1, \cdots, \lambda_r$ et des formes linéaires indépendantes $\ell_1, \cdots, \ell_r$ tels que :*

$$\forall x \in \mathbb{R}^n,\ q(x) = \sum_{j=1}^{r} \lambda_j \ell_j^2(x)$$

Exercice 37 *Réduire la forme quadratique q définie sur $\mathbb{R}^3$ par :*

$$q(x) = -x_1^2 - x_2^2 - x_3^2 + 2(x_1x_2 + x_1x_3 + x_2x_3)$$

Exercice 38 *Réduire la forme quadratique q définie sur $\mathbb{R}^3$ par :*

$$q(x) = -x_1^2 - x_2^2 - x_3^2 + 2(x_1x_2 + x_1x_3 + x_2x_3)$$

La réduction de Gauss peut s'écrire :

$$\forall x \in \mathbb{R}^n,\ q(x) = \sum_{j=1}^{n} \lambda_j \ell_j^2(x)$$

où on a posé $\lambda_{r+1} = \cdots = \lambda_n = 0$ dans le cas où $r \leq n-1$.

Exercice 39 *Montrer que la forme polaire φ de q est définie par :*

$$\forall (x,y) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n,\ \varphi(x,y) = \sum_{j=1}^{n} \lambda_j \ell_j(x) \ell_j(y)$$

Exercice 40 *Étant donnée une base $(\ell_1, \cdots, \ell_n)$ de l'espace vectoriel $\mathcal{L}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R})$ des formes linéaires de $\mathbb{R}^n$, montrer qu'il existe une base $(f_1, \cdots, f_n)$ de $\mathbb{R}^n$ telle que :*

$$\ell_i(f_j) = \begin{cases} 1 \text{ si } i = j \\ 0 \text{ si } i \neq j \end{cases} \quad (1 \leq i, j \leq n)$$

Dans la situation du lemme précédent, on dit que $(\ell_1, \cdots, \ell_n)$ est la base duale de $(f_1, \cdots, f_n)$.

Exercice 41 *Montrer qu'il existe une base $(f_i)_{1 \leq i \leq n}$ de $\mathbb{R}^n$ dans laquelle la matrice de q est diagonale de la forme :*

$$D = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & \lambda_n \end{pmatrix}$$

(les r premiers λ_i sont non nuls et les suivants sont nuls).
Une telle base $(f_i)_{1 \leq i \leq n}$ est dite q-orthogonale.

Exercice 42 *Montrer que* $\operatorname{rg}(q) = \operatorname{rg}(A) = r$ *et :*

$$\ker(q) = \{x \in \mathbb{R}^n \mid \ell_1(x) = \ell_2(x) = \cdots = \ell_r(x) = 0\}$$

Exercice 43 *Si $A \in \mathcal{S}_n(\mathbb{R})$ est de rang r, montrer qu'il existe $P \in GL_n(\mathbb{R})$ telle que ${}^tPAP$ soit diagonale de la forme $D = \begin{pmatrix} I_s & 0 & 0 \\ 0 & -I_t & 0 \\ 0 & 0 & 0_{n-r} \end{pmatrix}$ où s, t sont deux entiers naturels tels que $s + t = r$, I_r la matrice identité d'ordre s si $s \geq 1$ ou n'est pas présente dans cette décomposition si $p = 0$, I_t est définie de même et 0_{n-r} est la matrice nulle d'ordre $n - r$ si $r < n$ ou n'est pas présente dans cette décomposition si $r = n$.*

Le couple d'entiers (s, t) est la signature de q. Il est uniquement déterminé par q comme le montre le résultat suivant.

Exercice 44 *Montrer qu'il existe un unique couple (s, t) d'entiers naturels tel que pour toute base $(e_i)_{1 \leq i \leq n}$ de $\mathbb{R}^n$ qui est orthogonale relativement à q, le nombre de vecteurs e_i tels que $q(e_i) > 0$ est égal à s et le nombre de vecteurs e_i tels que $q(e_i) < 0$ est égal à t. De plus, on a $s + t = \operatorname{rg}(q)$.*

Exercice 45 *Soit F un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^n$. Montrer que la restriction de q à F est non dégénérée si, et seulement si, $F \cap F^\perp = \{0\}$.*

Exercice 46 *Soit F un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^n$. Montrer que si la restriction de q à F est non dégénérée on a alors $\mathbb{R}^n = F \oplus F^\perp$.*

Exercice 47 *En désignant par $\mathcal{P}$ [resp. $\mathcal{N}$] l'ensemble de tous les sous-espaces vectoriels F de $\mathbb{R}^n$ tels que la restriction de q à F soit définie positive [resp. définie négative] ($\mathcal{P}$ ou $\mathcal{N}$ peut être vide), montrer que la signature (s,t) de q est donnée par :*

$$s = \begin{cases} 0 \text{ si } \mathcal{P} = \emptyset \\ \max\limits_{F \in \mathcal{P}} \dim(F) \text{ si } \mathcal{P} \neq \emptyset \end{cases}$$

et :

$$t = \begin{cases} 0 \text{ si } \mathcal{N} = \emptyset \\ \max\limits_{F \in \mathcal{N}} \dim(F) \text{ si } \mathcal{N} \neq \emptyset \end{cases}$$

L'utilisation des mineurs principaux de la matrice de q dans une quelconque base de $\mathbb{R}^n$ nous permet de savoir si une forme quadratique est définie positive ou non.

