Agrégation Interne

Fonctions convexes

Ce problème est en relation avec la leçon d'oral suivante :
– 217 : Fonctions convexes d'une variable réelle. Applications.

– I – Fonctions convexes. Généralités

I désigne un intervalle réel non réduit à un point et f est une application définie sur I à valeurs réelles.

On rappelle que l'épigraphe de f est la partie de $\mathbb{R}^2$ définie par :

$$\mathcal{E}(f) = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid y \geq f(x)\right\}$$

Définition 1 *On dit que la fonction f est :*

– *convexe si :*

$$\forall (x,y) \in I^2,\ \forall \lambda \in [0,1],\ f((1-\lambda)x + \lambda y) \leq (1-\lambda) f(x) + \lambda f(y) \tag{1}$$

– *strictement convexe si pour tout couple (x,y) de points distincts de I et tout réel $\lambda \in]0,1[$, on a :*

$$f((1-\lambda)x + \lambda y) < (1-\lambda) f(x) + \lambda f(y)$$

– *concave [resp. strictement concave] si la fonction $-f$ est convexe [resp. strictement convexe].*

Pour $\lambda = 0$ ou $\lambda = 1$, (1) est toujours vérifié (c'est une égalité). On peut donc se limiter à $\lambda \in]0,1[$ pour la définition d'une fonction convexe.

1. Montrer que la fonction f est convexe si, et seulement si, son épigraphe est convexe dans $E \times \mathbb{R}$.
2. Montrer que la fonction f est convexe si, et seulement si, pour tout couple $(A,B) = ((a, f(a)), (b, f(b)))$ de points du graphe de f, la courbe représentative de la restriction de f à l'intervalle d'extrémités a, b, est au dessous de la corde $[AB]$.
3. Montrer que si f est convexe sur I, elle est alors bornée sur tout segment $[a,b] \subset I$.
4. Montrer que si f est convexe sur I et admet un minimum local en un point α de I, ce minimum est alors global.
5. Montrer qu'une combinaison linéaire à coefficients positifs de fonctions convexes de I dans $\mathbb{R}$ est convexe.
6. Soit $(f_k)_{1\leq k\leq n}$ une suite finie de fonctions convexes de I dans $\mathbb{R}$. Montrer que $f = \max\limits_{1\leq k\leq n} (f_k)$ est convexe.
7. Montrer que si $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite de fonctions convexes de I dans $\mathbb{R}$ qui converge simplement sur I vers une fonction f, alors cette fonction f est convexe.
8. Montrer que si $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite de fonctions convexes de I dans $\mathbb{R}$ telle que la série $\sum f_n$ converge simplement sur I vers une fonction f, alors cette fonction f est convexe.
9. Soient J un intervalle réel non réduit à un point et $\varphi : I \times J \to \mathbb{R}$ une fonction telle que, pour tout $x \in I$ la fonction $t \mapsto \varphi(x,t)$ est intégrable sur J. Montrer que si, pour tout $t \in J$, la fonction $x \mapsto \varphi(x,t)$ est convexe sur I, alors la fonction $f : x \mapsto \displaystyle\int_J \varphi(x,t)\,dt$ est convexe.
10. Soient J un intervalle réel qui contient $f(I)$ et φ une fonction de J dans $\mathbb{R}$. Montrer que si f est convexe et φ est convexe croissante, alors $\varphi \circ f$ est convexe sur I.

11. Soient $a < b$ deux réels, $\varphi : [a,b] \to \mathbb{R}$ une fonction croissante. Montrer que la fonction f définie sur $[a,b]$ par :
$$f(x) = \int_a^x \varphi(t)\, dt$$
est convexe.

– II – Régularité des fonctions convexes

Ici encore, I est un intervalle réel non réduit à un point et f est une application définie sur I à valeurs réelles.

On note $\overset{\circ}{I}$ l'intérieur de l'intervalle I.

