Transformées de Fourier et Laplace

J. Dieudonne. *Calcul infinitésimal.* Hermann (1968).

M. Herve. *Transformation de Fourier et distributions.* P. U. F. (1986).

T. W. Korner. *Fourier analysis.* Cambridge University Press. (1996).

E. Leichtnam. *Exercices corrigés de Mathématiques. Polytechnique et ENS. Analyse.* Ellipses (2000).

Ramis, Deschamps, Odoux. *Analyse 2, exercices avec solutions.* Masson. (1972).

Exercice 1 *On note $\mathcal{C}^0$ l'espace des fonctions $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ qui sont continues ; $\mathcal{L}^\infty$ le sous-espace de $\mathcal{C}^0$ constitué des fonctions continues et bornées ; $\mathcal{L}^1$ le sous-espace de $\mathcal{C}^0$ constitué des fonctions continues et intégrables.*

1. *Soient f, g dans $\mathcal{L}^1$, l'une de ces deux fonctions étant dans $\mathcal{L}^\infty$.*
   (a) *Montrer qu'on peut définir la fonction :*
   $$f * g : x \in \mathbb{R} \mapsto \int_{\mathbb{R}} f(x-y)\, g(y)\, dy$$
   que cette fonction $f*g$ est dans $\mathcal{L}^1$ et que $\int_{\mathbb{R}} (f*g)(x)\, dx = \int_{\mathbb{R}} f(x)\, dx \times \int_{\mathbb{R}} g(x)\, dx$ ($f*g$ est le produit de convolution de f et de g).
   (b) *Montrer que $\widehat{f*g} = \widehat{f} \cdot \widehat{g}$.*
2. *Calculer, pour tout réel $a > 0$, la transformée de Fourier de la fonction $\varphi_a : t \mapsto e^{-a|t|}$.*
3. *Montrer qu'il n'existe pas d'unité pour le produit de convolution, c'est-à-dire qu'il n'est pas possible de trouver une fonction $f \in \mathcal{L}^1$ [resp. $f \in \mathcal{L}^1 \cap \mathcal{L}^\infty$] telle que $f * g = g$ pour tout $g \in \mathcal{L}^1 \cap \mathcal{L}^\infty$ [resp. $g \in \mathcal{L}^1$] (on admettra que $\lim\limits_{|x|\to+\infty} \widehat{f}(x) = 0$).*
4. *Soit $(\varphi_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ la suite de fonctions définie sur $\mathbb{R}$ par :*
   $$\varphi_n(t) = \begin{cases} 1 - \dfrac{|t|}{n} \text{ si } |t| \leq n \\ 0 \text{ si } |t| > n \end{cases}$$
   (a) *Montrer que, pour tout entier $n \in \mathbb{N}^*$, la fonction φ_n est dans $\mathcal{L}^1 \cap \mathcal{L}^\infty$ et calculer sa transformée de Fourier.*
   (b) *En admettant que $\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\sin^2(t)}{t^2} dt = \pi$, calculer $\int_{-\infty}^{+\infty} \widehat{\varphi_n}(x)\, dx$ pour tout entier $n \in \mathbb{N}^*$.*
   (c) *Montrer que, pour tout réel $\eta > 0$, on a :*
   $$\lim_{n\to+\infty} \int_{|x|>\eta} \widehat{\varphi_n}(x)\, dx = 0$$
   (d) *Soit $f \in \mathcal{L}^1$ telle que $\widehat{f} \in \mathcal{L}^1$. Montrer que, pour tout entier $n \in \mathbb{N}^*$ et tout réel t, on a :*
   $$f * \widehat{\varphi_n}(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} \varphi_n(x)\, \widehat{f}(x)\, e^{ixt} dx$$

(e) *On suppose de plus que* $f \in \mathcal{L}^{\infty}$.
Montrer que pour tout réel t, *on a :*

$$f(t) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} \widehat{f}(x)\, e^{ixt} dx$$

soit $f(t) = \frac{1}{2\pi}\widehat{\widehat{f}}(-t)$ *(formule d'inversion de Fourier).*
En fait l'hypothèse $f \in \mathcal{L}^{\infty}$ *n'est pas indispensable et la transformation de Fourier est injective sur* $\mathcal{L}^{1}$.

5. *Résoudre l'équation* $f * f = f$ *dans* $\mathcal{L}^{1} \cap \mathcal{L}^{\infty}$.

Exercice 2

1. *Soient* $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ *une fonction continue sur* $\mathbb{R}$ *et* y *un réel tel que l'intégrale* $\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\, e^{-iyt} dt$ *soit convergente. La transformée de Fourier de* f *en* y *est définie par :*

$$\forall y \in \mathbb{R}^{+,*},\ \widehat{f}(y) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\, e^{-iyt} dt$$

Donner une expression de $\widehat{f}(y)$ *qui utilise les transformées de Laplace des fonctions* f_{+} *et* f_{-} *définies sur* $\mathbb{R}^{+,*}$ *par :*

$$\forall t \in \mathbb{R}^{+,*},\ f_{+}(t) = f(t)\,,\ f_{-}(t) = f(-t)$$

2. *Pour tout nombre complexe* α *et tout nombre réel* $x > 0$ *fixé, on définit la fonction* $\varphi_{\alpha} : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ *par :*

$$\varphi_{\alpha}(y) = |x + iy|^{\alpha}\, e^{i\alpha \arctan\left(\frac{y}{x}\right)}$$

et on note $\varphi_{\alpha}(y) = (x + iy)^{\alpha}$.

