Agrégation Interne

La fonction gamma

[1]

Ce problème est en relation avec les leçons d'oral suivantes :

– 267 : La fonction Gamma ;
– 223 : Intégrale d'une fonction dépendant d'un paramètre. Propriétés, exemples et applications ;
– 221 : Intégrale impropre d'une fonction continue sur un intervalle de $\mathbb{R}$ (l'intégration sur un segment étant supposée connue). Exemples ;
– 217 : Fonctions convexes d'une variable réelle. Applications ;
– 212 : Série de Fourier d'une fonction périodique ; propriétés. Exemples.

On pourra consulter les ouvrages suivants.

– E. Artin. *The Gamma function.* Holt, Rinehart and Winston, Inc. New York (1964).
– M. Cottrell, V. Genon-Catalot, C. Duhamel, T. Meyre. *Exercices de probabilités.*Cassini (2011).
– X. Gourdon. *Les Maths en tête. Analyse.* Ellipses (1994).
– J. P. Ramis, A. Warusfel. *Mathématiques tout en un pour la licence. Niveau L2.* Dunod. (2007).
– A.W. Roberts, D.E. Varberg. *Convex functions.* Academic Press (1973).
– W. Rudin. *Principes d'analyse mathématique.* Edisciences (1995).
– J. E. Rombaldi. *Éléments d'analyse réelle.* EDP Sciences (2004).

1 Énoncé

Pour tout nombre complexe z, $\Re(z)$ désigne la partie réelle de z.
On rappelle que pour tout nombre complexe z, la fonction puissance $t \mapsto t^z$ est définie par

$$\forall t \in \mathbb{R}^{+,*},\ t^z = e^{z\ln(t)}$$

On rappelle qu'une fonction continue par morceaux d'un intervalle réel dans $\mathbb{C}$ est intégrable si, et seulement si, l'intégrale impropre de f sur I est absolument convergente.
Rappelons quelques versions pratiques des théorèmes classiques sur :
– la continuité et la dérivation d'une fonction définie comme intégrale dépendant d'un paramètre ;
– l'intervertion d'une intégrale et d'une sommation infinie ;
– l'intégration d'une fonction de deux variables (théorème de Fubini) ;
– l'intégration par changement de variables.

Théorème 1 *Soient I une partie non vide d'un espace vectoriel normé E (pour nous $E = \mathbb{C}$), J un intervalle réel non réduit à un point, F un espace de Banach (pour nous $F = \mathbb{C}$), $f : I \times J \to F$ une fonction continue et $\varphi : J \to \mathbb{R}^+$ une fonction continue par morceaux et intégrable sur J telle que :*

$$\forall (x,t) \in I \times J,\ \|f(x,t)\| \leq \varphi(t)$$

Dans ces condition, pour tout $x \in I$, la fonction $t \mapsto f(x,t)$ est intégrable sur J et la fonction $x \mapsto \int_J f(x,t)\,dt$ est continue sur I.

1. Le 17/09/2013

Théorème 2 *Soient I, J deux intervalles réels non réduits à un point, $f : I \times J \to \mathbb{C}$ une fonction continue admettant une dérivée partielle par rapport à x en tout point (x,t) de $I \times J$ telle que pour tout réel $x \in I$ la fonction $t \mapsto f(x,t)$ est intégrable sur J et la fonction $t \mapsto \dfrac{\partial f}{\partial x}(x,t)$ est continue par morceaux sur J.*
S'il existe une fonction $\varphi : J \to \mathbb{R}^+$ continue par morceaux et intégrable sur J telle que :

$$\forall (x,t) \in I \times J, \ \left|\frac{\partial f}{\partial x}(x,t)\right| \leq \varphi(t)$$

alors la fonction $g : x \mapsto \displaystyle\int_J f(x,t)\,dt$ est dérivable sur I avec :

$$g'(x) = \int_J \frac{\partial f}{\partial x}(x,t)\,dt$$

Si de plus la fonction $\dfrac{\partial f}{\partial x}$ est continue sur $I \times J$ (ou si pour tout $t \in J$, la fonction $x \mapsto \dfrac{\partial f}{\partial x}(x,t)$ est continue sur I), alors la fonction φ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur I.

