1 Énoncé de l'épreuve

Notations et objets du problème

On désigne par $\mathbb{N}$ *l'ensemble des entiers naturels, par* $\mathbb{R}$ *le corps des nombres réels et par* $\mathbb{R}^+$ *l'ensemble des réels positifs ou nuls.*

Pour tout entier naturel n *et tout entier* k *compris entre* 0 *et* n*, on note* C_n^k *le coefficient binomial défini par :*

$$C_n^k = \frac{n!}{k!\,(n-k)!}$$

avec la convention $0! = 1$.

Si A, B *sont deux ensembles, avec* B *inclus dans* A*, on note* $A \setminus B$ *l'ensemble :*

$$A \setminus B = \{x \in A \mid x \notin B\}.$$

On rappelle que si E *est un espace vectoriel réel, une famille* $\mathcal{B} = (e_i)_{i\in K}$ *de vecteurs non nuls de* E *est une base si pour tout vecteur* x *dans* E *il existe une unique famille de scalaires* $(x_j)_{j\in L}$*, où* L *est une partie finie de* K*, telle que* $x = \sum\limits_{j\in L} x_j e_j$.

Sauf indication contraire, on désigne par a *et* b *des réels tels que* $a < b$ *et par* I *l'intervalle fermé borné* $[a, b]$.

On note $\mathcal{C}(I)$ *l'espace vectoriel réel des fonctions définies sur* I *à valeurs réelles et continues.*

On note $\mathcal{F}$ *l'espace vectoriel réel des fonctions définies sur* $\mathbb{R}$ *à valeurs réelles périodiques de période* 2π et *continues.*

Pour éviter les répétitions dans les définitions qui suivent on désigne par $\mathcal{H}$ *l'espace vectoriel* $\mathcal{C}(I)$ *ou* $\mathcal{F}$ *et par* J *l'intervalle* I *dans le cas où* $\mathcal{H}$ *est l'espace* $\mathcal{C}(I)$ *ou l'intervalle* $\mathbb{R}$ *dans le cas où* $\mathcal{H}$ *est l'espace* $\mathcal{F}$.

Pour toute fonction f *appartenant à* $\mathcal{H}$ *on désigne par* $|f|$ *la fonction définie par :*

$$|f| : \begin{array}{ccc} J & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & |f(x)| \end{array}$$

L'espace $\mathcal{H}$ *est muni de la norme de la convergence uniforme définie par :*

$$\forall f \in \mathcal{H}, \quad \|f\|_\infty = \sup_{x\in J} |f(x)|.$$

On munit l'espace $\mathcal{H}$ *de la relation d'ordre partiel notée* $\leq$ *et définie par :*

$$\forall (f,g) \in \mathcal{H}\times\mathcal{H}, \quad (f \leq g) \quad \Leftrightarrow \quad (\forall x \in J, \quad f(x) \leq g(x)).$$

On dit qu'une fonction f *appartenant à* $\mathcal{H}$ *est positive et on note* $0 \leq f$*, si* $0 \leq f(t)$ *pour tout* t *dans* J.

On désigne par $\mathcal{L}(\mathcal{H})$ *l'espace vectoriel des endomorphismes de* $\mathcal{H}$*. Un élément de* $\mathcal{L}(\mathcal{H})$ *est aussi appelé un opérateur linéaire sur* $\mathcal{H}$.

On dit qu'un opérateur linéaire u *sur* $\mathcal{H}$ *est positif s'il transforme toute fonction positive appartenant à* $\mathcal{H}$ *en une fonction positive.*

On note $\mathbb{R}[x]$ *l'espace vectoriel sur* $\mathbb{R}$ *des fonctions polynomiales d'une variable à coefficients réels. Cet espace est muni de la base* $\{e_k \mid k \in \mathbb{N}\}$ *définie par :*

$$\forall k \in \mathbb{N}, \quad \forall x \in \mathbb{R}, \quad e_k(x) = x^k.$$

