1

Espaces vectoriels normés

1.1 Semi-normes et normes

E désigne un espace vectoriel sur le corps $\mathbb{R}$ des réels.

Les résultats de base sur les suites et séries réelles et sur les fonctions d'une variable réelle (continuité, dérivabilité) sont supposés connus. Nous reviendrons plus tard sur ces notions.

Définition 1 *Une semi-norme sur E est une application p définie sur E à valeurs réelles et vérifiant les propriétés suivantes :*
(i) pour tout réel λ et tout vecteur x dans E, on a $p(\lambda x) = |\lambda| \, p(x)$;
(ii) pour tous vecteurs x, y dans E, on a $p(x+y) \leq p(x) + p(y)$.

La propriété (ii) est l'inégalité triangulaire.

Le résultat qui suit nous dit qu'une semi-norme est nécessairement à valeurs positives ou nulles et nous donne une formulation équivalente de l'inégalité triangulaire souvent utile.

Exercice 1 *Soit p est une semi-norme sur E. Montrer que :*

1. *$p(0) = 0$;*
2. *pour tout x dans E, on a $p(x) \geq 0$;*
3. *l'ensemble $p^{-1}\{0\} = \{x \in E \mid p(x) = 0\}$ est un sous-espace vectoriel de E ;*
4. *pour tous x, y dans E, on a $|p(x) - p(y)| \leq p(x-y)$.*

Solution.

1. Pour tout vecteur x dans E, on a :

$$p(0) = p(0 \cdot x) = 0 \cdot p(x) = 0$$

2. et :

$$0 = p(x - x) \leq 2p(x).$$

3. L'ensemble $p^{-1}\{0\}$ est non vide puisqu'il contient 0. Avec les propriétés (i) et (ii) et la positivité d'une semi-norme on déduit facilement que c'est un sous-espace vectoriel de$E$.
4. Cette inégalité se déduit de :

$$\begin{cases} p(x) = p(x - y + y) \leq p(x-y) + p(y) \\ p(y) = p(y - x + x) \leq p(x-y) + p(x) \end{cases}$$

On vérifie facilement que l'inégalité 4. du théorème précédent est équivalente à l'inégalité triangulaire.

Le sous-espace vectoriel $p^{-1}\{0\}$ est le noyau de la semi-norme p.

Définition 2 *Une norme sur E est une semi-norme de noyau réduit à $\{0\}$.*

Une norme sur E sera notée $x \mapsto \|x\|$.

Exercice 2 *Soit φ une forme linéaire non nulle sur E. Montrer que l'application $x \mapsto |\varphi(x)|$ définit une semi-norme sur E et que c'est une norme si, et seulement si, E est de dimension 1.*

Solution. Si φ est non nulle alors $\mathrm{Im}(\varphi) = \mathbb{R}$, donc φ est surjective et si son noyau est nul elle est alors injective et réalise une bijection de E sur $\mathbb{R}$.

Exercice 3 *Soit p une semi-norme sur E de noyau H. Montrer qu'on définit une norme sur l'espace quotient $\dfrac{E}{H}$, en posant pour toute classe $\overline{x}$ dans $\dfrac{E}{H}$:*

$$\|\overline{x}\| = p(x).$$

Solution. Pour vérifier que $\|\cdot\|$ est bien définie sur l'espace quotient il suffit de montrer que p est constante sur chaque classe d'équivalence, ce qui se déduit de :

$$\forall y \in H, \quad 0 \leq |p(x+y) - p(y)| \leq p(y) = 0.$$

La condition $\|\overline{x}\| = 0$ équivaut à $\overline{x} = \overline{0}$ par définition. Les autres propriétés se vérifient facilement.

Exercice 4 *Soient E un espace vectoriel sur $\mathbb{R}$ de dimension finie $n \geq 1$ et $\mathcal{B} = (e_1, \cdots, e_n)$ une base de E. Vérifier que les applications définies par :*

$$\forall x = \sum_{i=1}^{n} x_i e_i \in E, \quad \begin{cases} \|x\|_\infty = \max\limits_{1 \leq i \leq n} |x_i|, \\ \|x\|_1 = \sum\limits_{i=1}^{n} |x_i|. \end{cases}$$

définissent des normes sur E.

Solution. Il est clair que pour $k = \infty$ et $k = 1$ les applications $x \mapsto \|x\|_k$ définissent bien des normes sur E.

Exercice 5 *Soient E un espace vectoriel sur $\mathbb{R}$ et $\varphi : (x, y) \mapsto \langle x \mid y \rangle$ une forme bilinéaire symétrique positive sur E mais non nécessairement définie. Pour tout vecteur x dans E, on note $p(x) = \sqrt{\varphi(x, x)}$.*

1. *Montrer que :*

$$\forall (x, y) \in E^2, \quad |\varphi(x, y)| \leq p(x)\, p(y)$$

(inégalité de Cauchy-Schwarz).

2. *Montrer que l'application p définit une semi-norme sur E.*

Solution.

1. Soient x, y fixés dans E et Q la fonction polynomiale définie par :

$$\forall t \in \mathbb{R},\ Q(t) = p^2(x+ty) = p^2(y)\,t^2 + 2t\varphi(x,y) + p^2(x).$$

Comme φ est positive, on a $Q(t) \geq 0$ pour tout réel t.
Si $p(y) = 0$, Q est une fonction affine à valeurs positives et nécessairement $\varphi(x,y) = 0$. On a alors dans ce cas $|\varphi(x,y)| = p(x)\,p(y)$ ..
Si $p(y) \neq 0$, Q est alors une fonction polynomiale de degré 2 à valeurs positives et son discriminant est nécessairement négatif ou nul, soit :

$$\varphi^2(x,y) - p^2(x)\,p^2(y) \leq 0,$$

ce qui équivaut à $|\varphi(x,y)| \leq p(x)\,p(y)$.

2. En écrivant pour tous vecteurs x, y dans E que :

$$p^2(x+y) = p^2(y) + 2\varphi(x,y) + p^2(x),$$

avec $\varphi(x,y) \leq |\varphi(x,y)| \leq p(x)\,p(y)$, on déduit que :

$$p^2(x+y) \leq (p(x) + p(y))^2.$$

On a donc l'inégalité triangulaire pour p. La propriété $p(\lambda x) = |\lambda|\,p(x)$ se vérifie facilement. Dans le cas où φ est définie, p est en fait une norme.

Exercice 6 *Soient E un espace vectoriel sur $\mathbb{R}$ de dimension finie $n \geq 1$ et $\mathcal{B} = (e_1, \cdots, e_n)$ une base de E. Vérifier que l'application définie par :*

$$\forall x = \sum_{i=1}^{n} x_i e_i \in E,\ \|x\|_2 = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} |x_i|^2}$$

définit une norme sur E.

Exercice 7 *Soient p et q deux réels strictement positifs tels que $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$.*

1. *En utilisant la concavité de la fonction* $\ln$, *montrer que :*

$$\forall \lambda \in [0,1],\ \forall u \in \mathbb{R}^+,\ \forall v \in \mathbb{R}^+,\ u^{\lambda} v^{1-\lambda} \leq \lambda u + (1-\lambda)\,v. \tag{1.1}$$

2. *Soient x et y dans $\mathbb{R}^n$. En utilisant* (1.1) *avec*

$$\lambda = \frac{1}{p}, \quad u_i = \frac{|x_i|^p}{\sum\limits_{j=1}^{n} |x_j|^p}, \quad v_i = \frac{|y_i|^q}{\sum\limits_{j=1}^{n} |y_j|^q},$$

pour x et y non nuls montrer l'inégalité de Hölder :

$$\left|\sum_{i=1}^{n} x_i y_i\right| \leq \left(\sum_{i=1}^{n} |x_i|^p\right)^{\frac{1}{p}} \left(\sum_{i=1}^{n} |y_i|^q\right)^{\frac{1}{q}}.$$

3. *Montrer que pour tous* x, y *dans* $\mathbb{R}^n$ *on a :*

$$\sum_{i=1}^{n} |x_i| \, |x_i + y_i|^{p-1} \leq \left(\sum_{i=1}^{n} |x_i|^p \right)^{\frac{1}{p}} \left(\sum_{i=1}^{n} |x_i + y_i|^p \right)^{\frac{1}{q}}.$$

4. *Déduire de ce qui précède que pour tout réel* $p \geq 1$ *l'application*

$$x \mapsto \|x\|_p = \left(\sum_{i=1}^{n} |x_i|^p \right)^{\frac{1}{p}}$$

définit une norme sur $\mathbb{R}^n$.

Solution.

1. La fonction ln est indéfiniment dérivable avec $\ln''(t) = -\dfrac{1}{t^2} < 0$ pour tout réel $t > 0$. On déduit donc que cette fonction est concave sur $]0, +\infty[$, c'est-à-dire que pour tout réel $\lambda \in [0, 1]$ et tous réels u, v strictement positifs on a :

$$\ln(\lambda u + (1 - \lambda) v) \geq \lambda \ln(u) + (1 - \lambda) \ln(v),$$

ce qui peut aussi s'écrire $\ln(\lambda u + (1 - \lambda) v) \geq \ln\left(u^\lambda v^{1-\lambda}\right)$, ou encore du fait que la fonction exp est strictement croissante sur $]0, +\infty[$, $u^\lambda v^{1-\lambda} \leq \lambda u + (1 - \lambda) v$. Cette inégalité est également vérifiée pour $u = 0$ ou $v = 0$.

2. Pour tous vecteurs x, y dans $\mathbb{R}^n$ on note :

$$\|x\|_p = \left(\sum_{i=1}^{n} |x_i|^p \right)^{\frac{1}{p}} \text{ et } \|y\|_q = \left(\sum_{i=1}^{n} |y_i|^q \right)^{\frac{1}{q}}.$$

En prenant $\lambda = \dfrac{1}{p}$ dans (1.1), on a $1 - \lambda = \dfrac{1}{q}$ et :

$$\forall u \geq 0, \ \forall v \geq 0, \ u^{\frac{1}{p}} v^{\frac{1}{q}} \leq \frac{1}{p} u + \frac{1}{q} v.$$

Si x et y sont deux vecteurs non nuls dans $\mathbb{R}^n$, en prenant pour tout entier i compris entre 1 et n :

$$u_i = \frac{|x_i|^p}{\sum\limits_{j=1}^{n} |x_j|^p} = \frac{|x_i|^p}{\|x\|_p^p}, \ v_i = \frac{|y_i|^q}{\sum\limits_{j=1}^{n} |y_j|^q} = \frac{|y_i|^q}{\|y\|_q^q},$$

dans l'inégalité précédente on obtient :

$$\frac{|x_i|}{\|x\|_p} \frac{|y_i|}{\|y\|_q} \leq \frac{1}{p} \frac{|x_i|^p}{\|x\|_p^p} + \frac{1}{q} \frac{|y_i|^q}{\|y\|_q^q}.$$

En faisant la somme de toutes ces inégalités on obtient :

$$\frac{1}{\|x\|_p \|y\|_q} \sum_{i=1}^{n} |x_i| \, |y_i| \leq \frac{1}{p} \sum_{i=1}^{n} \frac{|x_i|^p}{\|x\|_p^p} + \frac{1}{q} \sum_{i=1}^{n} \frac{|y_i|^q}{\|y\|_q^q}.$$

Puis avec $\sum\limits_{i=1}^{n} \dfrac{|x_i|^p}{\|x\|_p^p} = \sum\limits_{i=1}^{n} \dfrac{|y_i|^q}{\|y\|_q^q} = 1$ et $\dfrac{1}{p} + \dfrac{1}{q} = 1$ on déduit que :

$$\left| \sum_{i=1}^{n} x_i y_i \right| \leq \sum_{i=1}^{n} |x_i| \, |y_i| \leq \|x\|_p \|y\|_q,$$

cette inégalité étant encore réalisée pour $x = 0$ ou $y = 0$.

