Agrégation Interne

Agrégation interne 1991, épreuve 2

1 Énoncé

Première Partie - Résolution d'une équation différentielle

Soit l'équation différentielle

$$3\left(x^2+x\right)y''+(8x+3)\,y'+2y=0, \tag{E0}$$

dans laquelle y désigne une fonction inconnue de la variable réelle x.

1. Rechercher pour $(E0)$ une solution développable en série entière autour de 0 et vérifiant la condition $y(0)=1$. On précisera l'intervalle I sur lequel la fonction f obtenue est solution de $(E0)$.
2. Exprimer f à l'aide des fonctions usuelles. On remarquera que f est la restriction à I d'une fonction $x\mapsto(1+x)^{\alpha}$ pour un choix convenable de α.
3. En exploitant les résultats précédents, déterminer toutes les solutions de $(E0)$. On en donnera l'expression au moyen des fonctions usuelles.

Deuxième partie - Comparaison d'une série et d'une intégrale

Dans cette partie, $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ désigne une suite de nombres complexes et $(S_n)_{n\in\mathbb{N}}$ désigne la. suite de ses sommes partielles :

$$S_0=0,\quad \forall n\geq 1,\quad S_n=u_0+u_1+\cdots+u_{n-1}.$$

On suppose dans les questions II. 1°) à II 4°) que $\sum\limits_{n=0}^{+\infty}u_n$ converge.

1. Prouver que, si une suite $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de nombres complexes est convergente. alors le rayon de convergence de la. série entière $\sum\limits_{n=0}^{+\infty}\frac{a_nz^n}{n!}$ est $+\infty$.
   En déduire que, pour tout $x\in\mathbb{R}$,
   $$\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{u_nx^n}{n!}\ \text{et}\ \sum_{n=0}^{+\infty}\frac{S_nx^n}{n!}$$
   convergent.
2. On pose, pour tout $x\in\mathbb{R}$, $B(x)=e^{-x}\sum\limits_{n=0}^{+\infty}\frac{S_nx^n}{n!}$. Justifier la dérivabilité de la fonction B et prouver que l'on a
   $$B(x)=\int_0^x e^{-t}\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{u_nt^n}{n!}dt.$$
3. Soit $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de nombres complexes. convergente et de limite L. Prouver que l'on a
   $$\lim_{x\to+\infty}\left[e^{-x}\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{a_nx^n}{n!}\right]=L.$$
   (a) Dans le cas $L=0$ d'abord.
   (b) Etendre la propriété au cas L quelconque.
4. Prouver l'égalité
   $$\sum_{n=0}^{+\infty}u_n=\int_0^{\infty}e^{-t}\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{u_nt^n}{n!}dt.$$
5. On suppose, dans cette question, la série $\sum\limits_{n=0}^{+\infty}u_n$ divergente. Prouver que l'intégrale $\int_0^{\infty}e^{-t}\sum\limits_{n=0}^{+\infty}\frac{u_nt^n}{n!}dt$ peut cependant avoir un sens. On pourra utiliser à cet effet une suite géométrique.
   La suite du problème consiste à montrer par l'étude d'un exemple que, lorsqu'on connaît une solution d'une équation différentielle sous forme d'une série entière :
   $$x\mapsto\sum_{n=0}^{+\infty}a_nx^n$$

admettant un certain rayon de convergence R, il peut se produire que, pour certaines valeurs de x supérieures à R, l'intégrale $\int_0^{\infty} e^{-t} \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{a_n x^n t^n}{n!} dt$ converge et fournisse un prolongement de la solution initialement obtenue.

Troisième partie

Soit l'équation différentielle

$$3\left(x^2+x\right)y''+(7x+2)\,y'+y=0, \tag{E}$$

dans laquelle y désigne une fonction numérique inconnue de la variable réelle x.

1. Soit $x_0>0$ et soit $(y_0,y_1)\in\mathbb{R}^2$ quelconques. Justifier l'existence et l'unicité d'une solution f de l'équation (E) sur l'intervalle $]0,+\infty[$, vérifiant les conditions

$$f(x_0)=y_0,\quad f'(x_0)=y_1.$$

2. Rechercher pour (E) une solution développable en série entière autour de 0, et telle que $y(0)=1$.
   On notera $F(x)=\sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$ la solution obtenue, dont on précisera le rayon de convergence.