Pour $x \neq y$ dans I, on note :
$$p(x,y) = \frac{f(y) - f(x)}{y - x}$$
la pente de la droite (MN) où $M = (x, f(x))$ et $N = (y, f(y))$ sont deux points du graphe de f.

1. On se propose de montrer que si f est convexe sur I, sa restriction à tout intervalle $[a,b] \subset \overset{\circ}{I}$ est alors lipschitzienne.

   On se donne, une fonction f convexe sur I, un intervalle $[a,b] \subset \overset{\circ}{I}$ et un réel $\varepsilon > 0$ tel que $[a-\varepsilon, b+\varepsilon] \subset I$.

   (a) Soient $x \neq y$ dans $[a,b]$ et $z = y + \frac{y-x}{|y-x|}\varepsilon$. Montrer que $y = (1-\lambda)x + \lambda z$ avec $\lambda = \frac{|y-x|}{|y-x| + \varepsilon} \in \,]0,1[\,$.

   (b) Montrer que f est lipschitzienne sur $[a,b]$.

   (c) En déduire que f est continue sur $\overset{\circ}{I}$.

2. Montrer que si f est continue sur I et convexe sur $\overset{\circ}{I}$, elle est alors convexe sur I.
3. Montrer que les trois propriétés suivantes sont équivalentes :

   (a) f est convexe ;

   (b) pour tous x, y, z dans I tels que $x < y < z$, on a :
   $$p(x,y) \leq p(x,z) \leq p(y,z)$$
   (inégalité des trois pentes, figure 1) ;

   (c) pour tout $a \in I$ la fonction :
   $$\tau_a : x \mapsto p(a,x) = \frac{f(x) - f(a)}{x - a}$$
   est croissante sur $I \setminus \{a\}$.

4. En utilisant la caractérisation (c) de la question précédente, montrer que si f est convexe sur I, sa restriction à tout intervalle $[a,b] \subset \overset{\circ}{I}$ est alors lipschitzienne (et f est continue sur $\overset{\circ}{I}$).
5. Montrer qu'une fonction f de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ est affine si, et seulement si, elle est à la fois convexe et concave.
6. Montrer que si f, g sont deux fonctions convexes de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ telles que la fonction $f + g$ soit affine, alors les fonctions f et g sont également affines.

