Agrégation Interne

Le groupe linéaire $GL(E)$[1]

1 Énoncé

– I – Le groupe linéaire $GL(E)$

$\mathbb{K}$ désigne un corps commutatif.

E est un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie $n \geq 1$.

$\mathcal{L}(E)$ est l'algèbre des endomorphismes de E, $GL(E)$ est le groupe des automorphismes de E.

Pour tout entier $n \geq 1$, $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ désigne l'algèbre des matrices carrées d'ordre n à coefficients dans $\mathbb{K}$ et $GL_n(\mathbb{K})$ le groupe des matrices inversibles dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$.

On note Id [resp. I_n] l'endomorphisme [resp. la matrice] identité.

La notion de déterminant et ses principales propriétés sont supposées acquises.

Le choix d'une base de E permet de réaliser un isomorphisme d'amgèbres de $\mathcal{L}(E)$ sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ et un isomorphisme de groupes de $GL(E)$ sur $GL_n(\mathbb{K})$.

1. Soit $u \in \mathcal{L}(E)$. Montrer que les assertions suivantes sont équivalentes :
   (a) $u \in GL(E)$;
   (b) $\ker(u) = \{0\}$ (i. e. u injectif) ;
   (c) $\mathrm{Im}(u) = E$ (i. e. u surjectif) ;
   (d) il existe $v \in GL(E)$ tel que $u \circ v = Id$;
   (e) il existe $w \in GL(E)$ tel que $w \circ u = Id$.
2. Le résultat de la question précédente est-il valable en dimension infinie ?
3. Montrer que l'ensemble :
   $$SL(E) = \{u \in \mathcal{L}(E) \mid \det(u) = 1\}$$
   est un sous-groupe distingué de $GL(E)$.
4.
   (a) Rappeller la définition du polynôme minimal de $u \in \mathcal{L}(E)$.
   (b) Montrer que les valeurs propres de u sont les racines de son polynôme minimal.
   (c) Montrer que si $u \in GL(E)$, on a alors $u^{-1} \in \mathbb{K}[u]$.
   (d) Montrer que si F est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{L}(E)$ contenant Id et stable par la composition des endomorphismes, l'ensemble $G = F \cap GL(E)$ est alors un sous-groupe de $GL(E)$.
5. On rappelle que le centre (ou commutateur) $Z(G)$ d'un groupe G est la partie de G formée des éléments de G qui commutent à tous les autres éléments de G, soit :
   $$Z(G) = \{h \in G \mid \forall g \in G,\ gh = hg\}$$
   (a) Déterminer le centre de $\mathcal{L}(E)$.
   (b) Déterminer le centre de $GL(E)$.
6. Les groupes $GL_n(\mathbb{R})$ et $GL_n(\mathbb{C})$ peuvent-ils être isomorphes ?
7. On suppose que $\mathbb{K} = \mathbb{F}_q$ est un corps fini à $q = p^r$ éléments, où $p \geq 2$ est un nombre premier.

1. Le 27/10/2013

(a) Montrer que :

$$\forall n \geq 2,\ \operatorname{card}\left(GL_n\left(\mathbb{F}_q\right)\right) = \prod_{k=1}^{n}\left(q^n - q^{k-1}\right) = q^{\frac{n(n-1)}{2}} \prod_{j=1}^{n}\left(q^j - 1\right)$$

(b) Montrer que :

$$\forall n \geq 2,\ \operatorname{card}\left(SL_n\left(\mathbb{F}_q\right)\right) = q^{n-1} \prod_{k=1}^{n-1}\left(q^n - q^{k-1}\right) = q^{\frac{n(n-1)}{2}} \prod_{j=2}^{n}\left(q^j - 1\right)$$

– II – Sous-groupes de $GL(E)$

1. On suppose que le corps $\mathbb{K}$ est de caractéristique différente de 2.
   (a) Montrer que si G est un sous-groupe multiplicatif fini de $GL(E)$ tel que tout élément de G soit d'ordre au plus égal à 2, alors G est commutatif de cardinal inférieur ou égal à 2^n.
   (b) En déduire que, si F est un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie, alors les groupes multiplicatifs $GL(E)$ et $GL(F)$ sont isomorphes si, et seulement si, $\dim(F) = \dim(E)$.
2. Soit G un sous-groupe fini de $GL(E)$ de cardinal $p \geq 2$.
   (a) Montrer que $v = \frac{1}{p} \sum_{u \in G} u$ est un projecteur.
   (b) Montrer que $\sum_{u \in G} \operatorname{tr}(u)$ est un entier divisible par p.
   (c) En supposant que $\mathbb{K}$ est de caractéristique nulle, montrer que si $\sum_{u \in G} \operatorname{tr}(u) = 0$, on a alors $\sum_{u \in G} u = 0$.
3. On suppose que le corps $\mathbb{K}$ est de caractéristique nulle.
   (a) Montrer que si $u \in \mathcal{L}(E)$ est nilpotent, 0 est alors valeur propre de u et $\operatorname{Tr}(u) = 0$.
   (b) Montrer qu'un endomorphisme $u \in \mathcal{L}(E)$ est nilpotent si, et seulement si, $\operatorname{Tr}\left(u^k\right) = 0$ pour tout k compris entre 1 et n.
   (c) Soient G un sous-groupe de $GL(E)$, F le sous-espace vectoriel de $\mathcal{L}(E)$ engendré par G, $\mathcal{B} = (u_i)_{1 \leq i \leq p}$ une base de F extraite de G et l'application :