On note $\mathcal{P}$ le sous-espace vectoriel de $\mathcal{F}$ formé des polynômes trigonométriques à coefficients réels, c'est-à-dire des fonctions de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ de la forme :

$$x \mapsto a_0 + \sum_{k=1}^{n} \left(a_k \cos(kx) + b_k \sin(kx)\right),$$

où n est un entier naturel, le coefficient a_0 et les coefficients a_k, b_k pour tout entier k compris entre 1 et n sont réels. Cet espace est muni de la base $\{c_k \mid k \in \mathbb{N}\} \cup \{s_k \mid k \in \mathbb{N} \setminus \{0\}\}$ définie par :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad \begin{cases} \forall k \in \mathbb{N}, & c_k(x) = \cos(kx), \\ \forall k \in \mathbb{N} \setminus \{0\}, & s_k(x) = \sin(kx). \end{cases}$$

On remarquera que $c_0 = e_0$.

Pour toute fonction f appartenant à $\mathcal{F}$, on désigne par $(a_k(f))_{k\geq 0}$ et $(b_k(f))_{k\geq 1}$ les coefficients de Fourier de f définis par :

$$\forall k \in \mathbb{N}, \quad a_k(f) = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(t)\cos(kt)\,dt,$$

$$\forall k \in \mathbb{N} \setminus \{0\}, \quad b_k(f) = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(t)\sin(kt)\,dt.$$

On note :

$$S_0(f) = \frac{a_0(f)}{2} c_0 \tag{1}$$

et pour tout entier n strictement positif, on désigne par $S_n(f)$ le polynôme trigonométrique défini par :

$$S_n(f) = \frac{a_0(f)}{2} c_0 + \sum_{k=1}^{n} \left(a_k(f) c_k + b_k(f) s_k\right). \tag{2}$$

La partie **I** *est consacrée aux opérateurs linéaires positifs. Cette partie est utilisée par les parties* **II** *et* **III**.

La partie **II** *est consacrée au théorème suivant sur l'approximation uniforme des fonctions continues sur un intervalle fermé borné et à valeurs réelles :*

Théorème 1 (Korovkin) *Si $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite d'endomorphismes positifs de $\mathcal{C}(I)$, où I est un intervalle fermé borné de $\mathbb{R}$, telle que pour toute fonction f appartenant à $\{e_0, e_1, e_2\}$ la suite $(u_n(f))_{n\in\mathbb{N}}$ converge uniformément vers f sur I, alors pour toute fonction f appartenant à $\mathcal{C}(I)$ la suite de fonctions $(u_n(f))_{n\in\mathbb{N}}$ converge uniformément vers f sur I.*

La partie **III** *indépendante de la partie* **II** *est consacrée au théorème suivant sur l'approximation uniforme des fonctions périodiques, continues sur $\mathbb{R}$ et à valeurs réelles :*

Théorème 2 (Korovkin) *Si $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite d'endomorphismes positifs de $\mathcal{F}$ telle que pour toute fonction f appartenant à $\{c_0, c_1, s_1\}$, la suite $(u_n(f))_{n\in\mathbb{N}}$ converge uniformément vers f sur $\mathbb{R}$, alors pour toute fonction f appartenant à $\mathcal{F}$, la suite $(u_n(f))_{n\in\mathbb{N}}$ converge uniformément vers f sur $\mathbb{R}$.*

– I – Opérateurs linéaires positifs. Propriétés et exemples

I.1 Soit u un opérateur linéaire positif sur $\mathcal{H}$. Montrer que :

$$\forall f \in \mathcal{H}, \quad |u(f)| \leq u(|f|).$$

I.2 Soit u un opérateur linéaire positif sur $\mathcal{H}$. Montrer que u est l'endomorphisme nul si et seulement si $u(e_0) = 0$.

I.3 Montrer que tout opérateur linéaire positif sur $\mathcal{H}$ est continu.

I.4 Soit u un opérateur linéaire positif sur $\mathcal{H}$. Justifier l'existence de :

$$\|u\|_\infty = \sup_{f \in \mathcal{H} \setminus \{0\}} \frac{\|u(f)\|_\infty}{\|f\|_\infty}$$

et exprimer cette quantité en fonction de u et de e_0.