Théorème 3 (convergence dominée) *Si $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite de fonctions continues par morceaux, à valeurs complexes et intégrables sur un intervalle I telle que la série de fonctions $\sum f_n$ converge simplement vers une fonction f continue par morceaux sur I, alors la fonction f est intégrable sur I si la série $\sum \displaystyle\int_I |f_n(x)|\,dx$ est convergente et dans ce cas, on a $\displaystyle\int_I f(x)\,dx = \sum_{n=0}^{+\infty} \int_I f_n(x)\,dx$.*

Théorème 4 (Fubini) *Soient I, J deux intervalles réels non réduits à un point et $f : I \times J \to \mathbb{C}$ une fonction continue telle que :*
- *pour tout $x \in I$, la fonction $t \mapsto f(x,t)$ est intégrable sur J ;*
- *la fonction $x \mapsto \displaystyle\int_J |f(x,t)|\,dt$ est intégrable sur I.*

Dans ces condition, la fonction f est intégrable sur $I \times J$ et :

$$\iint_{I\times J} f(x,t)\,dtdx = \int_I \left(\int_J f(x,t)\,dt\right)dx$$

Dans le théorème de Fubini, on peut permuter les rôles de x et t. D'un point de vue pratique, pour $f : I \times J \to \mathbb{C}$ continue telle que les intégrales $\displaystyle\int_I \left(\int_J |f(x,t)|\,dt\right)dx$ et $\displaystyle\int_J \left(\int_I |f(x,t)|\,dx\right)dt$ aient un sens, on a :

$$\iint_{I\times J} f(x,t)\,dtdx = \int_I \left(\int_J f(x,t)\,dt\right)dx = \int_J \left(\int_I f(x,t)\,dx\right)dt$$

Théorème 5 (changement de variables) *Soient U, V deux ouverts de $\mathbb{R}^n$ et $\varphi : V \to U$ un $\mathcal{C}^1$-difféomorphisme. En notant $J_\varphi : x \in V \mapsto \det(d\varphi(x))$ le déterminant jacobien de φ, une fonction continue $f : U \to \mathbb{C}$ est intégrable sur U si, et seulement si, la fonction $(f \circ \varphi)|J_\varphi|$ est intégrable sur V et dans ce cas, on a :*

$$\int_U f(y)\,dy = \int_V f(\varphi(x))\,|J_\varphi(x)|\,dx$$

– I – Résultats préliminaires

1. Montrer que, pour tout entier $n \geq 1$ et tout réel $t \in [0, n]$, on a :

$$\left(1 - \frac{t}{n}\right)^n \leq e^{-t} \leq \left(1 + \frac{t}{n}\right)^{-n}$$

2. Montrer que :

$$\forall t \in [-1, 0], \ 0 \leq (1+t)\, e^{-t} \leq e^{-\frac{t^2}{2}}$$

3. Montrer que la suite $\left(\sum\limits_{k=1}^{n} \frac{1}{k} - \ln(n)\right)_{n \geq 1}$ est convergente. Sa limite est la constante d'Euler, notée γ.
4. Montrer que :

$$\int_0^{+\infty} e^{-t^2} dt = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$$

– II – Généralités sur la fonction gamma

On désigne par $\mathcal{H}$ le demi plan complexe défini par :

$$\mathcal{H} = \{z \in \mathbb{C} \mid \Re(z) > 0\}$$

1. Montrer que, pour tout entier naturel n, l'intégrale $\int_0^{+\infty} t^n e^{-t} dt$ est convergente et que l'on a :

$$\int_0^{+\infty} t^n e^{-t} dt = n!$$

2. Montrer que, pour tout nombre complexe z, la fonction $t \mapsto t^{z-1} e^{-t}$ est (absolument) intégrable sur $]1, +\infty[$.
3. Soit z un nombre complexe. Montrer que la fonction $t \mapsto t^{z-1} e^{-t}$ est intégrable sur $]0, 1[$ si, et seulement si, $z \in \mathcal{H}$.