Remarque 1 *L'inégalité de Hölder s'écrit, en notant $\langle x \mid y\rangle$ le produit scalaire euclidien canonique de $\mathbb{R}^n$,*

$$|\langle x \mid y\rangle| \leq \|x\|_p \|y\|_q .$$

Pour $p = q = 2$ on retrouve l'inégalité de Cauchy-Schwarz et cette inégalité est encore valable pour $p = 1$ et $q = +\infty$.

3. Pour x, y dans $\mathbb{R}^n$ on a, en utilisant l'inégalité de Hölder :

$$\sum_{i=1}^{n} |x_i| |x_i + y_i|^{p-1} \leq \left(\sum_{i=1}^{n} |x_i|^p\right)^{\frac{1}{p}} \left(\sum_{i=1}^{n} |x_i + y_i|^{(p-1)q}\right)^{\frac{1}{q}},$$

soit avec $(p-1)\,q = p$:

$$\sum_{i=1}^{n} |x_i| |x_i + y_i|^{p-1} \leq \left(\sum_{i=1}^{n} |x_i|^p\right)^{\frac{1}{p}} \left(\sum_{i=1}^{n} |x_i + y_i|^{p}\right)^{\frac{1}{q}}.$$

4. On vérifie facilement que $x \mapsto \|x\|_1$ définit une norme sur $\mathbb{R}^n$. On suppose donc que $p > 1$ et on note q le réel défini par $\dfrac{1}{p} + \dfrac{1}{q} = 1$. Pour x, y dans $\mathbb{R}^n$ on a :

$$\sum_{i=1}^{n} |x_i + y_i|^p \leq \sum_{i=1}^{n} |x_i + y_i|^{p-1} |x_i| + \sum_{i=1}^{n} |x_i + y_i|^{p-1} |y_i| .$$

Ce qui donne avec l'inégalité précédente :

$$\left(\|x+y\|_p\right)^p \leq \left(\|x\|_p + \|y\|_p\right) \left(\|x+y\|_p\right)^{\frac{p}{q}},$$

soit avec $p - \dfrac{p}{q} = 1$:

$$\|x+y\|_p \leq \|x\|_p + \|y\|_p .$$

On a donc l'inégalité triangulaire pour $\|\cdot\|_p$. Les autres propriétés d'une norme se vérifient facilement.

Exercice 8 *Montrer que pour tout x dans $\mathbb{R}^n$ on a* $\lim\limits_{p\to+\infty} \|x\|_p = \|x\|_\infty$.

Solution. Pour x dans $\mathbb{R}^n$ et tout entier i compris entre 1 et n on a $|x_i|^p \leq \|x\|_\infty^p$. Il en résulte que $\|x\|_p \leq n^{\frac{1}{p}} \|x\|_\infty$. D'autre part il existe un entier k compris entre 1 et n tel que $\|x\|_\infty = |x_k|$ et avec $|x_k|^p \leq \sum\limits_{i=1}^{n} |x_i|^p$, on déduit que $\|x\|_\infty \leq \|x\|_p$. On a donc :

$$\forall x \in \mathbb{C}^n,\ \|x\|_\infty \leq \|x\|_p \leq n^{\frac{1}{p}} \|x\|_\infty .$$

Ce qui montre au passage que les normes $\|\cdot\|_\infty$ et $\|\cdot\|_p$ sont équivalente et par transitivité que pour tous réels $p \geq 1$ et $q \geq 1$ les normes $\|\cdot\|_p$ et $\|\cdot\|_q$ sont équivalentes sur $\mathbb{R}^n$.

Avec $\lim\limits_{p\to+\infty} n^{\frac{1}{p}} = 1$ pour tout entier $n \geq 1$ on déduit que $\lim\limits_{p\to+\infty} \|x\|_p = \|x\|_\infty$.

Exercice 9 *Montrer que sur l'espace vectoriel* $E = \mathcal{C}^0([a,b],\mathbb{R})$ *des applications continues sur l'intervalle* $[a,b]$ $(a < b)$ *et à valeurs dans* $\mathbb{R}$, *les applications définies par :*

$$\forall f \in E, \begin{cases} \|f\|_\infty = \sup\limits_{x\in[a,b]} |f(x)|, \\ \|f\|_1 = \int_a^b |f(t)|\,dt, \\ \|f\|_2 = \sqrt{\int_a^b |f(t)|^2\,dt} \end{cases}$$

définissent des normes sur E.

Solution. Il est clair que pour $k = \infty$ et $k = 1$ les applications $f \mapsto \|f\|_k$ définissent bien des normes sur E. Pour $f \mapsto \|f\|_1$ on utilise le fait que l'application $\varphi \mapsto \int_a^b \varphi(t)\,dt$ est une forme linéaire positive avec $\int_a^b \varphi(t)\,dt = 0$ équivalent à $\varphi = 0$ si φ est une fonction continue à valeurs positives ou nulles.

Pour $k = 2$, on utilise l'inégalité de Cauchy-Schwarz dans E :

$$\forall (f,g) \in E^2, \left|\int_a^b f(t)\,g(t)\,dt\right| \leq \int_a^b |f(t)|\,|g(t)|\,dt \leq \|f\|_2\,\|g\|_2,$$

conséquence du fait que l'application :

$$(f,g) \mapsto \int_a^b f(t)\,g(t)\,dt$$

est une forme bilinéaire symétrique définie positive sur E, qui entraîne l'inégalité triangulaire pour $\|\cdot\|_2$. Les autres propriétés d'une norme se vérifient facilement.

Exercice 10 *Montrer que sur l'espace vectoriel* $E = \mathcal{C}^0([a,b],\mathbb{R})$ *des applications continues sur l'intervalle* $[a,b]$ $(a < b)$ *et à valeurs dans* $\mathbb{R}$, *pour tout réel* $p \geq 1$, *l'application*

$$f \mapsto \|f\|_p = \sqrt[p]{\int_a^b |f(x)|^p\,dx}$$

définit une norme (s'inspirer de ce qui a été fait en dimension finie).

Solution. Pour $p = 1$, on sait déjà que $f \mapsto \|f\|_1$ définit une norme sur E. On suppose donc que $p > 1$ et on se donne deux fonctions f, g non identiquement nulles dans E.

On applique l'inégalité de convexité :

$$\forall u \geq 0,\ \forall v \geq 0,\ u^{\frac{1}{p}} v^{\frac{1}{q}} \leq \frac{1}{p}u + \frac{1}{q}v,$$

où q est tel que $\dfrac{1}{p} + \dfrac{1}{q} = 1$, à :

$$u = \frac{|f(t)|^p}{\|f\|_p^p},\ v = \frac{|g(t)|^q}{\|g\|_q^q},$$

pour tout t dans $[a,b]$, ce qui donne :

$$\frac{|f(t)|}{\|f\|_p}\frac{|g(t)|}{\|g\|_q} \leq \frac{1}{p}\frac{|f(t)|^p}{\|f\|_p^p} + \frac{1}{q}\frac{|g(t)|^q}{\|g\|_q^q}.$$

En intégrant sur $[a,b]$ on obtient :

$$\frac{1}{\|f\|_p \|g\|_q} \int_a^b |f(t)| |g(t)| \, dt \leq \frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1.$$

On a donc l'inégalité de Hölder :

$$\left| \int_a^b f(t) g(t) \, dt \right| \leq \int_a^b |f(t)| |g(t)| \, dt \leq \|f\|_p \|g\|_q ,$$

cette inégalité étant encore réalisée pour $f = 0$ ou $g = 0$.

Pour f, g dans E on a, en utilisant l'inégalité de Hölder :

$$\int_a^b |f(t)| |f(t) + g(t)|^{p-1} \, dt \leq \|f\|_p \left\| (f+g)^{p-1} \right\|_q ,$$

soit avec $(p-1) q = p$:

$$\int_a^b |f(t)| |f(t) + g(t)|^{p-1} \, dt \leq \|f\|_p \|f+g\|_p^{\frac{p}{q}} .$$

On déduit alors que :

$$\|f+g\|_p^p = \int_a^b |f(t) + g(t)|^p \, dt \leq \left(\|f\|_p + \|g\|_p \right) \|f+g\|_p^{\frac{p}{q}} ,$$

soit avec $p - \dfrac{p}{q} = 1$:

$$\|f+g\|_p \leq \|f\|_p + \|g\|_p .$$

On a donc l'inégalité triangulaire pour $\|\cdot\|_p$. Les autres propriétés d'une norme se vérifient facilement.

Exercice 11 *Montrer que pour toute fonction f dans $E = \mathcal{C}^0([a,b], \mathbb{R})$ on a :*

$$\lim_{p \to +\infty} \|f\|_p = \|f\|_\infty .$$

Solution. On suppose f non identiquement nulle. On a, pour tout réel $p \geq 1$:

$$(\forall x \in [a,b], \; 0 \leq |f(x)| \leq \|f\|_\infty) \Rightarrow \left(0 \leq \|f\|_p \leq \|f\|_\infty (b-a)^{\frac{1}{p}} \right).$$

La fonction f est continue sur le compact $[a,b]$, il existe donc un réel $x_0 \in [a,b]$ tel que $|f(x_0)| = \|f\|_\infty$. Pour $\varepsilon > 0$ donné, il existe $\eta > 0$ tel que $0 \leq |f(x_0)| - |f(x)| < \varepsilon$ pour tout $x \in I_0 = [a,b] \cap [x_0 - \eta, x_0 + \eta]$. On a alors, en notant α la longueur de l'intervalle I_0 :

$$\begin{aligned} \int_a^b |f(x)|^p \, dx &\geq \int_{I_0} |f(x)|^p \, dx \\ &\geq \int_{I_0} (|f(x_0)| - \varepsilon)^p \, dx \geq \alpha (\|f\|_\infty - \varepsilon)^p . \end{aligned}$$

Ce qui donne en définitive, pour tout $\varepsilon > 0$:

$$\varepsilon \alpha^{\frac{1}{p}} \leq \|f\|_p \leq \|f\|_\infty (b-a)^{\frac{1}{p}} .$$

Comme $\lim\limits_{p \to +\infty} (\|f\|_\infty - \varepsilon) \alpha^{\frac{1}{p}} = \|f\|_\infty - \varepsilon$ et $\lim\limits_{n \to +\infty} \|f\|_\infty (b-a)^{\frac{1}{p}} = \|f\|_\infty$, on déduit qu'il existe un entier p_0 tel que :

$$\forall p \geq p_0, \; \|f\|_\infty - 2\varepsilon \leq \|f\|_p \leq \|f\|_\infty + 2\varepsilon.$$

On a donc ainsi prouvé que $\lim\limits_{p \to +\infty} \left(\|f\|_p \right) = \|f\|_\infty$.

Exercice 12 *Soient f et g deux fonctions à valeurs réelles définies et continues sur l'intervalle $[a, b]$, la fonction g étant à valeurs strictement positives. Calculer $\lim_{p \to +\infty} \left\| f g^{\frac{1}{p}} \right\|_p$.*

Solution. La fonction g étant continue et à valeurs strictement positives sur le compact $[a, b]$, on a $m = \inf_{x \in [a,b]} g(x) > 0$ et $M = \sup_{x \in [a,b]} g(x) > 0$. Puis avec :

$$m |f|^p \leq g |f|^p \leq M |f|^p,$$

on déduit que :

$$m^{\frac{1}{p}} \|f\|_p \leq \left\| g^{\frac{1}{p}} f \right\|_p \leq M^{\frac{1}{p}} \|f\|_p.$$

On en déduit alors en utilisant le résultat de l'exercice précédent que $\lim_{p \to +\infty} \left\| f g^{\frac{1}{p}} \right\|_p = \|f\|_\infty$.

1.2 Topologie associée à une norme

Un espace vectoriel normé est naturellement muni d'une structure d'espace vectoriel topologique, ce qui signifie que l'on peut associer à une norme sur E une topologie (i. e. une famille d'ouverts) telle que les applications d'addition interne et de multiplication externe soient continues.