I.5 *Pour cette question on se place dans $\mathcal{H} = \mathcal{C}(I)$ avec $I = [a, b]$.*
Soit n un entier strictement positif. Etant donnés $n+1$ points $(x_{n,k})_{0 \leq k \leq n}$ deux à deux distincts de I et $n+1$ fonctions $(u_{n,k})_{0 \leq k \leq n}$ de $\mathcal{C}(I)$, montrer que l'opérateur linéaire u_n défini sur $\mathcal{C}(I)$ par :

$$\forall f \in \mathcal{C}(I), \quad u_n(f) = \sum_{k=0}^{n} f(x_{n,k})\, u_{n,k}$$

est positif si et seulement si toutes les fonctions $u_{n,k}$, pour k compris entre 0 et n, sont positives.

I.6 *Pour cette question on se place dans $\mathcal{H} = \mathcal{C}(I)$ avec $I = [0, 1]$ et on se donne un entier n strictement positif.*
On note φ_n la fonction définie sur $\mathbb{R}^2$ par :

$$\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2, \quad \varphi_n(x, y) = \left(x e^{\frac{y}{n}} + 1 - x\right)^n.$$

Pour tout entier k compris entre 0 et n, on désigne par $B_{n,k}$ la fonction polynomiale définie par :

$$\forall x \in I, \quad B_{n,k}(x) = C_n^k x^k (1 - x)^{n-k} \tag{3}$$

et B_n est l'opérateur linéaire positif défini par :

$$\forall f \in \mathcal{C}(I), \quad B_n(f) = \sum_{k=0}^{n} f\left(\frac{k}{n}\right) B_{n,k}. \tag{4}$$

I.6.1 Pour tout réel y on désigne par f_y la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad f_y(x) = e^{xy}.$$

Montrer que :

$$\forall x \in I, \quad B_n(f_y)(x) = \varphi_n(x, y).$$

I.6.2 Montrer que pour tout entier naturel j on a :

$$B_n(e_j)(x) = \frac{\partial^j \varphi_n}{\partial y^j}(x, 0).$$

I.6.3 Exprimer $B_n(e_j)$ dans la base $\{e_k \mid k \in \mathbb{N}\}$ pour $j = 0, 1, 2$.

I.7 *Pour cette question on se place dans $\mathcal{H} = \mathcal{F}$ et on désigne par K un polynôme trigonométrique. On associe à ce polynôme l'opérateur linéaire u défini sur $\mathcal{F}$ par :*

$$\forall f \in \mathcal{F}, \quad \forall x \in \mathbb{R}, \quad u(f)(x) = \int_{-\pi}^{\pi} f(x-t) K(t) \, dt.$$

I.7.1 Montrer que pour toute fonction f appartenant à $\mathcal{F}$ on a :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad u(f)(x) = \int_{-\pi}^{\pi} f(t) K(x-t) \, dt.$$

I.7.2 Montrer que pour toute fonction f appartenant à $\mathcal{F}$, $u(f)$ est un polynôme trigonométrique.

I.7.3 Montrer que l'opérateur linéaire u est positif si et seulement si la fonction K est à valeurs positives ou nulles.

I.8 *Pour cette question on se place dans $\mathcal{H} = \mathcal{F}$, on se donne un entier naturel n strictement positif et on considère l'opérateur linéaire T_n défini sur $\mathcal{F}$ par :*

$$\forall f \in \mathcal{F}, \quad T_n(f) = \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} S_k(f), \tag{5}$$

où S_0 désigne l'opérateur linéaire défini sur $\mathcal{F}$ par (1) et *pour tout entier naturel k* non nul, *S_k désigne l'opérateur linéaire défini sur $\mathcal{F}$ par* (2).

I.8.1 Montrer que, pour tout entier naturel p strictement positif, la fonction θ_p définie sur $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Z}\pi$ par :

$$x \mapsto \frac{\sin(px)}{\sin(x)}$$

se prolonge en une fonction continue et périodique de période 2π sur $\mathbb{R}$. On note encore θ_p ce prolongement.