   Définition : La fonction gamma d'Euler est la fonction définie sur $\mathcal{H}$ par :

$$\forall z \in \mathcal{H}, \ \Gamma(z) = \int_0^{+\infty} t^{z-1} e^{-t} dt$$

4. Montrer que :

$$\Gamma(1) = 1 \text{ et } \Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \sqrt{\pi}$$

5. Montrer que la fonction gamma vérifie l'équation fonctionnelle :

$$\forall z \in \mathcal{H}, \ \Gamma(z+1) = z\Gamma(z) \tag{1}$$

6. Montrer que pour tout entier naturel n, on a :

$$\Gamma(n+1) = n! \text{ et } \Gamma\left(n + \frac{1}{2}\right) = \frac{(2n)!}{2^{2n} n!}\sqrt{\pi}$$

7.

   (a) Soient z et α deux nombres complexes. Montrer que la fonction $t \mapsto \dfrac{t^z e^{-\alpha t}}{1 - e^{-t}}$ est intégrable sur $]0, +\infty[$ si, et seulement si, $(z, \alpha) \in \mathcal{H}^2$.

(b) Montrer que :

$$\forall (z,\alpha) \in \mathcal{H}^2,\ \int_0^{+\infty} \frac{t^z e^{-\alpha t}}{1-e^{-t}} dt = \Gamma(z+1)\,\zeta(z+1,\alpha)$$

où ζ est la fonction dzéta de Hurwitz définie par :

$$\forall (z,\alpha) \in \mathcal{H}^2,\ \zeta(z+1,\alpha) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{(n+\alpha)^{z+1}}$$

En particulier, pour $\alpha = 1$, on a :

$$\forall z \in \mathcal{H},\ \int_0^{+\infty} \frac{t^z}{e^t-1} dt = \Gamma(z+1)\,\zeta(z+1)$$

où ζ est la fonction dzéta de Riemann.

– III – Formules d'Euler, de Wallis, de Legendre et de Stirling

1. Pour tout entier $n \geq 1$ et tout $z \in \mathcal{H}$, on note :

$$I_n(z) = \frac{n! n^z}{z(z+1)\cdots(z+n)}$$

(a) Montrer que :

$$\forall z \in \mathcal{H},\ \int_0^n \left(1-\frac{t}{n}\right)^n t^{z-1} dt = I_n(z)$$

(b) En déduire que :

$$\forall z \in \mathcal{H},\ \Gamma(z) = \lim_{n\to+\infty} \frac{n! n^z}{z(z+1)\cdots(z+n)}$$

(formule d'Euler).

2. Montrer que :

$$\sqrt{\pi} = \lim_{n\to+\infty} \frac{2^{2n}}{\sqrt{n}\binom{2n}{n}}$$

soit :

$$\binom{2n}{n} \underset{n\to+\infty}{\backsim} \frac{1}{\sqrt{\pi}} \frac{2^{2n}}{\sqrt{n}}$$

(formule de Wallis).

3.

(a) Montrer que, pour tout entier $n \geq 1$ et tout $z \in \mathcal{H}$, on a :

$$I_{2n}(z) = 2^{z-1}\left(1+\frac{z}{2n+1}\right) \frac{I_n\left(\frac{z}{2}\right) I_n\left(\frac{z+1}{2}\right)}{I_n\left(\frac{1}{2}\right)}$$

(b) Montrer que, pour tout $z \in \mathcal{H}$, on a :

$$\Gamma(z) = \frac{2^{z-1}}{\sqrt{\pi}} \Gamma\left(\frac{z}{2}\right) \Gamma\left(\frac{z+1}{2}\right)$$

(formule de Legendre).