(a) *Montrer que la fonction* φ *est de classe* $\mathcal{C}^{1}$ *sur* $\mathbb{R}$ *avec :*

$$\varphi_{\alpha}'(y) = i\alpha\,(x + iy)^{\alpha - 1}$$

(b) *Résoudre l'équation différentielle* $\varphi'(y) = \frac{i\alpha}{x + iy}\varphi(y)\,,$ *où* φ *fonction* φ *est de classe* $\mathcal{C}^{1}$ *sur* $\mathbb{R}$.

3. *En utilisant les résultats des questions précédentes, on se propose de calculer la transformée de Fourier sur* $\mathbb{R}^{*}$ *de la fonction :*

$$f : t \in \mathbb{R}^{+,*} \mapsto t^{\alpha - 1}$$

où α *est un nombre complexe tel que* $0 < \Re(\alpha) < 1$.

(a) *Vérifier que* $\widehat{f}(y)$ *est bien défini pour tout réel* $y \in \mathbb{R}^{*}$.

(b) *Calculer* $\mathcal{L}(f)(x)\,,$ *pour tout réel* $x > 0$.

(c) *Calculer* $\mathcal{L}(f)(x + iy)\,,$ *pour tout réel* $x > 0$ *et tout réel* y.

(d) *En déduire la valeur de* $\widehat{f}(y)$ *pour tout réel* $y \in \mathbb{R}^{*}$.

(e) *En déduire les valeurs des intégrales de Fresnel :*

$$\int_{0}^{+\infty} \cos\left(t^{2}\right) dt \ \text{ et } \int_{0}^{+\infty} \sin\left(t^{2}\right) dt$$

Exercice 3

1. *Soit* $f : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}$ *(ou à valeurs dans* $\mathbb{C}$*) une fonction continue telle que* $\displaystyle\int_0^{+\infty} f(t)\,dt$ *soit convergente.*
   Montrer que la fonction $\mathcal{L}(F)$ *est définie et continue sur* $\mathbb{R}^+$.
   En particulier, on a :
$$\lim_{x\to 0^+} \mathcal{L}(f)(x) = \int_0^{+\infty} f(t)\,dt$$
2. *On désigne par* f *la fonction définie sur* $\mathbb{R}^+$ *par :*
$$\forall t \in \mathbb{R}^+,\ f(t) = \begin{cases} \dfrac{\sin(t)}{t} \ \text{si } t > 0 \\ 1 \ \text{si } t = 0 \end{cases}$$
   (a) *Montrer que les intégrales* $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\sin^2(t)}{t^2}dt$ *et* $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\sin(t)}{t}dt$ *sont convergentes et que :*
$$\int_0^{+\infty} \frac{\sin^2(t)}{t^2}dt = \int_0^{+\infty} \frac{\sin(t)}{t}dt$$
   (b) *Montrer que* $\mathcal{L}(f)(x)$ *est définie pour tout nombre réel* $x > 0$, *calculer* $\mathcal{L}(f)(x)$ *pour tout* $x > 0$ *et en déduire la valeur de l'intégrale de Dirichlet* $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\sin(t)}{t}dt$.
3. *En considérant la fonction* $f = \cos$, *vérifier que la fonction* $\mathcal{L}(f)$ *peut être définie sur* $\mathbb{R}^{+,*}$ *avec une limite finie quand* x *tend vers* 0^+, *alors que l'intégrale de* f *sur* $\mathbb{R}^{+,*}$ *est divergente.*

Exercice 4

1. *Montrer que les solutions sur* $\mathbb{R}^{+,*}$ *de l'équation différentielle* $y'' + y = \dfrac{1}{x}$ *sont les fonctions définies par :*
$$\forall x \in \mathbb{R}^{+,*},\ y(x) = \alpha\cos(x) + \beta\sin(x) + \int_0^{+\infty} \frac{\sin(t)}{x+t}dt$$
   où α, β *sont deux constantes réelles.*
   Vérifier qu'il existe une unique solution sur $\mathbb{R}^{+,*}$ *de limite nulle en* $+\infty$.
2. *Montrer que la transformée de Laplace de* f *est définie sur* $\mathbb{R}^+$, *puis que :*
$$\forall x \in \mathbb{R}^{+,*},\ \mathcal{L}(f)(x) = \int_0^{+\infty} \frac{\sin(t)}{x+t}dt$$
3. *En déduire la valeur de* $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\sin(t)}{t}dt$.

Exercice 5

1. *En utilisant la transformation de Laplace, résoudre l'équation différentielle :*
$$y'''(t) - 5y''(t) + 8y'(t) - 4y(t) = t\cos(t)$$
   avec les conditions initiales $y(0) = y'(0) = y''(0) = 1$, *où* y *est une fonction de classe* $\mathcal{C}^2$ *sur* $\mathbb{R}$.
2. *En utilisant la transformation de Laplace, résoudre le système différentiel :*
$$\begin{cases} 2u''(t) + v''(t) + 2u(t) = 0 \\ u''(t) + v''(t) + v(t) = 0 \end{cases}$$
   avec les conditions initiales $u(0) = 1$, $u'(0) = v(0) = v'(0) = 0$, *où* u *et* v *sont des fonctions de classe* $\mathcal{C}^2$ *sur* $\mathbb{R}$.