I.8.2 Montrer que pour tout réel x on a :

$$\sin\left(\frac{x}{2}\right)\left(\frac{1}{2} + \sum_{k=1}^{n} \cos(kx)\right) = \frac{1}{2} \sin\left(\frac{2n+1}{2} x\right). \tag{6}$$

I.8.3 Montrer que pour toute fonction f appartenant à $\mathcal{F}$ on a :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad S_n(f)(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t) \, \theta_{2n+1}\left(\frac{x-t}{2}\right) dt.$$

I.8.4 Montrer que pour tout réel x on a :

$$\sin\left(\frac{x}{2}\right)\left(\sum_{k=0}^{n-1} \sin\left((2k+1)\frac{x}{2}\right)\right) = \sin^2\left(\frac{n}{2} x\right). \tag{7}$$

I.8.5 Montrer que pour toute fonction f appartenant à $\mathcal{F}$ on a :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad T_n(f)(x) = \int_{-\pi}^{\pi} f(t) K_n(x-t) \, dt,$$

où K_n est un polynôme trigonométrique.

I.8.6 Montrer que l'opérateur linéaire T_n est positif.

I.8.7 Calculer $S_n(c_j)$, $T_n(c_j)$ pour tout entier naturel j et $S_n(s_j)$, $T_n(s_j)$ pour tout entier naturel j non nul.

– II – Théorème de Korovkin sur $\mathcal{C}(I)$

Pour cette partie on se place dans $\mathcal{H} = \mathcal{C}(I)$ avec $I = [a, b]$.

II.1 Soit f un élément de $\mathcal{C}(I)$. Montrer que pour tout réel ε strictement positif, on peut trouver un réel η strictement positif tel que :

$$\forall (t, x) \in I \times I, \quad |f(t) - f(x)| \leq \varepsilon + 2\frac{\|f\|_\infty}{\eta^2}(t - x)^2. \tag{8}$$

II.2 *Pour toute fonction g appartenant à $\mathcal{C}(I)$, pour tout entier naturel k et pour tout réel x fixé dans I, on désigne par $g - g(x)e_k$ la fonction de I dans $\mathbb{R}$ définie par :*

$$t \mapsto g(t) - g(x)t^k.$$

Soit f appartenant à $\mathcal{C}(I)$. Montrer que pour tout réel ε strictement positif, on peut trouver un réel η strictement positif tel que :

$$\forall x \in I, \quad |f - f(x)e_0| \leq \varepsilon e_0 + 2\frac{\|f\|_\infty}{\eta^2}\left(e_2 - 2xe_1 + x^2 e_0\right). \tag{9}$$

II.3 Soient u un opérateur linéaire positif sur $\mathcal{C}(I)$ et f une fonction appartenant à $\mathcal{C}(I)$. Montrer que pour tout réel ε strictement positif, on peut trouver un réel η strictement positif tel que :

$$\forall x \in I, \quad |u(f - f(x)e_0)| \leq \varepsilon u(e_0) + 2\frac{\|f\|_\infty}{\eta^2}\left(u(e_2) - 2xu(e_1) + x^2 u(e_0)\right). \tag{10}$$

II.4 Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite d'endomorphismes positifs de $\mathcal{C}(I)$ telle que pour toute fonction f appartenant à $\{e_0, e_1, e_2\}$ la suite $(u_n(f))_{n\in\mathbb{N}}$ converge uniformément vers f sur I.

II.4.1 Montrer que la suite de fonctions $(g_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad g_n = u_n(e_2) - 2e_1 u_n(e_1) + e_2 u_n(e_0)$$

converge uniformément vers la fonction nulle sur I.

II.4.2 Montrer que pour toute fonction f appartenant à $\mathcal{C}(I)$, la suite de fonctions $(h_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad \forall x \in I, \quad h_n(x) = (u_n(f - f(x)e_0))(x)$$

converge uniformément vers la fonction nulle sur I (on peut utiliser l'inégalité (10)).