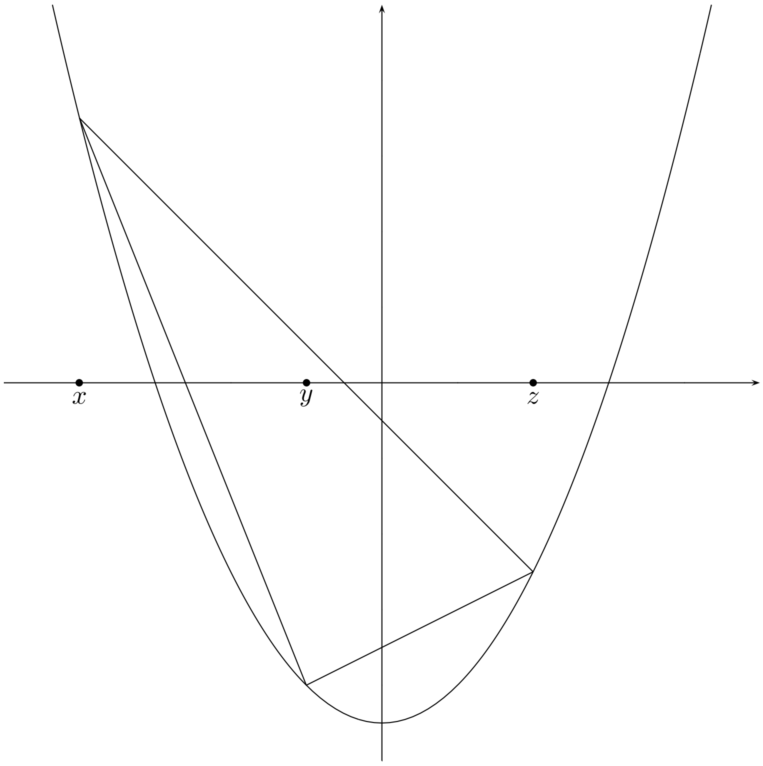

FIGURE 1 – Inégalité des trois pentes

7. Montrer qu'une fonction f de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ est constante si, et seulement si, elle est convexe et majorée.
8. Montrer que f est convexe si, et seulement si, pour tous $x < y < z$ dans I on a :
$$d(x, y, z) = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ x & y & z \\ f(x) & f(y) & f(z) \end{vmatrix} \geq 0$$
9. Soit f une fonction convexe de $\mathbb{R}^+$ dans $\mathbb{R}$.
   (a) Montrer que la fonction $g : x \mapsto \dfrac{f(x)}{x}$ admet une limite finie ou égale à $+\infty$ quand x tend vers $+\infty$.
   (b) Montrer que si $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{f(x)}{x} = \alpha \in \mathbb{R}$ alors la fonction $h : x \mapsto f(x) - \alpha x$ admet une limite finie ou égale à $-\infty$ quand x tend vers $+\infty$.
10. Soit f une fonction continue de $\mathbb{R}_+^*$ dans $\mathbb{R}$ et g la fonction définie sur $\mathbb{R}_+^*$ par $g(x) = xf\left(\dfrac{1}{x}\right)$. Montrer que f et g sont simultanément convexes.
11. Montrer que si f est convexe sur I, elle admet alors une dérivée à droite et à gauche en tout point de $\overset{\circ}{I}$, les fonctions dérivées à droite et à gauche étant croissantes sur $\overset{\circ}{I}$ et pour $a < b$ dans $\overset{\circ}{I}$ on a :
$$f_g'(a) \leq f_d'(a) \leq \frac{f(b) - f(a)}{b - a} \leq f_g'(b) \leq f_d'(b)$$
12. Soit φ une fonction continue sur un segment $[a, b]$ et dérivable à droite et à gauche en tout point de $]a, b[$. Montrer que si $\varphi(a) = \varphi(b)$, il existe alors un point $c \in]a, b[$ tel que $\varphi_g'(c)\, \varphi_d'(c) \leq 0$ (théorème de Rolle).

13. En utilisant le théorème de Rolle, montrer que si f est deux fois dérivable sur I, elle est alors convexe sur I si, et seulement si, $f''(x) \geq 0$ pour tout $x \in I$.
14. Soit φ une fonction continue sur un segment $[a, b]$ et dérivable à droite et à gauche en tout point de $]a, b[$. Montrer qu'il existe un point $c \in]a, b[$ tel que $\dfrac{\varphi(b) - \varphi(a)}{b - a}$ soit dans le segment d'extrémités $\varphi'_g(c)$ et $\varphi'_d(c)$ (théorème des accroissements finis).
15. Soit φ une fonction continue sur un segment $[a, b]$ et dérivable à droite et à gauche en tout point de $]a, b[$. Montrer que si $\varphi'_d(x) \geq 0$ et $\varphi'_g(x) \geq 0$ pour tout $x \in]a, b[$, la fonction φ est alors croissante sur $[a, b]$.
16. Soient φ une fonction dérivable sur I et α un point de I. Montrer que si $(x - \alpha)\varphi'(x) \geq 0$ [resp. $(x - \alpha)\varphi'(x) \leq 0$] pour tout $x \in I$, la fonction φ admet alors un minimum [resp. maximum] global en α.
17. On suppose que I est un intervalle réel ouvert. Montrer que la fonction f est convexe sur I si, et seulement si, elle est dérivable à droite et à gauche sur I de dérivées f'_d et f'_g croissantes.
18. Soit f une fonction dérivable sur I. Montrer que les propriétés suivantes sont équivalentes :
    (a) f est convexe sur I ;
    (b) la fonction dérivée f' est croissante sur I ;
    (c) la courbe représentative de f est située au dessus de sa tangente en tout point a de I.
19. Soit q une fonction continue de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}^+$ non identiquement nulle. Montrer que l'unique solution à valeurs réelles bornée sur $\mathbb{R}$ de l'équation différentielle $y'' - qy = 0$ est la fonction nulle.
20. Soient q une fonction continue de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}^+$ et y une solution à valeurs réelles de l'équation différentielle $y'' - qy = 0$. Montrer que si y s'annule en deux points distincts alors elle est identiquement nulle.