Nous rappelons brièvement ces notions, en désignant par $(E, \|\cdot\|)$ un espace vectoriel normé.

Pour tout x_0 dans E et tout réel r strictement positif, on note :

$$B(x_0, r) = \{x \in E \mid \|x - x_0\| < r\}$$

la boule ouverte de centre x_0 et de rayon r et :

$$\overline{B}(x_0, r) = \{x \in E \mid \|x - x_0\| \leq r\}$$

la boule fermée de centre x_0 et de rayon r.

Définition 3 *On dit qu'une partie $\mathcal{O}$ de $(E, \|\cdot\|)$ est un ouvert si cette partie est vide ou si elle est non vide et pour tout a dans $\mathcal{O}$ il existe un réel $r > 0$ tel que $\mathcal{B}(a, r) \subset \mathcal{O}$.*

Un ouvert est donc une réunion de boules ouvertes.

Définition 4 *L'intérieur d'une partie A de $(E, \|\cdot\|)$, noté $\overset{\circ}{A}$, est le plus grand ouvert de E contenu dans A.*

Définition 5 *On dit qu'une partie $\mathcal{F}$ de $(E, \|\cdot\|)$ est un fermé si son complémentaire dans E est un ouvert de E.*

Définition 6 *L'adhérence d'une partie A de $(E, \|\cdot\|)$, notée $\overline{A}$, est le plus petit fermé de E contenant A.*

On peut également définir les notions de convergence pour les suites et les séries ainsi que la notion de continuité pour les fonctions définies sur E et à valeurs dans un autre espace vectoriel normé, ces notions étant supposées acquises sur $\mathbb{R}$ (nous étudierons plus tard, et en détail, les suites et séries numériques).

Définition 7 *On dit qu'une suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ d'éléments de $(E, \|\cdot\|)$ est convergente s'il existe x dans E tel que $\lim\limits_{n\to+\infty} \|x_n - x\| = 0$. Une suite non convergente est dite divergente.*

Si une suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ d'éléments de $(E, \|\cdot\|)$ est convergente alors sa limite est unique et on peut noter $x = \lim\limits_{n\to+\infty} x_n$. La convergence de $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ vers x se traduit alors par :

$$\forall\varepsilon > 0,\ \exists n_0 \in \mathbb{N} \mid \forall n \geq n_0,\ \|x_n - x\| < \varepsilon.$$

Cette notion dépend *a priori* de la norme choisie sur E. Considérons par exemple la suite de fonctions $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie sur $[0, 1]$ par :

$$f_n(x) = \begin{cases} -n^3 x + n \text{ si } x \in \left[0, \frac{1}{n^2}\right], \\ 0 \text{ si } x \in \left[\frac{1}{n^2}, 1\right]. \end{cases}$$

On a $\lim\limits_{n\to+\infty} \|f_n\|_1 = 0$ et $\lim\limits_{n\to+\infty} \|f_n\|_\infty = +\infty$, c'est-à-dire que cette suite converge vers la fonction nulle pour la norme $\|\cdot\|_1$ et diverge pour la norme $\|\cdot\|_\infty$.

Définition 8 *On dit qu'une suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ d'éléments de $(E, \|\cdot\|)$ est une suite de Cauchy si pour tout réel $\varepsilon > 0$ on peut trouver un entier n_ε tel que pour tous entiers p, q on a :*

$$p \geq n_\varepsilon, \quad q \geq n_\varepsilon, \quad \Rightarrow \quad \|x_p - x_q\| < \varepsilon.$$

En utilisant l'inégalité triangulaire on déduit immédiatement que toute suite convergente dans un espace vectoriel normé est de Cauchy. Mais en général la réciproque est fausse.

Définition 9 *On dit qu'un espace vectoriel normé $(E, \|\cdot\|)$ est complet, ou que c'est un espace de Banach, si toute suite de Cauchy dans E est convergente.*

On rappelle que $(\mathbb{R}, |\cdot|)$ est complet. De ce résultat on déduira que tout espace vectoriel normé de dimension finie est complet.

Définition 10 *On dit qu'une partie non vide $\mathcal{B}$ de $(E, \|\cdot\|)$ est bornée s'il existe une constante $\lambda > 0$ telle que $\|x\| \leq \lambda$ pour tout x dans $\mathcal{B}$.*

Dire qu'une partie A de E est bornée revient à dire qu'elle contenue dans une boule fermée centrée en 0.

On vérifie facilement qu'une suite convergente est bornée.

Exercice 13 *Montrer qu'une partie $\mathcal{F}$ de $(E, \|\cdot\|)$ est fermée si, et seulement si, pour toute suite d'éléments de $\mathcal{F}$ qui converge vers x dans E on a, $x \in \mathcal{F}$.*

Exercice 14 *Soit $(E, \|\cdot\|)$ un espace vectoriel normé. Pour toute partie non vide F de E, on note $d(x, F) = \inf\limits_{y\in F} \|x - y\|$. Montrer que si F est fermée dans $(E, \|\cdot\|)$ alors pour tout $x \in E - F$ on a $d(x, F) > 0$.*

Solution. Pour $x \in E - F$, on note $\delta = d(x, F)$. Par définition de la borne inférieure, pour tout entier $n > 0$ on peut trouver un élément x_n de F tel que :

$$\delta \leq \|x - x_n\| < \delta + \frac{1}{n}.$$

On a alors $\lim\limits_{n\to+\infty} \|x - x_n\| = \delta$. Si $\delta = 0$ alors $x = \lim\limits_{n\to+\infty} x_n \in F$, puisque F est fermé, ce qui contredit $x \in E - F$. On a donc $\delta > 0$.

Définition 11 *On dit qu'une partie non vide $\mathcal{C}$ de $(E, \|\cdot\|)$ est compacte si de toute suite de points de $\mathcal{C}$ on peut extraire une sous-suite qui converge vers un élément de $\mathcal{C}$.*

Toute partie compacte d'un espace vectoriel normé $(E, \|\cdot\|)$ est fermée et bornée. Nous verrons plus loin que la réciproque est vraie seulement dans les espaces de dimension finie.

Définition 12 *On dit qu'une partie A de $(E, \|\cdot\|)$ est dense dans E si $\overline{A} = E$.*

Exercice 15 *Montrer l'équivalence des assertions suivantes :*

1. *A est dense dans E ;*
2. *le complémentaire de A dans E, (noté $E \setminus A$) est d'intérieur vide dans E ;*
3. *pour tout ouvert non vide $\mathcal{V}$ de E, l'intersection $A \cap \mathcal{V}$ est non vide ;*
4. *tout élément x de E est limite d'une suite de points de A.*

Définition 13 *On dit que l'espace vectoriel normé $(E, \|\cdot\|)$ est séparable s'il existe dans E une partie dense dénombrable.*

Exemple 1 *De la densité de l'ensemble $\mathbb{Q}$ dans $\mathbb{R}$, on déduit que $(\mathbb{R}, |\cdot|)$ est séparable.*

Exemple 2 *Plus généralement si E est un espace vectoriel de dimension n, en désignant par $\mathcal{B} = (e_i)_{1 \leq i \leq n}$ une base de E, on munit cet espace de la norme définie par :*

$$\forall x = \sum_{i=1}^{n} x_i e_i \in E, \ \|x\|_\infty = \max_{1 \leq i \leq n} |x_i|$$

et l'ensemble :

$$D = \left\{ x = \sum_{i=1}^{n} r_i e_i \mid (r_1, \cdots, r_n) \in \mathbb{Q}^n \right\}$$

est dénombrable et dense dans E.

Si I est une partie non vide d'un espace vectoriel normé $(E, \|\cdot\|)$ et f une fonction définie sur I à valeurs dans un espace vectoriel normé $\left(F, \|\cdot\|'\right)$, on rappelle les définitions suivantes de continuité et d'uniforme continuité. Le cas des fonctions numériques sera étudié plus en détail plus tard.

Définition 14 *On dit que f est continue en $x_0 \in I$ si :*

$$\forall \varepsilon > 0, \ \exists \eta > 0 \mid \forall x \in I, \ \|x - x_0\| \leq \eta \Rightarrow \|f(x) - f(x_0)\|' \leq \varepsilon.$$

On dit que f est continue sur I si elle est continue en tout point de I.

Exercice 16 *Montrer que f est continue sur I si, et seulement si, l'image réciproque par f de tout ouvert [resp. fermé] de F est un ouvert [resp. fermé] de I.*

On rappelle que si I est compact et $F = \mathbb{R}$, alors toute fonction continue sur I est bornée et atteint ses bornes.

Définition 15 *On dit que f est uniformément continue sur I si :*

$$\forall \varepsilon > 0, \ \exists \eta > 0 \mid \left((x, y) \in I^2, \ \|x - y\| \leq \eta\right) \ \Rightarrow \ \|f(x) - f(y)\| \leq \varepsilon.$$

On rappelle que si I est compact, alors toute fonction continue sur I est uniformément continue.

Définition 16 *Soient $(E, \|\cdot\|)$ et $\left(F, \|\cdot\|'\right)$ deux espaces vectoriels normés. On dit qu'une application f définie sur E et à valeurs dans F est un homéomorphisme si elle est continue bijective d'inverse f^{-1} bijective.*

1.3 Applications linéaires continues

L'étude de la continuité est plus simple dans le cas particulier des applications linéaires.

Exercice 17 *Soit u une application linéaire de $(E, \|\cdot\|)$ dans $\left(F, \|\cdot\|'\right)$.*
Montrer l'équivalence des assertions suivantes :

1. *u est continue en 0 ;*
2. *u est continue sur E ;*
3. *u est bornée sur la sphère [resp. boule] unité de $(E, \|\cdot\|)$;*
4. *il existe une constante réelle c telle que :*
$$\forall x \in E,\ \|u(x)\|' \leq c\,\|x\|$$
5. *u est uniformément continue sur E.*

Solution. (1) $\Rightarrow$ (2) Si u est continue en 0, pour $\varepsilon > 0$ donné on peut trouver $\eta > 0$ tel que :

$$x \in E,\ \|x\| \leq \eta \ \Rightarrow\ \|u(x)\|' \leq \varepsilon.$$

En utilisant la linéarité de u on déduit alors que pour x_0, x dans E tels que $\|x - x_0\| \leq \eta$ on a $\|u(x) - u(x_0)\|' \leq \varepsilon$, ce qui prouve la continuité (et même l'uniforme continuité) de f sur E.
(2) $\Rightarrow$ (3) Si u est continue sur E elle est en particulier continue en 0 et il existe un réel $\eta > 0$ tel que :

$$x \in E, \quad \|x\| \leq \eta \quad \Rightarrow \quad \|u(x)\|' \leq 1.$$

Pour tout x dans la sphère [resp. boule] unité de $(E, \|\cdot\|)$ on a $\|x\| = 1$ [resp. $\|x\| \leq 1$] de sorte que $\|\eta x\| = \eta$ [resp. $\|\eta x\| \leq \eta$] et avec la linéarité de u on déduit que $\|u(x)\|' \leq \dfrac{1}{\eta}$. On a donc ainsi prouvé que u est bornée sur la sphère [resp. boule] unité de $(E, \|\cdot\|)$.
(3) $\Rightarrow$ (4) Si u est bornée sur la sphère [resp. boule] unité de $(E, \|\cdot\|)$ il existe un réel $c > 0$ tel que $\|u(x)\|' \leq c$ pour tout $x \in E$ tel que $\|x\| = 1$ [resp. $\|x\| \leq 1$]. En remarquant que pour tout vecteur x non nul dans E le vecteur $\dfrac{1}{\|x\|}x$ est dans la sphère (et la boule) unité de $(E, \|\cdot\|)$ et en utilisant la linéarité de u on déduit que $\|u(x)\|' \leq c\,\|x\|$, cette inégalité étant aussi vérifiée pour $x = 0$.
(4) $\Rightarrow$ (5) et (5) $\Rightarrow$ (1) Ces implications sont évidentes.