II.4.3 Montrer que, pour toute fonction f appartenant à $\mathcal{C}(I)$, la suite $(u_n(f))_{n\in\mathbb{N}}$ converge uniformément vers f sur I.

II.5 Pour cette question on prend $[a, b] = [0, 1]$ et on considère la suite d'opérateurs linéaires $(B_n)_{n\geq 1}$ définie par (4).
Montrer que pour toute fonction f appartenant à $\mathcal{C}(I)$, la suite $(B_n(f))_{n\geq 1}$ converge uniformément vers f sur $[0, 1]$.

II.6 *Pour cette question $I = [a, b]$ est à nouveau un intervalle quelconque.*
Montrer que le sous-espace vectoriel $\mathbb{R}[x]$ des fonctions polynomiales à coefficients réels est dense dans l'espace vectoriel $\mathcal{C}(I)$ muni de la norme de la convergence uniforme.

II.7 Pour cette question on prend $I = [0, b]$ avec b réel strictement positif. Si f est une fonction continue sur I, on la prolonge en une fonction continue sur $\mathbb{R}^+$ en posant $f(x) = f(b)$ pour x supérieur ou égal à b.

II.7.1 Montrer que pour toute fonction f appartenant à $\mathcal{C}(I)$ et pour tout entier naturel n strictement positif on peut définir une fonction $u_n(f)$ appartenant à $\mathcal{C}(I)$ en posant :

$$\forall x \in I, \quad u_n(f)(x) = e^{-nx} \sum_{k=0}^{+\infty} f\left(\frac{k}{n}\right) \frac{n^k}{k!} x^k.$$

II.7.2 Montrer que pour toute fonction f appartenant à $\mathcal{C}(I)$ la suite de fonctions $(u_n(f))_{n\geq 1}$ converge uniformément vers f sur I.

II.8 *Pour cette question $I = [a, b]$ est à nouveau un intervalle quelconque.*
Soient $\theta_0, \theta_1, \theta_2$ trois fonctions appartenant à $\mathcal{C}(I)$ pour lesquelles on peut trouver des coefficients réels a_0, a_1, a_2 non tous nuls tels que la fonction $\theta = a_0\theta_0 + a_1\theta_1 + a_2\theta_2$ admette au moins trois racines réelles deux à deux distinctes, x_0, x_1, x_2 dans I.

II.8.1 Montrer qu'on peut trouver trois réels $\lambda_0, \lambda_1, \lambda_2$ non tous nuls tels que :

$$\begin{cases} |\lambda_k| < 1 \quad (k = 0, 1, 2), \\ \text{au moins deux des } \lambda_k \text{ sont positifs ou nuls,} \\ \lambda_0\theta_k(x_0) + \lambda_1\theta_k(x_1) + \lambda_2\theta_k(x_2) = 0 \quad (k = 0, 1, 2). \end{cases}$$

En modifiant si nécessaire la numérotation des racines de la fonction θ, on peut supposer que :

$$-1 < \lambda_0 \leq \lambda_1 \leq \lambda_2 < 1, \quad \lambda_1 \geq 0.$$

Pour tout entier n strictement positif, on désigne par δ_n la restriction à l'intervalle I de la fonction affine par morceaux et continue définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$\begin{array}{l} x \notin \left[x_0 - \frac{1}{n}, x_0 + \frac{1}{n}\right] \quad \Rightarrow \quad \delta_n(x) = 0, \\ \delta_n(x_0) = 1, \\ \delta_n \textit{ affine sur } \left[x_0 - \frac{1}{n}, x_0\right] \textit{ et sur } \left[x_0, x_0 + \frac{1}{n}\right]. \end{array}$$

On associe à δ_n l'opérateur linéaire u_n défini sur $\mathcal{C}(I)$ par :

$$\forall f \in \mathcal{C}(I), \quad u_n(f) = (e_0 - \delta_n) f + ((1 + \lambda_0) f(x_0) + \lambda_1 f(x_1) + \lambda_2 f(x_2)) \delta_n.$$

II.8.2 Montrer que, pour tout entier n strictement positif, l'opérateur linéaire u_n est positif.