4. On désigne par f la fonction définie sur $\mathbb{R}^{+,*} \times \mathbb{R}$ par :

$$\forall (x,u) \in \mathbb{R}^{+,*} \times \mathbb{R},\ f(x,u) = \begin{cases} 0 \text{ si } u \leq -\sqrt{x} \\ \left(1 + \dfrac{u}{\sqrt{x}}\right)^x e^{-u\sqrt{x}} \text{ si } u > -\sqrt{x} \end{cases}$$

   (a) Montrer que pour tout réel $x > 0$, on a :

$$\Gamma(x+1) = \sqrt{x}\left(\frac{x}{e}\right)^x \int_{-\infty}^{+\infty} f(x,u)\,du$$

   (b) Montrer que, pour tout réel u, on a :

$$\lim_{x \to +\infty} f(x,u) = e^{-\frac{u^2}{2}}$$

   (c) Montrer que pour tout $(x,u) \in [1,+\infty[\times \mathbb{R}$, on a :

$$0 \leq f(x,u) \leq \varphi(u) = \begin{cases} e^{-\frac{u^2}{2}} \text{ si } u \leq 0 \\ (1+u)\,e^{-u} \text{ si } u > 0 \end{cases}$$

   (d) En déduire la formule de Stirling :

$$\Gamma(x+1) \underset{x \to +\infty}{\backsim} \sqrt{2\pi x}\left(\frac{x}{e}\right)^x$$

   Pour $x = n$ entier naturel non nul, on retrouve la formule usuelle :

$$n! \underset{n \to +\infty}{\backsim} \sqrt{2\pi n}\left(\frac{n}{e}\right)^n$$

– IV – Continuité et dérivabilité de la fonction gamma

1. Montrer que la fonction gamma est continue sur $\mathcal{H}$.
2. Montrer que $\Gamma(z) \underset{z \in \mathcal{H},\ z \to 0}{\backsim} \dfrac{1}{z}$ et en particulier $\lim\limits_{x \to 0^+} \Gamma(x) = +\infty$.
3. Montrer que la fonction gamma est indéfiniment dérivable sur $\mathbb{R}^{+,*}$ avec pour tout entier naturel non nul n et tout réel strictement positif x :

$$\Gamma^{(n)}(x) = \int_0^{+\infty} (\ln(t))^n\, t^{x-1} e^{-t} dt$$

4. Montrer que la fonction Γ est strictement convexe sur $\mathbb{R}^{+,*}$.
5. Étudier les variations de la fonction Γ sur $\mathbb{R}^{+,*}$.
6. Montrer que la fonction Γ est log-convexe sur $\mathbb{R}^{+,*}$.
   On rappelle qu'une fonction f définie sur un intervalle I et à valeurs strictement positives est dite logarithmiquement convexe (ou plus simplement log-convexe) si la fonction $\ln(f)$ est convexe sur I.
7.

   (a) Montrer que :

$$\forall x > 0,\ \Gamma'(x) = \lim_{n \to +\infty} \int_0^n \ln(t)\left(1 - \frac{t}{n}\right)^n t^{x-1} dt$$

(b) Montrer que, pour tout entier $n \geq 1$, on a :

$$\int_0^n \ln(t)\left(1-\frac{t}{n}\right)^n dt = \frac{n}{n+1}\left(\ln(n) + \int_0^1 \frac{(1-x)^{n+1}-1}{x}dx\right)$$

(c) En déduire que $\Gamma'(1) = -\gamma$, où $\gamma = \lim\limits_{n\to+\infty}\left(\sum_{k=0}^{n}\frac{1}{k+1} - \ln(n)\right)$ est la constante d'Euler (question **I.3**).

(d) Montrer que pour tout réel $x > 0$, on a :

$$\frac{\Gamma'(x+1)}{\Gamma(x+1)} = \frac{\Gamma'(x)}{\Gamma(x)} + \frac{1}{x}$$

(e) En déduire que, pour tout entier $n \geq 1$, on a :

$$\Gamma'(n+1) = n!\left(\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k} - \gamma\right)$$

– V – L'équation fonctionnelle $f(x+1) = xf(x)$ sur $\mathbb{R}^{+,*}$

On s'intéresse ici aux fonctions $f : \mathbb{R}^{+,*} \to \mathbb{R}^{+,*}$ qui vérifient les conditions suivantes :

(i) $\forall x \in \mathbb{R}^{+,*}$, $f(x+1) = xf(x)$;

(ii) $f(1) = 1$

(iii) f est logarithmiquement convexe.