Une application linéaire continue de E dans F est aussi appelée opérateur borné et la norme d'un tel opérateur peut être définie par :

$$\|u\| = \sup_{\substack{x \in E \\ \|x\| = 1}} \|u(x)\|' = \sup_{x \in E \setminus \{0\}} \frac{\|u(x)\|'}{\|x\|}.$$

Exercice 18 *Soient $(E, \|\cdot\|)$, $\left(F, \|\cdot\|'\right)$ deux espaces vectoriels normés et u une application linéaire surjective de E dans F. Montrer que les assertions suivantes sont équivalentes :*
(i) u est un homéomorphisme de E sur F ;
(ii) il existe des constantes réelles strictement positives α et β telles que :

$$\forall x \in E,\ \alpha\,\|x\| \leq \|u(x)\|' \leq \beta\,\|x\|\,;$$

(iii) il existe des constantes réelles strictement positives α et β telles que :

$$(x \in E,\ \|x\| = 1)\ \Rightarrow\ \alpha \leq \|u(x)\|' \leq \beta.$$

Solution.
$(i) \Rightarrow (ii)$ Si u est un homéomorphisme de E sur F alors u et u^{-1} sont continues et il existe deux constantes $\beta > 0$ et $\gamma > 0$ telles que :

$$\forall x \in E,\ \|u(x)\|' \leq \beta \|x\|,$$
$$\forall y \in F,\ \left\|u^{-1}(y)\right\| \leq \gamma \|y\|'.$$

Comme tout vecteur x de E s'écrit de manière unique $x = u^{-1}(y)$ avec y dans F, on déduit des inégalités précédentes que :

$$\forall x \in E,\ \frac{1}{\gamma}\|x\| \leq \|u(x)\|' \leq \beta \|x\|.$$

$(ii) \Rightarrow (iii)$ Cette implication est évidente.
$(iii) \Rightarrow (i)$ Les inégalités $\|u(x)\|' \leq \beta$ pour x dans la sphère unité de E signifient que l'application linéaire u est continue. En remarquant que pour tout vecteur x non nul dans E le vecteur $\frac{1}{\|x\|}x$ est dans la sphère unité de $(E, \|\cdot\|)$ et en utilisant la linéarité de u on déduit des inégalités (iii) que :

$$\forall x \in E - \{0\},\ \alpha \|x\| \leq \|u(x)\|' \leq \beta \|x\|,$$

ces inégalités étant encore vérifiées pour $x = 0$. Si $u(x) = 0$ on a alors nécessairement $x = 0$, $(\alpha > 0)$, c'est-à-dire que l'application linéaire u est injective. Cette application étant supposée surjective, on déduit que c'est un isomorphisme de E sur F. Tout vecteur x de E s'écrivant de manière unique $x = u^{-1}(y)$ avec y dans F, les inégalités $\alpha \|x\| \leq \|u(x)\|'$ pour tout x dans E sont équivalentes à $\left\|u^{-1}(y)\right\| \leq \frac{1}{\alpha}\|y\|'$ pour tout y dans F, ce qui équivaut à la continuité de u^{-1}.

Définition 17 *On dit que deux normes $\|\cdot\|$ et $\|\cdot\|'$ sont équivalentes sur un espace vectoriel E si l'application identité :*

$$\begin{array}{rccc} Id: & (E, \|\cdot\|) & \to & \left(E, \|\cdot\|'\right) \\ & x & \mapsto & x \end{array}$$

est un homéomorphisme.

On définit ainsi une relation d'équivalence sur l'ensemble des normes de E.

Exercice 19 *Montrer que deux normes $\|\cdot\|$ et $\|\cdot\|'$ sur un espace vectoriel E sont équivalentes si et seulement si il existe deux constantes réelles α et β strictement positives telles que :*

$$\forall x \in E,\ \alpha \|x\| \leq \|x\|' \leq \beta \|x\|.$$

De ce résultat on déduit que deux normes équivalentes sur E définissent la même topologie.
Dans ce qui suit on va voir qu'une application linéaire de rang fini est continue si et seulement si son noyau est fermé. De ce résultat, conséquence de la complétude de $\mathbb{R}$, on va déduire que sur un espace vectoriel de dimension finie toutes les normes sont équivalentes. Une autre démonstration, plus classique, de cette équivalence des normes en dimension finie est une conséquence de la locale compacité de $\mathbb{R}$.

Exercice 20 *On va caractériser les formes linéaires continues sur un espace vectoriel normé.*

1. *Montrer que si φ est une forme linéaire non nulle sur un $\mathbb{R}$-espace vectoriel E, alors il existe un vecteur non nul a dans E tel que :*

$$E = \ker(\varphi) \oplus \mathbb{R}a.$$

2. *Soit* $(E, \|\cdot\|)$ *un espace vectoriel normé. Montrer qu'une forme linéaire* φ *sur* E *est continue si et seulement si son noyau* $\ker(\varphi)$ *est fermé dans* $(E, \|\cdot\|)$.

Solution.

1. La forme linéaire φ étant non nulle, on peut trouver un vecteur a dans E tel que $\varphi(a) \neq 0$. Ce vecteur a est nécessairement non nul. Pour tout vecteur x dans E, le vecteur $h = x - \frac{\varphi(x)}{\varphi(a)} a$ est dans le noyau de φ et en écrivant que $x = h + \frac{\varphi(x)}{\varphi(a)} a$ on déduit que $E = \ker(\varphi) + \mathbb{K}a$. Si x est dans $\ker(\varphi) \cap \mathbb{K}a$ on a alors $x = \lambda a$ et $\lambda \varphi(a) = \varphi(x) = 0$ avec $\varphi(a) \neq 0$ ce qui entraîne $\lambda = 0$ et $x = 0$. On a donc $\ker(\varphi) \cap \mathbb{K}a = \{0\}$ et $E = \ker(\varphi) \oplus \mathbb{K}a$.
2. Soit φ une forme linéaire continue sur E et $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de points de $\ker(\varphi)$ qui converge vers $x \in E$. Avec la continuité de φ on a $\varphi(x) = \lim_{n\to+\infty} \varphi(x_n) = 0$, c'est-à-dire que $x \in \ker(\varphi)$.
On a donc ainsi montré que si φ est continue alors son noyau est fermé. On peut aussi dire que $\ker(\varphi)$ est un fermé comme image réciproque du fermé $\{0\}$ par l'application continue φ.
Supposons réciproquement que $\ker(\varphi)$ soit fermé dans $(E, \|\cdot\|)$. Dire que φ est non continue équivaut à dire qu'elle n'est pas bornée sur la sphère unité de $(E, \|\cdot\|)$. Dans ce cas on peut trouver une suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de points de E telle que :
$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad \|x_n\| = 1, \quad |\varphi(x_n)| \geq n.$$
On considère une décomposition $E = \ker(\varphi) \oplus \mathbb{R}a$ avec $\varphi(a) \neq 0$ et on écrit, pour tout entier n, $x_n = y_n + \lambda_n a$ avec $y_n \in \ker(\varphi)$ et $\lambda_n = \frac{\varphi(x_n)}{\varphi(a)} \in \mathbb{R}$. Pour $n \geq 1$ on a $|\varphi(x_n)| \geq n > 0$ et on peut écrire $a = \frac{1}{\lambda_n} x_n + z_n$ avec $z_n = -\frac{1}{\lambda_n} y_n \in \ker(\varphi)$. Mais on a alors pour tout entier $n \geq 1$:
$$\|a - z_n\| = \frac{\|x_n\|}{|\lambda_n|} = \frac{1}{|\lambda_n|} = \frac{|\varphi(a)|}{|\varphi(x_n)|} \leq \frac{|\varphi(a)|}{n}$$
et a n'appartenant pas à $\ker(\varphi)$ est limite d'une suite de points de $\ker(\varphi)$ ce qui est contradiction avec $\ker(\varphi)$ fermé. On a donc ainsi montré que si $\ker(\varphi)$ est fermé dans $(E, \|\cdot\|)$ alors φ est continue.

Exercice 21 *On va généraliser le résultat de l'exercice précédent en caractérisant les applications linéaires de rang fini qui sont continues sur un espace vectoriel normé. On en déduit que toute application linéaire d'un espace vectoriel normé de dimension fini dans un espace vectoriel normé est continue.*

1. *Soient* E, F *deux* $\mathbb{K}$*-espaces vectoriels et* u *une application linéaire de* E *dans* F. *Montrer que l'application* u *est de rang* r *si et seulement si il existe des formes linéaires sur* E, $\varphi_1, \cdots, \varphi_r$ *linéairement indépendantes et des vecteurs de* F, $a_1, \cdots, a_r$ *linéairement indépendants tels que :*
$$\forall x \in E, \ u(x) = \sum_{i=1}^{r} \varphi_i(x) a_i.$$
2. *Soient* $(E, \|\cdot\|)$ *un espace vectoriel normé et* F *un sous-espace vectoriel fermé de* $(E, \|\cdot\|)$. *Montrer que pour tout sous-espace vectoriel* G *de dimension finie dans* E, *le sous-espace vectoriel* $H = F + G$ *est fermé dans* $(E, \|\cdot\|)$ *(on peut procéder par récurrence sur la dimension* $p \geq 1$ *de* G*).*

3. *Soient* $(E, \|\cdot\|)$, $(F, \|\cdot\|')$ *deux* $\mathbb{K}$*-espaces vectoriels normés et* u *une application linéaire de* E *dans* F *de rang fini. Montrer que l'application* u *est continue si et seulement si son noyau* $\ker(u)$ *est fermé dans* $(E, \|\cdot\|)$.
4. *Soient* $(E, \|\cdot\|)$ *un espace vectoriel normé de dimension finie et* $(F, \|\cdot\|')$ *un espace vectoriel normé. Montrer que toute application linéaire de* E *dans* F *est continue.*

Solution.