– III – Fonctions mid-convexes

Définition 2 *On dit que $f : I \to \mathbb{R}$ est mid-convexe si :*

$$\forall (x, y) \in I^2,\ f\left(\frac{x + y}{2}\right) \leq \frac{f(x) + f(y)}{2}$$

1. Montrer qu'une fonction convexe sur I est mid-convexe.
2. On se propose de montrer que f est mid-convexe si, et seulement si, pour tout entier $n \geq 2$ et toute suite $(x_k)_{1 \leq k \leq n}$ de points de I, on a :

$$f\left(\frac{x_1 + \cdots + x_n}{n}\right) \leq \frac{f(x_1) + \cdots + f(x_n)}{n} \tag{2}$$

    (a) Montrer que si $f : I \to \mathbb{R}$ est mid-convexe, on a alors pour tout entier $p \geq 1$ et toute suite $(x_k)_{1 \leq k \leq 2^p}$ de points de I :

$$f\left(\frac{1}{2^p} \sum_{k=1}^{2^p} x_k\right) \leq \frac{1}{2^p} \sum_{k=1}^{2^p} f(x_k)$$

    (b) Soit $f : I \to \mathbb{R}$ mid-convexe. Montrer que si l'inégalité (2) est vérifiée pour $n + 1 \geq 3$, elle l'est également pour n.
    (c) Conclure.

3. Montrer que f est mid-convexe si, et seulement si :
$$\forall (x,y) \in I^2,\ \forall \lambda \in [0,1] \cap \mathbb{Q},\ f((1-\lambda)x + \lambda y) \leq (1-\lambda) f(x) + \lambda f(y)$$
4. Montrer qu'une fonction $f : I \to \mathbb{R}$ continue est convexe si, et seulement si, elle est mid-convexe.
5. Montrer qu'une fonction $f : I \to \mathbb{R}$ monotone est convexe si, et seulement si, elle est mid-convexe.
6. Soit $f : I \to \mathbb{R}$ mid-convexe.
Montrer que si f est majorée sur un segment $[a,b] \subset I$, elle y est alors minorée.
7. On se propose de montrer qu'une fonction mid-convexe sur I qui est majorée au voisinage d'un point α de $\overset{\circ}{I}$ est convexe sur $\overset{\circ}{I}$.
Soient $f : I \to \mathbb{R}$ mid-convexe, $\alpha \in \overset{\circ}{I}$, $\eta > 0$ et $M \in \mathbb{R}$ tels que $[\alpha - \eta, \alpha + \eta] \subset \overset{\circ}{I}$ et :
$$\forall x \in [\alpha - \eta, \alpha + \eta],\ f(x) \leq M$$
On désigne par ε un nombre rationnel dans $]0,1[$.
   (a) Déterminer deux nombres rationnels λ et μ dans $]0,1[$ tels que pour tout $x \in [\alpha - \varepsilon\eta, \alpha + \varepsilon\eta]$, on ait :
$$\left\{ \begin{array}{l} x = (1-\lambda)\alpha + \lambda \left(\alpha + \dfrac{x-\alpha}{\varepsilon} \right) \\ \alpha = (1-\mu) \left(\alpha - \dfrac{x-\alpha}{\varepsilon} \right) + \mu x \end{array} \right.$$
   (b) Montrer que, pour tout $x \in [\alpha - \varepsilon\eta, \alpha + \varepsilon\eta]$, on a :
$$|f(x) - f(\alpha)| \leq \varepsilon |M - f(\alpha)|$$
   (c) Soit $\beta \neq \alpha$ dans $\overset{\circ}{I}$ et $\rho > 1$ un nombre rationnel tel que $\gamma = (1-\rho)\alpha + \rho\beta \in \overset{\circ}{I}$. En notant $\lambda = \dfrac{1}{\rho}$, montrer que :
$$J = \{(1-\lambda)x + \lambda\gamma \mid x \in [\alpha - \eta, \alpha + \eta]\}$$
   est un voisinage de β dans $\overset{\circ}{I}$ sur lequel f est majorée.
   (d) En déduire que f est continue sur $\overset{\circ}{I}$ et convexe sur $\overset{\circ}{I}$.