Dans ce qui suit, on se donne une telle fonction f et on note $g = \ln(f)$.
La fonction g étant convexe sur $\mathbb{R}^{+,*}$, elle est continue et il en est de même de la fonction $f = e^g$.

1. Montrer que si $f : \mathbb{R}^{+,*} \to \mathbb{R}^{+,*}$ vérifie les conditions (i) et (ii), on a alors pour tout réel $x \in \mathbb{R}^{+,*}$ et tout entier $n \in \mathbb{N}$:

$$f(n+1) = n! \text{ et } g(n+1+x) - g(n+1) = \ln\left(\frac{f(x)}{n!}\prod_{k=0}^{n}(x+k)\right)$$

2. Montrer que si $f : \mathbb{R}^{+,*} \to \mathbb{R}^{+,*}$ vérifie la condition (iii), on a alors pour tout réel $x \in \left]0,1\right]$ et tout entier $n \in \mathbb{N}^*$:

$$\ln(n) \leq \frac{g(n+1+x) - g(n+1)}{x} \leq \ln(n+1)$$

3. Montrer que si $f : \mathbb{R}^{+,*} \to \mathbb{R}^{+,*}$ vérifie les conditions (i), (ii) et (iii), on a alors pour tout réel $x \in \left]0,1\right]$ et tout entier $n \in \mathbb{N}^*$:

$$n^x \leq \frac{f(x)}{n!}\prod_{k=0}^{n}(x+k) \leq (n+1)^x$$

4. Montrer que la fonction $\Gamma : \mathbb{R}^{+,*} \to \mathbb{R}^{+,*}$ est l'unique fonction qui vérifie les conditions (i), (ii) et (iii) (théorème de Bohr-Mollerup).

– VI – Prolongement de la fonction gamma

1. En utilisant l'équation fonctionnelle (1) , montrer que la fonction Γ peut être prolongée en une fonction continue sur $\mathbb{C} \setminus \mathbb{Z}^-$ et que ce prolongement vérifie la même équation fonctionnelle. Pour tout $z \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{Z}^-$, on notera encore $\Gamma(z)$ ce prolongement.
2. Montrer que, pour tout entier naturel n, on a :

$$\Gamma(z) \underset{z \to -n}{\backsim} \frac{(-1)^n}{n!} \frac{1}{z+n}$$

3. Montrer que :

$$\forall z \in \mathcal{H},\ \Gamma(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n!} \frac{1}{z+n} + \int_1^{+\infty} t^{z-1} e^{-t} dt$$

   et retrouver ainsi le fait que Γ se prolonge en une fonction continue sur $\mathbb{C} \setminus \mathbb{Z}^-$ telle que $\Gamma(z) \underset{z \to -n}{\backsim} \dfrac{(-1)^n}{n!} \dfrac{1}{z+n}$.
4. Montrer que :

$$\forall z \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{Z}^-,\ \Gamma(z) = \lim_{n \to +\infty} \frac{n! n^z}{z(z+1)\cdots(z+n)}$$

– VII – La formule des compléments

On désigne par φ la fonction définie sur $\mathcal{H}$ par :

$$\forall z \in \mathcal{H},\ \varphi(z) = \int_0^1 \frac{t^{z-1}}{1+t} dt$$

et par $\mathcal{D}$ la bande ouverte du plan complexe définie par :

$$\mathcal{D} = \{z \in \mathbb{C} \mid 0 < \Re(z) < 1\}$$

1. Montrer que, pour tout $z \in \mathcal{D}$, on a :

$$\int_0^{+\infty} \frac{t^{z-1}}{1+t} dt = \varphi(z) + \varphi(1-z)$$

2. Montrer que, pour tout $z \in \mathcal{D}$, on a :

$$\Gamma(z)\Gamma(1-z) = \varphi(z) + \varphi(1-z)$$

3. Montrer que, pour tout $z \in \mathcal{H}$, on a :

$$\varphi(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n+z}$$

4. Montrer que, pour tout $z \in \mathcal{D}$, on a :

$$\Gamma(z)\Gamma(1-z) = \frac{1}{z} - 2z \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n^2 - z^2}$$