1. Si $u \in \mathcal{L}(E, F)$ est de rang r, alors son image $\mathrm{Im}(u)$ est un sous-espace vectoriel de F de dimension r et, en notant $(a_1, \cdots, a_r)$ une base de $\mathrm{Im}(u)$, pour tout x dans E, on peut trouver des scalaires uniquement déterminés $\varphi_1(x), \cdots, \varphi_r(x)$ tels que $u(x) = \sum_{i=1}^{r} \varphi_i(x) a_i$. De la linéarité de u et de l'unicité de l'écriture d'un vecteur dans une base on déduit que les applications φ_i sont linéaires.
   Supposons le système $(\varphi_1, \cdots, \varphi_r)$ dans E^* (dual algébrique de E) lié avec, par exemple, $\varphi_1 = \sum_{i=2}^{r} \lambda_i \varphi_i$. On a alors, pour tout x dans E :
   $$u(x) = \left(\sum_{i=2}^{r} \lambda_i \varphi_i(x)\right) a_1 + \sum_{i=2}^{r} \varphi_i(x) a_i = \sum_{i=2}^{r} \varphi_i(x)(\lambda_i a_1 + a_i)$$
   et le système de $r-1$ vecteurs $\{\lambda_i a_1 + a_i \mid 2 \leq i \leq r\}$ engendre $\mathrm{Im}(u)$, ce qui est en contradiction avec $\dim(\mathrm{Im}(u)) = r$. Le système $(\varphi_1, \cdots, \varphi_r)$ est donc libre.
   La réciproque est évidente.
2. On procède par récurrence sur la dimension $p \geq 1$ de G. Pour $p = 1$ il s'agit de montrer que pour tout vecteur non nul a de E, $H = F + \mathbb{R}a$ est fermé. Si $a \in F$ alors $H = F$ est fermé. On suppose donc que $a \notin F$ et on a alors $H = F \oplus \mathbb{R}a$. Tout vecteur x de H s'écrit de manière unique $x = y + \varphi(x) a$ avec $y \in F$ et $\varphi(x) \in \mathbb{R}$. De l'unicité d'une telle écriture on déduit que φ est une forme linéaire sur H. De plus le noyau de φ est $\ker(\varphi) = F$ fermé dans $(E, \|\cdot\|)$, c'est donc aussi un fermé de $(H, \|\cdot\|)$ et φ est continue de H dans $\mathbb{R}$. De cette continuité et de la complétude de $\mathbb{R}$ on va déduire que H est fermé. Soit donc $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de points de H qui converge vers $x \in E$. Tout vecteur x_n s'écrit $x_n = y_n + \varphi(x_n) a$ où $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite de points de F. La suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ étant convergente dans E, elle est de Cauchy et avec la continuité de φ on déduit que la suite $(\varphi(x_n))_{n\in\mathbb{N}}$ est de Cauchy dans $\mathbb{R}$. Le corps $\mathbb{R}$ étant complet, on déduit que la suite $(\varphi(x_n))_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers un scalaire λ. On déduit alors que la suite $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers $y = x - \lambda a$. L'espace F étant fermé on a $y \in F$ et $x = y + \lambda a$ est dans H. On a donc ainsi montré que H est fermé.
   Supposons maintenant le résultat acquis pour tous les sous-espaces vectoriels de E de dimension $p \geq 1$ et soit G de dimension $p+1$. En notant $(a_1, \cdots, a_{p+1})$ une base de G on peut écrire :
   $$H = F + G = \left(F + \bigoplus_{j=1}^{p} \mathbb{K}a_j\right) + \mathbb{R}a_{p+1}$$
   et on conclut facilement avec l'hypothèse de récurrence et l'étude du cas $p = 1$.
3. Si u est continue alors $\ker(u)$ est fermé dans $(E, \|\cdot\|)$ comme image réciproque du fermé $\{0\}$ de $(F, \|\cdot\|')$ par l'application continue u.
   Réciproquement supposons que $\ker(u)$ soit fermé dans $(E, \|\cdot\|)$. L'application linéaire u étant de rang fini, il existe des formes linéaires $\varphi_1, \cdots, \varphi_r$, linéairement indépendantes dans E^* et un système libre $\{a_1, \cdots, a_r\}$ dans F tels que $u = \sum_{i=1}^{r} \varphi_i a_i$. On a alors $\ker(u) = \bigcap_{j=1}^{r} \ker(\varphi_j) \subset \ker(\varphi_j)$ pour tout j compris entre 1 et r. On peut alors écrire que $\ker(\varphi_j) = \ker(u) \oplus H_j$ et la restriction de u à H_j est injective ($u(x) = 0$ et $x \in H_j$ équivaut à $x \in \ker(u) \cap H_j$) de H_j dans

$\operatorname{Im}(u)$ qui est de dimension finie. En définitive, pour tout j compris entre 1 et r le sous-espace vectoriel H_j est de dimension finie dans E et $\ker(\varphi_j) = \ker(u) \oplus H_j$ est fermé, ce qui signifie que la forme linéaire φ_j est continue. La continuité de $u = \sum_{i=1}^{r} \varphi_i a_i$ en résulte alors immédiatement.

4. Si E est de dimension finie alors toute application linéaire u de E dans F est de rang fini. De plus avec $\dim(E) = \dim(\ker(u)) + \dim(\operatorname{Im}(u))$ on déduit que $\ker(u)$ est un sous-espace vectoriel de dimension finie de E, il est donc fermé et u est continue.

1.4 Espaces vectoriels normés de dimension finie

On rappelle le résultat important suivant : de toute suite bornée de nombres réels on peut extraire une sous-suite convergente.

La démonstration peut se faire en utilisant le principe de dichotomie. Si $[a_0, b_0]$ est un intervalle réel qui contient tous les éléments de la suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ on le coupe en deux parties égales et on garde une de ces parties qui contient des x_n pour une infinité d'indices n. En réitérant ce procédé on construit deux suites adjacentes $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et une application φ strictement croissante de $\mathbb{N}$ dans $\mathbb{N}$ telles que chaque intervalle $[a_n, b_n]$ contient un terme $x_{\varphi(n)}$. La suite $\left(x_{\varphi(n)}\right)_{n\in\mathbb{N}}$ est alors convergente.

Exercice 22 *Soient E est un espace vectoriel de dimension $n \geq 1$, $(e_1, \cdots, e_n)$ une base de E et $\|\cdot\|_\infty$ la norme définie sur E par :*

$$\forall x = \sum_{i=1}^{n} x_i e_i \in E,\ \|x\|_\infty = \max_{1\leq i\leq n} |x_i|\,.$$

Montrer que la boule unité B_∞ et la sphère unité S_∞ sont compactes dans $(E, \|\cdot\|_\infty)$.

Solution. Soit $\left(x^{(k)}\right)_{k\in\mathbb{N}}$ une suite dans B_∞ [resp. S_∞] avec, pour tout $k \in \mathbb{N}$, $x^{(k)} = \left(x_j^{(k)}\right)_{1\leq j\leq n}$. Pour tout entier j compris entre 1 et n on a :

$$\left|x_j^{(k)}\right| \leq \left\|x^{(k)}\right\|_\infty \leq 1.$$

De la suite réelle bornée $\left(x_1^{(k)}\right)_{k\in\mathbb{N}}$ on peut alors extraire une sous-suite $\left(x_1^{(\varphi_1(k))}\right)_{k\in\mathbb{N}}$ qui converge vers un scalaire x_1 vérifiant $|x_1| \leq 1$. Puis de la suite bornée $\left(x_2^{(\varphi_1(k))}\right)_{k\in\mathbb{N}}$ on peut extraire une sous-suite $\left(x_2^{(\varphi_2(k))}\right)_{k\in\mathbb{N}}$ qui converge vers un scalaire x_2 vérifiant $|x_2| \leq 1$. Et en continuant ainsi on extrait une suite $\left(x^{(\varphi(k))}\right)_{k\in\mathbb{N}}$ telle que :

$$\forall j \in \{1, 2, \cdots, n\}, \quad \lim_{k\to+\infty} x_j^{(\varphi(k))} = x_j,$$

avec $|x_j| \leq 1$. On a alors $\lim_{k\to+\infty} \left\|x^{(\varphi(k))} - x\right\|_\infty = 0$ où $x = (x_j)_{1\leq j\leq n}$ est dans B_∞ [resp. S_∞], c'est-à-dire que la suite $\left(x^{(\varphi(k))}\right)_{k\in\mathbb{N}}$ converge vers x dans B_∞ [resp. S_∞]. On a donc ainsi montré que B_∞ [resp. S_∞] est compacte dans $(E, \|\cdot\|_\infty)$.

Exercice 23 *Soient $(E, \|\cdot\|)$ un espace vectoriel normé et F un sous-espace vectoriel fermé de E distinct de E. Pour tout x dans E on note :*

$$d(x, F) = \inf_{y \in F} \|x - y\|.$$

Montrer que pour tout réel $\varepsilon > 0$ il existe un vecteur x dans la sphère unité de $(E, \|\cdot\|)$ tel que $d(x, F) \geq 1 - \varepsilon$.

Solution. Pour $\varepsilon \geq 1$ le résultat est évident. On suppose donc que $\varepsilon \in]0, 1[$. Si F est fermé dans E alors pour tout $y \in E - F$ on a $d(y, F) > 0$. Pour $\varepsilon \in]0, 1[$ on a $\frac{1}{1-\varepsilon} > 1$ et pour $y \in E - F$ on peut trouver $z \in F$ tel que :

$$0 < d(y, F) \leq \|y - z\| < \frac{d(y, F)}{1 - \varepsilon}.$$

Le vecteur $x = \frac{1}{\|y - z\|}(y - z)$ est alors dans la sphère unité de $(E, \|\cdot\|)$ et pour tout vecteur $t \in F$ on a :

$$\|x - t\| = \frac{1}{\|y - z\|} \|y - (z + \|y - z\| t)\|,$$

avec $u = z + \|y - z\| t \in F$, de sorte que :

$$\|x - t\| = \frac{1}{\|y - z\|} \|y - u\| \geq \frac{d(y, F)}{\|y - z\|} > 1 - \varepsilon.$$

On a donc $d(x, F) = \inf_{t \in F} \|x - t\| \geq 1 - \varepsilon$.

L'exercice qui suit a pour but de donner plusieurs caractérisations des $\mathbb{R}$-espaces vectoriels de dimension finie.

Exercice 24 *Soit E un espace vectoriel sur $\mathbb{K}$. Montrer que les assertions suivantes sont équivalentes.*
(i) E est de dimension finie sur $\mathbb{K}$.
(ii) Toutes les normes sur E sont équivalentes.
(iii) Quelle que soit la norme choisie sur E toute forme linéaire définie sur $(E, \|\cdot\|)$ est continue.
(iv) Quelle que soit la norme choisie sur E, la sphère [resp. boule] unité de $(E, \|\cdot\|)$ pour cette norme est compacte.
(v) Quelle que soit la norme choisie sur E, les compacts de $(E, \|\cdot\|)$ sont les fermés bornés.

Solution.
(i) $\Rightarrow$ *(ii)* On suppose que E est de dimension finie et on se donne deux normes $\|\cdot\|$ et $\|\cdot\|'$ sur E. L'application linéaire $Id : (E, \|\cdot\|) \to (E, \|\cdot\|')$ [resp. $Id : (E, \|\cdot\|') \to (E, \|\cdot\|)$] est de rang fini à noyau fermé, elle est donc continue. L'application $Id : (E, \|\cdot\|) \to (E, \|\cdot\|')$ est donc un homéomorphisme, c'est-à-dire que les normes $\|\cdot\|$ et $\|\cdot\|'$ sont équivalentes sur E.
(ii) $\Rightarrow$ *(iii)* On suppose que toutes les normes sur E sont équivalentes. Si $\|\cdot\|$ est une norme sur E et φ une forme linéaire sur E alors l'application :

$$N : x \mapsto \|x\| + |\varphi(x)|$$

définit une norme sur E, elle est donc équivalente à $\|\cdot\|$ et il existe une constante $\alpha > 0$ telle que :

$$\forall x \in E, \quad N(x) \leq \alpha \|x\|.$$

On a donc :

$$\forall x \in E, \quad |\varphi(x)| \leq (\alpha - 1) \|x\|,$$

ce qui équivaut à la continuité de la forme linéaire φ.
$(iii) \Rightarrow (iv)$ On suppose que quelle que soit la norme choisie sur E toute forme linéaire sur E est continue. Si $(E, \|\cdot\|)$ est de dimension infinie on peut trouver un système libre infini dénombrable $\{e_n \mid n \in \mathbb{N}\}$ tel que $\|e_n\| = 1$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. En désignant par G un supplémentaire dans E de $H = \text{Vect}\{e_n \mid n \in \mathbb{N}\}$ on définit la forme linéaire φ sur E par :

$$\begin{cases} \forall x \in G, & \varphi(x) = 0, \\ \forall n \in \mathbb{N}, & \varphi(e_n) = n. \end{cases}$$