$$\begin{array}{rccc} \varphi : & G & \rightarrow & \mathbb{K}^p \\ & u & \mapsto & \left(\operatorname{tr}(u \circ u_1), \cdots, \operatorname{tr}(u \circ u_p)\right) \end{array}$$

   Montrer que si u, v dans G sont tels que $\varphi(u) = \varphi(v)$, on a alors :

$$\begin{cases} \forall w \in G,\ \operatorname{tr}\left(u \circ v^{-1} \circ w\right) = \operatorname{tr}(w) \\ \forall k \geq 1,\ \operatorname{tr}\left(\left(u \circ v^{-1}\right)^k\right) = n \end{cases}$$

   et en déduire que $u \circ v^{-1} - Id$ est nilpotent.
   (d) En gardant les notations de la question précédente et en supposant que tous les éléments de G sont diagonalisables, montrer que φ est injective.
   (e) Montrer que si G est un sous-groupe de $GL(E)$ tel que tous ses éléments sont diagonalisables et $\operatorname{tr}(G)$ est fini, il est alors fini.

4. Pour $\mathbb{K} = \mathbb{C}$, montrer qu'un sous-groupe G de $GL(E)$ est fini si, et seulement si, il est d'exposant fini (c'est-à-dire qu'il existe $m \in \mathbb{N}^*$ tel que $u^m = Id$ pour tout $u \in G$). Ce résultat est un théorème de Burnside.

– III – Topologie sur $GL(E)$ ($\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{K} = \mathbb{C}$)

Pour cette partie, on suppose que $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{K} = \mathbb{C}$ et l'espace E est muni d'une norme quelconque (en dimension finie, elles sont toutes équivalentes).

On rappelle que toute application linéaire $u \in \mathcal{L}(E)$ est continue et que l'on définit une norme sur $\mathcal{L}(E)$ en posant :

$$\forall u \in \mathcal{L}(E), \ \|u\| = \sup_{\substack{x \in E \\ \|x\|=1}} \|u(x)\| = \sup_{x \in E \setminus \{0\}} \frac{\|u(x)\|}{\|x\|}$$

1. Montrer que $GL(E)$ est un ouvert dense de $\mathcal{L}(E)$.
2. Le résultat de la question précédente est-il encore valable en dimension infinie ? ($\mathcal{L}(E)$ désignant l'espace des applications linéaires continues de E dans E muni de la norme usuelle.)
3. Montrer qu'il existe une base de $\mathcal{L}(E)$ formée d'isomorphismes.
4. Montrer que, pour $\mathbb{K} = \mathbb{C}$, $GL(E)$ est connexe par arcs.
5. Le résultat précédent est-il valable pour $\mathbb{K} = \mathbb{R}$?
6.
   (a) Montrer que toute matrice $A \in GL_n(\mathbb{R})$ peut s'écrire de manière unique $A = \Omega S$ où Ω est une matrice orthogonale et S une matrice symétrique définie positive.

   (b) Montrer que l'application $(\Omega, S) \longmapsto \Omega S$ réalise un homéomorphisme de $\mathcal{O}_n(\mathbb{R}) \times \mathcal{S}_n^{++}(\mathbb{R})$ sur $GL_n(\mathbb{R})$.

   (c) Montrer que l'ensemble $\mathcal{O}_n(\mathbb{R})$ des matrices réelles orthogonales est compact dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

   (d) Montrer que $\mathcal{O}_n(\mathbb{R})$ est un sous-groupe compact maximal de $GL_n(\mathbb{R})$, c'est-à-dire que $\mathcal{O}_n(\mathbb{R})$ est compact et que si G est sous-groupe compact de $GL_n(\mathbb{R})$ qui contient $\mathcal{O}_n(\mathbb{R})$, alors $G = \mathcal{O}_n(\mathbb{R})$.

   (e) Montrer que toute matrice $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ peut s'écrire $A = \Omega S$ où Ω est une matrice orthogonale et S une matrice symétrique positive. Une telle décomposition est-elle unique ?