5. Montrer que, pour tout nombre complexe $z \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{Z}$ et tout réel $t \in [0, \pi]$, on a :

$$\cos(zt) = \frac{\sin(\pi z)}{\pi} \left(\frac{1}{z} - 2z \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n^2 - z^2} \cos(nt) \right)$$

6. Montrer que, pour tout $z \in \mathcal{D}$, on a :

$$\Gamma(z) \Gamma(1-z) = \frac{\pi}{\sin(\pi z)}$$

7. Montrer que, pour tout $z \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{Z}$, on a :

$$\Gamma(z) \Gamma(1-z) = \frac{\pi}{\sin(\pi z)}$$

8.
   (a) Montrer que, pour tout $z \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{Z}$, on a :

   $$\Gamma(z) \Gamma(-z) = -\frac{\pi}{z \sin(\pi z)}$$

   (b) En déduire que, pour tout $z \in \mathbb{C}$, on a :

   $$\sin(\pi z) = \pi z \prod_{n=1}^{+\infty} \left(1 - \frac{z^2}{n^2}\right)$$

– VIII – Fonction Béta

1. Soient u, v deux nombres complexes. Montrer que la fonction $t \mapsto t^{u-1} (1-t)^{v-1}$ est intégrable sur $]0,1[$ si, et seulement si, $(u, v) \in \mathcal{H}^2$.
   Définition : la fonction béta (ou fonction de Bessel de seconde espèce) est la fonction définie sur $\mathcal{H}^2$ par :

   $$\forall (u, v) \in \mathcal{H}^2,\ B(u, v) = \int_0^1 t^{u-1} (1-t)^{v-1} \, dt$$

2. Montrer que, pour tous nombres complexes u, v dans $\mathcal{H}$, on a :

$$B(u, v) = B(v, u) \text{ et } B(u+1, v) = \frac{u}{u+v} B(u, v)$$

3. Montrer que, pour tous nombres complexes u, v dans $\mathcal{H}$, on a :

$$\lim_{n \to +\infty} n^u B(u, v+n+1) = \Gamma(u)$$

4. Montrer que, pour tous nombres complexes u, v dans $\mathcal{H}$, on a $B(u, v) = \dfrac{\Gamma(u) \Gamma(v)}{\Gamma(u+v)}$.
5. Calculer $B(n+1, m+1)$, pour n, m entiers naturels.

– VIII – Calcul de certaines intégrales à l'aide de Γ

1. Calculer :
$$\int_0^1 \left(\ln\left(\frac{1}{x}\right)\right)^{z-1} dx$$
pour tout $z \in \mathcal{H}$.
2. Calculer :
$$\int_0^{+\infty} e^{-x^{\frac{1}{z}}} dx \text{ et } \int_0^{+\infty} e^{-x^z} dx$$
pour tout réel $z > 0$.
3. Calculer :
$$\int_0^{+\infty} \frac{x^{u-1}}{(1+x)^{u+v}} dx$$
pour tout $(u, v) \in \mathcal{H}^2$.
4. Calculer :
$$\int_0^{+\infty} \frac{x^{z-1}}{1+x} dx \text{ et } \int_0^{+\infty} \tan^{2z-1}(t)\, dt$$
pour $z \in \mathbb{C}$ tel que $0 < \Re(z) < 1$.
5. Donner une expression des intégrales de Wallis :
$$W(a, b) = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^a(\theta) \sin^b(\theta)\, dt$$
où $(a, b) \in \mathbb{C}^2$ sont tels que $\Re(a) > -1$ et $\Re(b) > -1$. Préciser le cas où $a = 0$ et $b = n \in \mathbb{N}$.