– IV –Inégalités de convexité

Définition 3 *Étant donnée une suite finie $(x_i)_{1 \leq i \leq n}$ de points de I, on dit qu'un réel x est combinaison linéaire convexe des x_i, pour i compris entre 1 et n, s'il existe une suite $(\lambda_i)_{1 \leq i \leq n}$ de réels positifs ou nuls telle que :*
$$\sum_{i=1}^{p} \lambda_i = 1 \text{ et } x = \sum_{i=1}^{p} \lambda_i x_i$$

Une combinaison linéaire convexe de points de I est dans I, puisque I est convexe.

1. Montrer qu'une fonction $f : I \to \mathbb{R}$ est convexe si, et seulement si, pour toute combinaison linéaire convexe $\sum\limits_{i=1}^{n} \lambda_i x_i$ de points de I, on a :
$$f\left(\sum_{i=1}^{p} \lambda_i x_i \right) \leq \sum_{i=1}^{p} \lambda_i f(x_i)$$
(inégalité de Jensen).

2. Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction convexe. Montrer que pour toute fonction continue $\varphi : [a, b] \to \mathbb{R}$ (avec $a < b$), on a :
$$f\left(\frac{1}{b-a}\int_a^b \varphi(t)\,dt\right) \leq \frac{1}{b-a}\int_a^b f \circ \varphi(t)\,dt$$
3. Montrer que pour tous réels p, q strictement positifs tels que $\dfrac{1}{p} + \dfrac{1}{q} = 1$ et tous réels x, y strictement positifs, on a :
$$xy \leq \frac{1}{p}x^p + \frac{1}{q}y^q$$
4. Soient p, q deux réels strictement positifs tels que $\dfrac{1}{p} + \dfrac{1}{q} = 1$.
Montrer que pour tous vecteurs x, y dans $\mathbb{C}^n$ on a :
$$\left|\sum_{i=1}^{n} x_i \overline{y_i}\right| \leq \left(\sum_{i=1}^{n} |x_i|^p\right)^{\frac{1}{p}} \left(\sum_{i=1}^{n} |y_i|^q\right)^{\frac{1}{q}}$$
5. Pour toute suite finie $x = (x_i)_{1 \leq i \leq n}$ de réels strictement positifs, on note :
$$H(x) = \frac{n}{\sum\limits_{i=1}^{n} \frac{1}{x_i}},\ G(x) = \left(\prod_{i=1}^{n} x_i\right)^{\frac{1}{n}},\ A(x) = \frac{\sum\limits_{i=1}^{n} x_i}{n}$$
les moyennes harmonique, géométrique et arithmétique de x.
Montrer que :
$$H(x) \leq G(x) \leq A(x)$$
6. Soit $x = (x_i)_{1 \leq i \leq n}$ une suite finie de réels strictement positifs telle que $\prod\limits_{i=1}^{n} x_i = 1$. Montrer que $\prod\limits_{i=1}^{n} (2 + x_i) \geq 3^n$ en précisant dans quel cas l'égalité est réalisée.
7. Déterminer, parmi toutes les ellipses d'aire donnée $S > 0$, celles de périmètre minimal.