L'application linéaire ainsi définie n'est pas bornée sur la sphère unité de $(E, \|\cdot\|)$ et en conséquence n'est pas continue, ce qui est en contradiction avec l'hypothèse de départ. L'espace vectoriel E est donc de dimension finie.
On a donc ainsi montré que les assertions (i), (ii) et (iii) sont équivalentes. En particulier si (iii) est vérifié alors toutes les normes sur E sont équivalentes et la compacité de la sphère [resp. boule] unité de $(E, \|\cdot\|)$ résulte de la compacité de la sphère [resp. boule] unité de $(E, \|\cdot\|_\infty)$.
$(iv) \Rightarrow (v)$ On suppose que quelle que soit la norme choisie sur E, la sphère [resp. boule] unité de E pour cette norme est compacte. On sait déjà que toute partie compacte d'un espace vectoriel normé $(E, \|\cdot\|)$ est fermée et bornée. Réciproquement soit $\mathcal{C}$ une partie non vide fermée et bornée dans $(E, \|\cdot\|)$. Il existe une constante $\lambda > 0$ telle que $\|x\| \leq \lambda$ pour tout x dans $\mathcal{C}$ et pour toute suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de points de $\mathcal{C}$, la suite $\left(\frac{1}{\lambda}x_n\right)_{n\in\mathbb{N}}$ est dans la boule unité de $(E, \|\cdot\|)$, cette boule étant compacte, on peut extraire une sous-suite $\left(\frac{1}{\lambda}x_{\varphi(n)}\right)_{n\in\mathbb{N}}$ qui converge vers $y \in E$. La suite $\left(x_{\varphi(n)}\right)_{n\in\mathbb{N}}$ converge alors vers $x = \lambda y$ et $x \in \mathcal{C}$ puisque $\mathcal{C}$ est fermé. On a donc ainsi montré que $\mathcal{C}$ est compact dans $(E, \|\cdot\|)$.
$(v) \Rightarrow (i)$ On suppose que quelle que soit la norme choisie sur E, les compacts de $(E, \|\cdot\|)$ sont les fermés bornés. Si E est de dimension infinie on peut trouver un système libre infini dénombrable $\{e_n \mid n \in \mathbb{N}\}$. Pour tout entier n, on désigne par E_n le sous-espace vectoriel de E engendré par $\{e_k \mid 1 \leq k \leq n\}$. On a alors $E_p \subsetneq E_q$ pour $q > p$. De plus chaque E_n est de dimension finie dans E, donc fermé dans E et aussi dans E_{n+1}. On peut construire une suite $(x_n)_{n\geq 1}$ dans la sphère unité de $(E, \|\cdot\|)$ telle que $x_n \in E_n$ et $d(x_n, E_{n-1}) \geq \frac{1}{2}$ pour tout $n \geq 1$. Mais alors, on a :

$$\forall q > p, \quad \|x_q - x_p\| \geq d(x_q, E_{q-1}) \geq \frac{1}{2}$$

et il est impossible d'extraire de la suite $(x_n)_{n\geq 1}$ une sous-suite convergente, ce qui est en contradiction avec la compacité de la sphère unité (c'est un fermé borné) de $(E, \|\cdot\|)$. L'espace vectoriel E est donc nécessairement de dimension finie.

Remarque 2 *L'équivalence $(i) \Leftrightarrow (iv)$ est le théorème de Riesz.*

On peut donc conclure que sur un espace vectoriel de dimension finie on a une seule topologie compatible avec la structure d'espace vectoriel.

Une autre démonstration de l'équivalence des normes en dimension finie, basée sur la compacité locale de $\mathbb{R}$, peut se faire comme suit.

Exercice 25 *On désigne par E un espace vectoriel de dimension finie sur $\mathbb{R}$, par $(e_1, \cdots, e_n)$ une base de E et on note $\|\cdot\|_\infty$ la norme définie sur E par :*

$$\forall x = \sum_{i=1}^{n} x_i e_i \in E, \quad \|x\|_\infty = \max_{1\leq i\leq n} |x_i|.$$

On sait déjà que la boule unité et la sphère unité de $(E, \|\cdot\|_\infty)$ sont compactes.

1. *Montrer que pour toute norme $\|\cdot\|$ sur E l'application :*

$$\begin{array}{ccc} (E, \|\cdot\|_\infty) & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & \|x\| \end{array}$$

est continue.

2. *Montrer que toutes les normes sur E sont équivalentes.*
3. *Retrouver le fait que si $(E, \|\cdot\|)$ est un espace vectoriel normé de dimension finie et $\left(F, \|\cdot\|'\right)$ un espace vectoriel normé de dimension quelconque alors toute application linéaire de E dans F est continue.*

Solution.

1. Pour tout $x = \sum\limits_{j=1}^{n} x_j e_j$ dans E on a :

$$\|x\| \leq \beta \|x\|_\infty ,$$

où $\beta = \sum\limits_{j=1}^{n} \|e_j\| > 0$. On a donc pour x et y dans E :

$$|\|x\| - \|y\|| \leq \|x - y\| \leq \beta \|x - y\|_\infty$$

et la continuité en résulte.

2. Il suffit de montrer que toute norme $\|\cdot\|$ sur E est équivalente à $\|\cdot\|_\infty$.
On a déjà vu que pour tout $x = \sum\limits_{i=1}^{n} x_i e_i$ dans E on a :

$$\|x\| \leq \left(\sum_{j=1}^{n} \|e_j\| \right) \|x\|_\infty = \beta \|x\|_\infty .$$

On a également vu que la sphère unité

$$S_\infty = \{x \in E \mid \|x\|_\infty = 1\}$$

est compacte dans $(E, \|\cdot\|_\infty)$ et que l'application $x \mapsto \|x\|$ est continue de $(E, \|\cdot\|_\infty)$ dans $\mathbb{R}$. On peut donc poser :

$$\alpha = \inf_{x \in S_\infty} \|x\| = \lim_{n \to +\infty} \|x_n\| ,$$

où $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite de points de S_∞.
La sphère unité S_∞ étant compacte, on peut extraire de $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une sous-suite $\left(x_{\varphi(n)}\right)_{n\in\mathbb{N}}$ qui converge vers x dans S_∞. On a alors $\alpha = \|x\| > 0$.
Enfin, pour tout x dans $E - \{0\}$, on a $\left\| \dfrac{x}{\|x\|_\infty} \right\| \geq \alpha$ soit $\alpha \|x\|_\infty \leq \|x\|$. D'où l'équivalence des normes.

3. Si $(e_1, \cdots, e_n)$ est une base de E, pour toute application linéaire u de E dans F on a, pour tout $x = \sum\limits_{i=1}^{n} x_i e_i \in E$:

$$\|u(x)\|' \leq \sum_{i=1}^{n} |x_i| \|u(e_i)\|' \leq \left(\max_{1 \leq i \leq n} \|u(e_i)\|' \right) \|x\|_1 \leq \left(\max_{1 \leq i \leq n} \|u(e_i)\|' \right) \alpha \|x\|$$

(les normes $\|\cdot\|_1$ et $\|\cdot\|$ sont équivalentes, il existe donc $\alpha > 0$ tel que, pour tout x dans E, on ait $\|x\|_1 \leq \alpha \|x\|$) et la continuité de u en résulte.

Exercice 26 *Montrer qu'un espace vectoriel normé de dimension finie est complet.*

Solution. En reprenant les notations qui précèdent il suffit de montrer que $(E, \|\cdot\|_\infty)$ est complet, ce qui se déduit immédiatement du fait que $\mathbb{R}$ est complet.

Exercice 27 *Soit $(E, \|\cdot\|)$ un $\mathbb{R}$–espace vectoriel normé. L'espace vectoriel produit $E \times E$ est muni de la norme :*

$$(x, y) \longmapsto \|(x, y)\| = \max(\|x\|, \|y\|).$$

Montrer qu'une application bilinéaire $u : E \times E \to E$ est continue si et seulement si il existe une constante $\lambda > 0$ telle que $\|u(x, y)\| \leq \lambda \|x\| \|y\|$ pour tous x, y dans E.

Solution. Si l'application u est bilinéaire et continue alors $u(0, 0) = 0$ et u est continue en $(0, 0)$. Il existe donc un réel $\eta > 0$ tel que :

$$(x, y) \in E \times E,\ \|x\| \leq \eta,\ \|y\| \leq \eta \ \Rightarrow\ \|u(x, y)\| \leq 1.$$

Pour x, y dans $E - \{0\}$,on a $\left\|\frac{\eta}{\|x\|}x\right\| = \eta$ et $\left\|\frac{\eta}{\|y\|}y\right\| = \eta$, donc $\left\|u\left(\frac{\eta}{\|x\|}x, \frac{\eta}{\|y\|}y\right)\right\| \leq 1$ et avec la bilinéarité de u, on déduit que :

$$\forall (x, y) \in E \times E, \quad \|u(x, y)\| \leq \lambda \|x\| \|y\|, \tag{1.2}$$

où $\lambda = \frac{1}{\eta^2}$.

Réciproquement supposons 1.2 vérifié. Pour x_0, x, y_0 et y dans E, on a :

$$\begin{aligned} \|u(x, y) - u(x_0, y_0)\| &= \|u(x - x_0, y) + u(x_0, y - y_0)\| \\ &\leq \|u(x - x_0, y)\| + \|u(x_0, y - y_0)\| \\ &\leq \lambda (\|x - x_0\| \|y\| + \|x_0\| \|y - y_0\|), \end{aligned}$$

ce qui entraîne $\lim\limits_{(x,y)\to(x_0,y_0)} u(x, y) = u(x_0, y_0)$ et la continuité de u sur $E \times E$.

1.5 Normes matricielles

Dans ce paragraphe on se donne une norme $x \mapsto \|x\|$ sur $\mathbb{C}^n$ et on note :

$$\begin{aligned} B &= \{x \in \mathbb{C}^n \mid \|x\| \leq 1\}, \\ S &= \{x \in \mathbb{C}^n \mid \|x\| = 1\}, \end{aligned}$$

la boule unité et la sphère unité de $(\mathbb{C}^n, \|\cdot\|)$.

Exercice 28 *Montrer que l'application :*

$$A \mapsto \|A\| = \sup_{x \in S} \|Ax\|$$

définit une norme sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$.

Solution. L'égalité $\|A\| = 0$ équivaut à $\|Ax\| = 0$ pour tout x dans S. En remarquant que pour tout x dans $\mathbb{C}^n$ on a $\frac{1}{\|x\|}x \in S$ et en utilisant la linéarité de A, on déduit que $A = 0$.
La vérification des autres propriétés d'une norme ne pose pas de problèmes particuliers.

L'application :

$$A \mapsto \|A\| = \sup_{x \in S} \|Ax\|$$

est la norme matricielle induite par (ou subordonnée à) la norme vectorielle $x \longmapsto \|x\|$.

Exercice 29 *Montrer que la norme matricielle induite par $\|\cdot\|_\infty$ est définie par :*

$$\forall A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C}), \quad \|A\|_\infty = \max_{1 \le i \le n} \sum_{j=1}^n |a_{ij}|.$$

Solution. Posons

$$\alpha = \max_{1 \le i \le n} \sum_{j=1}^n |a_{ij}|.$$

Si $A = 0$ alors $\alpha = 0$ et le résultat est évident. On suppose donc A non nulle.
Pour x dans S_∞ (sphère unité de $(\mathbb{C}^n, \|\cdot\|_\infty)$), on a :

$$\|Ax\|_\infty = \max_{1 \le i \le n} \left| \sum_{j=1}^n a_{ij} x_j \right| \le \alpha.$$

Pour montrer que $\alpha \le \|A\|$, il suffit de trouver un vecteur x dans S_∞ tel que $\|Ax\|_\infty = \alpha$.Soit k compris entre 1 et n tel que $\alpha = \sum_{j=1}^n |a_{kj}|$. On pose, pour tout j compris entre 1 et n :

$$x_j = \begin{cases} \dfrac{\overline{a_{kj}}}{|a_{kj}|} \text{ si } a_{kj} \neq 0, \\ 0 \text{ si } a_{kj} = 0. \end{cases}$$

On a alors $\|Ax\|_\infty = \alpha$. En effet, comme A est non nulle il existe un indice j compris entre 1 et n tel que $a_{kj} \neq 0$, donc $\|x\|_\infty = 1$ et, en notant $y = Ax$, on a :

$$\forall i \in \{1, 2, \cdots, n\}, \quad |y_i| = \left| \sum_{j=1}^n a_{ij} x_j \right| \le \alpha,$$

avec pour $i = k$:

$$|y_k| = \left| \sum_{j=1}^n a_{kj} x_j \right| = \sum_{j=1}^n |a_{kj}| = \alpha.$$

On a donc bien $\|Ax\|_\infty = \alpha$ et $\|A\|_\infty = \alpha$.