On rappelle que si $A = ((a_{ij}))_{1 \leq i,j \leq n}$ est une matrice carrée d'ordre n, les mineurs principaux de A sont les déterminants des matrices extraites $A_k = ((a_{ij}))_{1 \leq i,j \leq k}$ où k est un entier compris entre 1 et n.

Exercice 48 *Soit q une forme quadratique non nulle sur $\mathbb{R}^n$ de matrice $A = ((a_{ij}))_{1 \leq i,j \leq n}$ dans la base canonique $(e_i)_{1 \leq i \leq n}$. Montrer que la forme q est définie positive si, et seulement si, tous les mineurs principaux de A sont strictement positifs.*

Comme application de ce résultat, on a l'exercice suivant.

Exercice 49 *Montrer que $\mathcal{S}_n^{++}(\mathbb{R})$ est un ouvert de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.*

Exercice 50 *Montrer que $\mathcal{S}_n^{+}(\mathbb{R})$ est un fermé convexe de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ et que son intérieur est $\mathcal{S}_n^{++}(\mathbb{R})$.*

Exercice 51 *Soit $A \in \mathcal{S}_n(\mathbb{R})$. Montrer que $\mathrm{Tr}(A) = 0$ si, et seulement si, il existe une base orthonormée de $\mathbb{R}^n$ telle que la matrice de u dans cette base a tous ses termes diagonaux nuls.*

Exercice 52 *Montrer que toute matrice $A \in \mathcal{S}_n^{++}(\mathbb{R})$ s'écrit de manière unique sous la forme $A = {}^tBB$, où B est une matrice triangulaire supérieure de termes diagonaux tous strictement positifs (décomposition de Cholesky).*

7 Adjoint d'un endomorphisme d'espace euclidien

On se place ici dans un espace euclidien $(E, \langle \cdot \mid \cdot \rangle)$ de dimension n, où on a noté $\langle \cdot \mid \cdot \rangle$ un produit scalaire sur E.

On note $\mathcal{L}(E)$ l'espace des endomorphismes de E.

On rappelle que le dual de E, c'est-à-dire l'ensemble E^* de toutes les formes linéaires sur E, est un espace vectoriel de dimension $n = \dim(E)$.

Les résultats suivants nous permettent de définir l'adjoint d'un endomorphisme.

Exercice 53 *Montrer que pour toute forme linéaire ℓ sur E, il existe un unique vecteur $a \in E$ tel que :*

$$\forall x \in E,\ \ell(x) = \langle x \mid a \rangle.$$

Exercice 54 *Montrer que pour tout endomorphisme $u \in \mathcal{L}(E)$, il existe un unique endomorphisme $u^* \in \mathcal{L}(E)$ tel que :*

$$\forall (x,y) \in E^2,\ \langle u(x) \mid y \rangle = \langle x \mid u^*(y) \rangle$$

Définition 1 *Avec les notations du théorème précédent, on dit que u^* est l'adjoint de u.*

Exercice 55 *Montrer que si $\mathcal{B}$ est une base orthonormée de E et u un endomorphisme de E de matrice A dans cette base, alors la matrice de u^* dans $\mathcal{B}$ est la transposée ${}^tA$.*

Exercice 56 *Montrer que our tous endomorphismes u, v dans $\mathcal{L}(E)$, on a :*

1. $(u^*)^* = u$.
2. $(u \circ v)^* = v^* \circ u^*$.
3. *si* $u \in GL(E)$, *alors* $u^* \in GL(E)$ *et* $(u^*)^{-1} = (u^{-1})^*$.
4. $\ker(u^*) = (\mathrm{Im}(u))^\perp$ *et* $\mathrm{Im}(u^*) = (\ker(u))^\perp$.
5. $\mathrm{rg}(u^*) = \mathrm{rg}(u)$.

Remarque 2 *Avec le point **5.** on retrouve l'égalité $\mathrm{rg}({}^tA) = \mathrm{rg}(A)$ pour toute matrice réelle A.*

Définition 2 *Un endomorphisme $u \in \mathcal{L}(E)$ est dit auto-adjoint (ou symétrique) si $u^* = u$.*

On note $S(E)$ l'ensemble de tous les endomorphismes symétriques de E.

Exercice 57 *Montrer qu'un endomorphisme $u \in \mathcal{L}(E)$ est symétrique si, et seulement si, sa matrice dans une base orthonormée de E est symétrique.*

Exercice 58 *Montrer que $S(E)$ est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{L}(E)$ de dimension $\dfrac{n(n+1)}{2}$.*

Exercice 59 *Montrer que si u, v sont deux endomorphismes symétriques de E, alors la composée $u \circ v$ est symétrique si, et seulement si, u et v commutent.*

Exercice 60 *Montrer qu'un projecteur p de E est un projecteur orthogonal si, et seulement si, il est symétrique.*

Exercice 61 *Montrer qu'une symétrie s de E est une symétrie orthogonale si, et seulement si, elle est symétrique.*

Exercice 62 *Montrer que pour tout endomorphisme u de $\mathbb{R}^n$, il existe un sous espace vectoriel F de $\mathbb{R}^n$ de dimension 1 ou 2 qui est stable par u.*