II.8.3 Montrer que, pour tout entier k compris entre 0 et 2, la suite de fonctions $(u_n(\theta_k))_{n\geq 1}$ converge uniformément vers θ_k sur $[a, b]$.

II.8.4 Montrer qu'on peut trouver une fonction f appartenant à $\mathcal{C}(I)$ telle que la suite $(u_n(f))_{n\geq 1}$ ne converge pas uniformément vers f sur I.

– III – Théorème de Korovkin sur $\mathcal{F}$

Pour cette partie on se place dans $\mathcal{H} = \mathcal{F}$.

III.1 Montrer que toute fonction f appartenant à $\mathcal{F}$ est uniformément continue sur $\mathbb{R}$.

Pour tout x fixé dans $\mathbb{R}$, on désigne par ψ_x la fonction définie par :

$$\forall t \in \mathbb{R}, \quad \psi_x(t) = \sin^2\left(\frac{t-x}{2}\right).$$

III.2 Soient f appartenant à $\mathcal{F}$. Montrer que pour tout réel ε strictement positif, on peut trouver un réel η dans l'intervalle $]0, \pi[$ tel que l'on ait :

$$\forall (t, x) \in \mathbb{R}^2, \quad |f(t) - f(x)| \leq \varepsilon + 2\frac{\|f\|_\infty}{\psi_0(\eta)}\psi_x(t). \tag{11}$$

Pour f appartenant à $\mathcal{F}$ et x fixé dans $\mathbb{R}$, $f - f(x)\, c_0$ désigne la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$t \mapsto f(t) - f(x).$$

III.3 Soit f une fonction appartenant à $\mathcal{F}$. Montrer que pour tout réel ε strictement positif, on peut trouver un réel η dans l'intervalle $]0, \pi[$ tel que l'on ait :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad |f - f(x)\, c_0| \leq \varepsilon c_0 + \frac{\|f\|_\infty}{\psi_0(\eta)}(c_0 - \cos(x)\, c_1 - \sin(x)\, s_1). \tag{12}$$

III.4 Soient u un opérateur linéaire positif sur $\mathcal{F}$ et f une fonction appartenant à $\mathcal{F}$. Montrer que pour tout réel ε strictement positif, on peut trouver un réel η dans l'intervalle $]0, \pi[$ tel que l'on ait :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad |u(f - f(x)\, c_0)| \leq \varepsilon u(c_0) + \frac{\|f\|_\infty}{\psi_0(\eta)}(u(c_0) - \cos(x)\, u(c_1) - \sin(x)\, u(s_1)). \tag{13}$$

III.5 *Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite d'endomorphismes positifs de $\mathcal{F}$ telle que pour toute fonction f appartenant à $\{c_0, c_1, s_1\}$, la suite $(u_n(f))_{n\in\mathbb{N}}$ converge uniformément vers f sur $\mathbb{R}$.*

III.5.1 Montrer que la suite de fonctions $(g_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad g_n = u_n(c_0) - c_1 u_n(c_1) - s_1 u_n(s_1)$$

converge uniformément vers la fonction nulle sur $\mathbb{R}$.

III.5.2 Montrer que, pour toute fonction f appartenant à $\mathcal{F}$, la suite de fonctions $(h_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad \forall x \in \mathbb{R}, \quad h_n(x) = (u_n(f - f(x)\, c_0))(x),$$

converge uniformément vers la fonction nulle sur $\mathbb{R}$ (on peut utiliser (13)).

III.5.3 Montrer que, pour toute fonction f appartenant à $\mathcal{F}$, la suite $(u_n(f))_{n\in\mathbb{N}}$ converge uniformément vers f sur $\mathbb{R}$.

III.6 Montrer que, pour toute fonction f appartenant à $\mathcal{F}$, la suite $(T_n(f))_{n\geq 1}$ définie par (5) converge uniformément vers f sur $\mathbb{R}$.