Exercice 30 *Montrer que la norme matricielle induite par $\|\cdot\|_1$ est définie par :*

$$\forall A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C}), \quad \|A\|_1 = \|A^*\|_\infty = \max_{1 \le j \le n} \sum_{i=1}^n |a_{ij}|.$$

où A^* désigne la matrice adjointe de A.

Solution. Posons :

$$\beta = \max_{1 \leq j \leq n} \sum_{i=1}^{n} |a_{ij}| .$$

Pour x dans S_1 (sphère unité de $(\mathbb{K}^n, \|\cdot\|_1)$), on a :

$$\|Ax\|_1 = \sum_{i=1}^{n} \left| \sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j \right| \leq \sum_{j=1}^{n} |x_j| \sum_{i=1}^{n} |a_{ij}| \leq \beta \sum_{j=1}^{n} |x_j| = \beta.$$

Pour montrer que $\beta \leq \|A\|_1$, il suffit de trouver un vecteur x dans S_1 tel que $\|Ax\|_1 = \beta$. Soit k compris entre 1 et n tel que $\beta = \sum\limits_{i=1}^{n} |a_{ik}|$. Pour $x = e_k$ ($k^{\text{ème}}$ vecteur de la base canonique de $\mathbb{C}^n$) on a :

$$\|Ax\|_1 = \sum_{i=1}^{n} \left| \sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j \right| = \sum_{i=1}^{n} |a_{ik}| = \beta.$$

On a donc bien $\|A\|_1 = \beta$.

Exercice 31 *Montrer que pour toute matrice P dans $GL_n(\mathbb{C})$ l'application :*

$$x \mapsto \|x\|_P = \left\| P^{-1} x \right\|_\infty$$

définit une norme sur $\mathbb{C}^n$ et la norme matricielle induite par cette norme est définie par :

$$\forall A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C}), \quad \|A\|_P = \left\| P^{-1} A P \right\|_\infty .$$

Solution. Il est facile de vérifier que $\|\cdot\|_P$ définit une norme sur $\mathbb{K}^n$.
On peut aussi remarquer que P est la matrice de passage de la base canonique de $\mathbb{C}^n$, $\mathcal{B} = (e_1, e_2, \cdots, e_n)$ à une base $\mathcal{B}' = (e'_1, e'_2, \cdots, e'_n)$ et en notant :

$$X = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}, \quad X' = \begin{pmatrix} x'_1 \\ \vdots \\ x'_n \end{pmatrix}$$

les coordonnées du vecteur x dans les bases respectives $\mathcal{B}$ et $\mathcal{B}'$, on a :

$$\|x\|_P = \left\| P^{-1} X \right\|_\infty = \left\| X' \right\|_\infty .$$

Pour toute matrice A dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$, on a :

$$\|A\|_P = \sup_{x \in \mathbb{K}^n - \{0\}} \frac{\|Ax\|_P}{\|x\|_P} = \sup_{X \in \mathbb{K}^n - \{0\}} \frac{\left\| P^{-1} A X \right\|_\infty}{\|P^{-1} X\|_\infty},$$

soit en posant $X = PX'$:

$$\|A\|_P = \sup_{X' \in \mathbb{K}^n - \{0\}} \frac{\left\| P^{-1} A P X' \right\|_\infty}{\|X'\|_\infty} = \left\| P^{-1} A P \right\|_\infty .$$

Exercice 32 *Soit $A \longmapsto \|A\|$ une norme sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ induite par une norme $x \longmapsto \|x\|$ sur $\mathbb{C}^n$. Montrer que :*

1.
$$\forall A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C}), \ \|A\| = \sup_{x \in B} \|Ax\| = \sup_{x \in \mathbb{K}^n - \{0\}} \frac{\|Ax\|}{\|x\|}.$$

2.
$$\forall x \in \mathbb{C}, \ \forall A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C}), \ \|Ax\| \leq \|A\| \, \|x\|.$$

3.
$$\forall A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C}), \ \forall B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C}), \ \|AB\| \leq \|A\| \, \|B\|.$$

4.
$$\|I_n\| = 1.$$

5. Il existe x dans S tel que :
$$\|A\| = \|Ax\|. \|A\| = \inf \left\{ \alpha \in \mathbb{R}^+ \mid \forall x \in \mathbb{K}^n, \quad \|Ax\| \leq \alpha \|x\| \right\}.$$

Solution.

1. Résulte de l'inclusion $S \subset B$ et de la linéarité de A.
2. Se déduit facilement de 1.
3. De 2. on déduit que pour toutes matrices A, B dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ on a :
$$\forall x \in \mathbb{C}^n, \ \|ABx\| \leq \|A\| \, \|Bx\| \leq \|A\| \, \|B\| \, \|x\|.$$
D'où le résultat.
4. Pour tout x dans S on a $\|I_n x\| = \|x\| = 1$. On déduit donc que $\|I_n\| = 1$.
5. Du fait qu'en dimension finie la sphère unité est compacte et qu'une fonction continue sur un compact admet une borne supérieure qui est atteinte on déduit qu'il existe x dans S tel que $\|A\| = \|Ax\|$.
On note
$$\mathcal{D} = \left\{ \alpha \in \mathbb{R}^+ \mid \forall x \in \mathbb{C}^n, \ \|Ax\| \leq \alpha \|x\| \right\}.$$
On a $\mathcal{D} \neq \emptyset$, car $\|A\| \in \mathcal{D}$.Donc $\mathcal{D}$ admet une borne inférieure comme partie non vide et minorée de $\mathbb{R}^+$ et $\inf(\mathcal{D}) \leq \|A\|$.
Soient $\alpha \in \mathcal{D}$ et x dans S tel que $\|A\| = \|Ax\|$. On alors :
$$\|A\| = \|Ax\| \leq \alpha \|x\| = \alpha,$$
soit $\|A\| \leq \alpha$. On en déduit donc que $\|A\| \leq \inf(\mathcal{D})$ et $\|A\| = \inf(\mathcal{D})$.

La propriété 3. se traduit en disant que toute norme matricielle induite par une norme vectorielle est sous-multiplicative.

Le rayon spectral d'une matrice A est le réel :
$$\rho(A) = \max_{\lambda \in \mathrm{Sp}(A)} |\lambda|.$$

On rappelle qu'une matrice complexe A est dite normale si $A^*A = AA^*$. Une telle matrice se diagonalise dans une base orthonormée.

Exercice 33 *Montrer que si $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ est une matrice normale alors :*
$$\|A\|_2 = \rho(A).$$

Solution. Une matrice normale $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ se diagonalise dans une base orthonormée, il existe donc des scalaires $\{\lambda_1, \cdots, \lambda_n\}$ et une base orthonormée $(e_1, \cdots, e_n)$ de $\mathbb{C}^n$ tels que $Ae_k = \lambda_k e_k$ pour tout $k \in \{1, \cdots, n\}$. Pour tout $x = \sum_{k=1}^{n} x_k e_k \in \mathbb{C}^n$ tel que $\|x\|_2^2 = \sum_{k=1}^{n} |x_k|^2 = 1$, on a alors :

$$\|Ax\|_2^2 = \sum_{k=1}^{n} |x_k|^2 |\lambda_k|^2 \leq \rho(A)^2 \sum_{k=1}^{n} |x_k|^2 = \rho(A)^2 .$$

On peut donc conclure que $\|A\|_2 \leq \rho(A)$.
Si $k \in \{1, \cdots, n\}$ est tel que $\rho(A) = |\lambda_k|$, alors $\rho(A) = |\lambda_k| = \|Ae_k\|_2$ avec $\|e_k\|_2 = 1$. Donc $\|A\|_2 = \rho(A)$.

L'égalité $\|A\|_2 = \rho(A)$ est valable en particulier pour A complexe hermitienne ou unitaire et pour A réelle symétrique ou orthogonale.

Exercice 34 *Montrer que pour toute matrice $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$, on a :*

$$\|A\|_2 = \sqrt{\|A^*A\|_2} = \sqrt{\rho(A^*A)}.$$

Solution. Pour tout $x \in \mathbb{C}^n$ tel que $\|x\|_2^2 = 1$, en utilisant l'inégalité de Cauchy-Schwarz, on a :

$$\begin{array}{rcl} \|Ax\|_2^2 & = & \langle x \mid A^*Ax\rangle \leq \|x\|_2 \|A^*Ax\|_2 \\ & \leq & \|x\|_2 \|A^*A\|_2 \|x\|_2 = \|A^*A\|_2 . \end{array}$$

Ce qui entraîne $\|A\|_2^2 \leq \|A^*A\|_2 \leq \|A\|_2 \|A^*\|_2$ et $\|A\|_2 \leq \|A^*\|_2$. En appliquant cette inégalité à A^*, on obtient $\|A^*\|_2 \leq \|A\|_2$ ce qui donne :

$$\|A^*\|_2 = \|A\|_2$$

On déduit donc que :

$$\|A\|_2^2 \leq \|A^*A\|_2 \leq \|A\|_2 \|A^*\|_2 = \|A\|_2^2 ,$$

ce qui entraîne $\|A\|_2^2 = \|A^*A\|_2$. La matrice A^*A étant normale (elle est hermitienne), on a aussi $\|A^*A\|_2 = \rho(A^*A)$. Donc :

$$\|A\|_2 = \sqrt{\|A^*A\|_2} = \sqrt{\rho(A^*A)}.$$

Exercice 35 *Montrer que l'application définie sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ par :*

$$A \mapsto \|A\|_s = \sqrt{\mathrm{Tr}(A^*A)},$$

est norme (norme de Schur) et qu'elle est sous-multiplicative, c'est-à-dire que $\|AB\|_s \leq \|A\|_s \|B\|_s$ pour toutes matrices A et B appartenant à $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$.

Solution. Pour toute matrice A dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$, on a :

$$\|A\|_s = \sqrt{\mathrm{Tr}(A^*A)} = \sqrt{\sum_{i,j=1}^{n} |a_{ij}|^2},$$

c'est-à-dire que $\|\cdot\|_s$ est la norme hermitienne de $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ identifié à $\mathbb{C}^{n^2}$.
Pour toutes matrices A, B dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$, on a :

$$\|AB\|_s^2 = \mathrm{Tr}\left(B^*\left(A^*AB\right)\right) = \mathrm{Tr}\left(\left(A^*AB\right)B^*\right) = \mathrm{Tr}\left(\left(A^*A\right)\left(BB^*\right)\right)$$

et les matrices A^*A et BB^* étant hermitiennes positives, on peut utiliser le résultat de l'exercice**??** pour écrire que :

$$\|AB\|_s^2 \leq \mathrm{Tr}\left(A^*A\right)\mathrm{Tr}\left(BB^*\right) = \|A\|_s^2 \|B^*\|_s^2 = \|A\|_s^2 \|B\|_s^2 .$$

Ce qui prouve que la norme de Schur est sous-multiplicative.

Remarque 3 *On peut aussi montrer ce résultat directement en écrivant que :*

$$\|AB\|_s^2 = \sum_{i,j=1}^{n} \left|\sum_{k=1}^{n} a_{ik}b_{kj}\right|^2 \leq \sum_{i,j=1}^{n} \left(\sum_{k=1}^{n} |a_{ik}|\,|b_{kj}|\right)^2$$

et en utilisant l'inégalité de Cauchy-Schwarz :

$$\|AB\|_s^2 \leq \sum_{i,j=1}^{n} \left(\sum_{k=1}^{n} |a_{ik}|^2\right)\left(\sum_{k=1}^{n} |b_{kj}|^2\right) = \|A\|_s^2 \|B\|_s^2 .$$

Exercice 36 *Montrer que pour toute norme $A \longmapsto \|A\|$ sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ il existe une constante réelle $\lambda > 0$ telle que :*

$$\forall (A, B) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C}) \times \mathcal{M}_n(\mathbb{C}),\ \|AB\| \leq \lambda \|A\| \|B\| .$$

Solution. L'application bilinéaire $(A, B) \longmapsto AB$ est continue de $(\mathcal{M}_n(\mathbb{C}))^2$ dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ (en dimension finie toute application bilinéaire est continue), il existe donc une constante réelle$\lambda > 0$ telle que :

$$\forall (A, B) \in M_n(\mathbb{K}) \times M_n(\mathbb{K}),\ \|AB\| \leq \lambda \|A\| \|B\|$$

On peut aussi travailler tout d'abord avec une norme sous-multiplicative (par exemple$\|\cdot\|_1$) puis utiliser le théorème d'équivalence des normes sur$\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$.

Exercice 37 *Montrer que la norme de $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$, $A \mapsto \max\limits_{1\leq i,j\leq n} |a_{ij}|$ n'est pas sous-multiplicative.*

Solution. Par exemple, dans le cas $n = 2$, avec :

$$A = \begin{pmatrix} a & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} b & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix},$$

où $a > 1$, $b > 1$, on a $AB = \begin{pmatrix} ab+1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ et :

$$\|AB\| = ab + 1 > \|A\| \|B\| = ab.$$

1.6 Exercices divers

Exercice 38 *Soient $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ des réels tels que :*

$$\alpha\delta - \beta\gamma \neq 0.$$

Montrer que l'application :

$$(x, y) \mapsto \|(x, y)\| = \max\left(|\alpha x + \beta y|, |\gamma x + \delta y|\right)$$

définit une norme sur $\mathbb{R}^2$.

Solution. En notant X le vecteur de coordonnées x, y dans la base canonique de $\mathbb{R}^2$, on a :

$$\|X\| = \|AX\|_\infty$$

où $A = \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{pmatrix}$. L'hypothèse $\alpha\delta - \beta\gamma \neq 0$ se traduit par $\det(A) \neq 0$, ce qui signifie que l'application $X \mapsto AX$ réalise un isomorphisme de $\mathbb{R}^2$. On en déduit alors facilement que $\|\cdot\|$ est une norme sur $\mathbb{R}^2$.

Exercice 39 *Soient a, b deux réels fixés avec $a \neq 0$.*

1. *Justifier, pour tout $(x, y) \in \mathbb{R}^2$, l'existence de $\sup\limits_{t\in[0,1]} |(at + b)x + y|$.*
   On notera $\|(x, y)\| = \sup\limits_{t\in[0,1]} |(at + b)x + y|$.
2. *Exprimer, pour (x, y) donné dans $\mathbb{R}^2$, $\|(x, y)\|$ en fonction de x et y (on pourra étudier la fonction f^2 où $f : t \mapsto |(at + b)x + y|$).*
3. *Montrer que l'application $\|\cdot\|$ définie à la question précédente est une norme sur $\mathbb{R}^2$.*
4. *On prend $(a, b) = (1, 0)$.*
   (a) *Montrer que $\|(x, y)\| \leq 1$ équivaut à $-1 \leq y \leq$ et $-1 \leq x + y \leq 1$.*
   (b) *Dessiner la boule unité fermée de centre 0 correspondante.*

Solution.

1. L'application $f : t \mapsto |(at + b)x + y|$ est continue sur le compact $[0, 1]$, donc $\|\cdot\|$ est bien définie sur $\mathbb{R}^2$.
2. Pour tout $t \in [0, 1]$, on a :

$$\begin{aligned} f^2(t) &= ((at + b)x + y)^2 = (at + b)^2 x^2 + 2y(at + b)x + y^2 \\ &= a^2x^2t^2 + 2\left(abx^2 + axy\right)t + b^2x^2 + 2bxy + y^2 \end{aligned}$$

   c'est-à-dire que f^2 est la fonction constante égale à y^2 si $x = 0$ ou une fonction polynomiale de degré 2 à valeurs positives si $x \neq 0$. Dans tous les cas, on a :

$$\begin{aligned} \sup_{t\in[0,1]} f^2(t) = \max\left(f^2(0), f^2(1)\right) &= \max\left((bx + y)^2, ((a + b)x + y)^2\right) \\ &= \left(\max\left(|bx + y|, |(a + b)x + y|\right)\right)^2 \end{aligned}$$

   soit :

$$\|(x, y)\| = \sup_{t\in[0,1]} f(t) = \max\left(|bx + y|, |(a + b)x + y|\right).$$

3. On peut remarquer que :

$$\|(x,y)\| = \|(bx+y,(a+b)\,x+y)\|_\infty$$

l'application linéaire :

$$(x,y) \mapsto (bx+y,(a+b)\,x+y)$$

réalisant un isomorphisme de $\mathbb{R}^2$ puisque :

$$\det\begin{pmatrix} b & 1 \\ a+b & 1 \end{pmatrix} = a \neq 0.$$

Il en résulte que $\|\cdot\|$ définit une norme sur $\mathbb{R}^2$.

4.
   (a) Pour $(a,b) = (1,0)$, la condition $\|(x,y)\| \leq 1$ équivaut à

   $$\max(|y|,|x+y|)$$

   ou encore à $-1 \leq y \leq$ et $-1 \leq x+y \leq 1$.

   (b) Ce qui permet de dessiner la boule unité.

Exercice 40 *Soient a,b deux réels strictement positifs. Pour tout $u=(x,y) \in \mathbb{R}^2$, on note :*

$$\|u\| = \sqrt{a^2x^2+b^2y^2}.$$

1. *Montrer que $\|\cdot\|$ est une norme sur $\mathbb{R}^2$.*
2. *Dessiner la boule unité pour cette norme.*
3. *Déterminer le plus petit réel $\alpha > 0$ tel que :*

   $$\forall u \in \mathbb{R}^2,\ \|u\| \leq \alpha \|u\|_2,$$

   où $\|\cdot\|_2$ désigne la norme euclidienne sur $\mathbb{R}^2$.
4. *Déterminer le plus grand réel $\beta > 0$ tel que :*

   $$\forall u \in \mathbb{R}^2,\ \|u\| \geq \beta \|u\|_2.$$

Solution.

1. $\|u\| = \|(ax,by)\|_2$.
2. Une ellipse.
3. $\|u\| \leq \max(a,b)\,\|u\|_2 = \alpha\,\|u\|_2$ et égalité pour $u=(1,0)$ ou $u=(0,1)$.

Exercice 41 *Le but de cet exercice est de montrer le théorème fondamental de l'algèbre : tout polynôme complexe non constant a au moins une racine.*
On se donne un polynôme $P(z) = \sum_{k=0}^{n} a_k z^k$ de degré $n \geq 1$ avec $a_n = 1$.

1. *Montrer que $\lim_{|z| \to +\infty} |P(z)| = +\infty$.*
2. *Montrer qu'il existe $z_0 \in \mathbb{C}$ tel que $|P(z_0)| = \inf_{z \in \mathbb{C}} |P(z)|$.*

3. *On suppose que* $P(z_0) \neq 0$ *et on définit le polynôme* Q *par* $Q(z) = \dfrac{P(z+z_0)}{P(z_0)}$.

   (a) *Montrer que :*
   $$\forall z \in \mathbb{C}, \ |Q(z)| \geq 1.$$

   (b) *Montrer qu'il existe un entier* p *compris entre* 1 *et* n *et une fonction* ε *définie sur* $\mathbb{C}$ *tels que* $b_p \neq 0$, $\lim\limits_{z \to 0} \varepsilon(z) = 0$ *et* $Q(z) = 1 + b_p z^p (1 + \varepsilon(z))$.

   (c) *Justifier l'existence d'un réel* $r > 0$ *tel que* $|\varepsilon(z)| < \dfrac{1}{2}$ *pour tout* $z \in \mathbb{C}$ *tel que* $|z| < r$.

   (d) *On note* $b_p = r_p e^{i\theta_p}$ *avec* $r_p > 0$ *et* $0 \leq \theta_p < 2\pi$.

      i. *Montrer que pour tout* $z = \rho e^{-i\frac{\theta_p+\pi}{p}}$ *avec* $0 < \rho < r$, *on a :*
      $$|Q(z)| \leq |1 - r_p \rho^p| + \frac{1}{2} r_p \rho^p.$$

      ii. *En déduire qu'il existe* $z_1 \in \mathbb{C}$ *tel que* $|Q(z_1)| < 1$.

      iii. *Conclure.*

Solution.

1. Pour tout $z \in \mathbb{C}^*$, on a :
$$|P(z)| = |z|^n \left| \frac{a_0}{z^n} + \cdots + \frac{a_{n-1}}{z} + 1 \right|$$
avec $\lim\limits_{|z| \to +\infty} \left| \dfrac{a_{n-k}}{z^k} \right| = 0$ pour $k = 1, \cdots, n$. D'où le résultat.

2. De $\lim\limits_{|z| \to +\infty} |P(z)| = +\infty$, on déduit qu'il existe $R > 0$ tel que :
$$|z| > R \Rightarrow |P(z)| > |P(0)|$$
Su le compact $K = \{|z| \leq R\}$, la fonction continue $|P|$ est minorée et atteint sa borne inférieure, il existe donc $z_0 \in K$ tel que $|P(z_0)| = \inf\limits_{z \in K} |P(z)|$. On a alors, pour tout $z \in \mathbb{C}$, soit $z \in K$ et $|P(z)| \geq |P(z_0)|$, soit $z \notin K$, donc $|z| > R$ et $|P(z)| > |P(0)| \geq |P(z_0)|$. Dans tous les cas, $|P(z)| \geq |P(z_0)|$ et $|P(z_0)| = \inf\limits_{z \in \mathbb{C}} |P(z)|$.

3.

   (a) Résulte de :
   $$\forall z \in \mathbb{C}, \ |P(z+z_0)| \geq |P(z_0)|.$$

   (b) On a $Q \in \mathbb{C}[z]$ avec $Q(0) = 1$ et $\deg(Q) = n$, donc :
   $$Q(z) = 1 + b_p z^p + \cdots + b_n z^n$$
   avec $1 \leq p \leq n$ et $b_p \neq 0$, ce qui s'écrit :
   $$Q(z) = 1 + b_p z^p (1 + \varepsilon(z))$$
   avec $\lim\limits_{z \to 0} \varepsilon(z) = 0$.

   (c) Par définition de la limite nulle.

   (d)

i. Pour $z = \rho e^{-i\frac{\theta_p + \pi}{p}}$, on a :

$$\begin{aligned} |Q(z)| &= |1 + b_p z^p (1 + \varepsilon(z))| \\ &\leq |1 + b_p z^p| + r_p \rho^p |\varepsilon(z)| \end{aligned}$$

Si de plus $\rho = |z| < r$, alors $|\varepsilon(z)| < \dfrac{1}{2}$ et :

$$|Q(z)| \leq |1 + b_p z^p| + r_p \rho^p \frac{1}{2}$$

avec :

$$b_p z^p = r_p e^{i\theta_p} \left(\rho e^{-i\frac{\theta_p + \pi}{p}} \right)^p = r_p \rho^p e^{-i\pi} = -r_p \rho^p.$$

ii. On a $\lim\limits_{\rho \to 0} (1 - r_p \rho^p) = 1$, donc $1 - r_p \rho^p > 0$ pour ρ assez petit et pour un tel choix :

$$|Q(z)| \leq 1 - r_p \rho^p + \frac{1}{2} r_p \rho^p = 1 - \frac{1}{2} r_p \rho^p < 1.$$

iii. C'est contradictoire avec $|Q(z)| \geq 1$. Donc $P(z_0) = 0$ et le théorème de d'Alembert-Gauss est démontré.