3. On pose pour tout x réel $G(x)=\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{a_n x^n}{n!}$. Légitimer la définition de G et vérifier que G est solution sur $\mathbb{R}$ de l'équation différentielle

$$3xy''+(3x+2)\,y'+y=0. \tag{E1}$$

4. Prouver que l'on a, pour tout $x\in\,]-1,1[$,

$$F(x)=\int_0^{+\infty} e^{-t}G(xt)\,dt.$$

Quatrième partie. - Etude d'une suite de fonctions

1. Montrer que l'application N, de $\mathbb{R}^2$ vers $\mathbb{R}$, définie par

$$\forall (X,Y)\in\mathbb{R}^2,\quad N(X,Y)=\left(X^2+\frac{1}{2}Y^2\right)^{\frac{1}{2}}$$

   est une norme sur $\mathbb{R}^2$.
   Dans toute la suite, si $V=(X,Y)$ est un élément de $\mathbb{R}^2$, on utilisera les notations $N(X,Y)=\|V\|$ ou $N(X,Y)=\|(X,Y)\|$.

2. A tout réel t non nul, on associe l'endomorphisme L_t de $\mathbb{R}^2$ dont la matrice relativement à la base canonique est donnée par

$$A(t)=\begin{pmatrix} -\frac{2}{3t} & \frac{1}{4} \\ 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

   Soit k un réel strictement supérieur à $\frac{1}{\sqrt{2}}$. Montrer qu'il existe un réel t_0 strictement positif tel que

$$\forall t\geq t_0,\quad \forall (X,Y)\in\mathbb{R}^2,\quad \|L_t(X,Y)\|\leq k\,\|(X,Y)\|\,.$$

   Dans les questions suivantes, k et t_0 sont fixés ainsi.

3. Soit $V_0=(a,b)$ un élément de $\mathbb{R}^2$. On lui associe la suite des fonctions $(Z_n)_{n\in\mathbb{N}}$, définies sur l'intervalle $[t_0,+\infty[$ et à valeurs dans $\mathbb{R}^2$, par les relations suivantes :

$$\forall t\in[t_0,+\infty[\,,\quad Z_0(t)=V_0\ ;\quad \forall n\in\mathbb{N},\quad Z_n=(X_n,Y_n)\,,$$

$$\forall n\in\mathbb{N},\forall t\in[t_0,+\infty[\,,\quad X_{n+1}(t)=a+\int_{t_0}^{t}\left[-\frac{2}{3\lambda}X_n(\lambda)+\frac{1}{4}Y_n(\lambda)\right]d\lambda,$$
$$Y_{n+1}(t)=b+\int_{t_0}^{t}X_n(\lambda)\,d\lambda.$$

   Prouver que $\forall t\geq t_0$,

$$\|Z_1(t)-Z_0(t)\|\leq k\,(t-t_0)\,\|V_0\|$$

   et que

$$\forall n\geq 1,\quad \forall t\geq t_0,\quad \|Z_{n+1}(t)-Z_n(t)\|\leq k\int_{t_0}^{t}\|Z_n(\lambda)-Z_{n-1}(\lambda)\|\,d\lambda.$$

4. En déduire que, $\forall t \geq t_0$, $\forall p \in \mathbb{N}$, $\forall n \in \mathbb{N}$, $n > p$, on a

$$\|Z_n(t) - Z_p(t)\| \leq \|V_0\| \sum_{m=p+1}^{n} \frac{k^m (t-t_0)^m}{m!}$$

et que la suite $(Z_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge uniformément sur tout intervalle $[t_0, t_1]$ pour $t_1 \in]t_0, +\infty[$, on désigne par Z sa limite.

Cinquième partie

1. Effectuer dans $(E1)$ le changement de fonction inconnue

$$y(x) = z(x) \exp\left(-\frac{x}{2}\right).$$

On appellera $(E2)$ l'équation différentielle obtenue, dont z est la fonction inconnue.

2. Soit l'équation $(E3)$, dont l'inconnue est une fonction de $\mathbb{R}^{+*}$ vers $\mathbb{R}^2$

$$t \mapsto \begin{pmatrix} X(t) \\ Y(t) \end{pmatrix},$$

$$\begin{pmatrix} X'(t) \\ Y'(t) \end{pmatrix} = A(t) \begin{pmatrix} X(t) \\ Y(t) \end{pmatrix}, \tag{E3}$$

où $A(t)$ désigne la matrice définie en IV 2°).
Soit $t_0 > 0$ et $(a, b) \in \mathbb{R}^2$. Justifier l'existence et l'unicité d'une solution de $(E3)$, sur l'intervalle $]0, +\infty[$ satisfaisant aux conditions $X(t_0) = a$, $Y(t_0) = b$.

3. On reprend les notations de la partie IV. Montrer que, sur l'intervalle $[t_0, +\infty[$, la fonction Z est solution de $(E3)$.

4. En utilisant ce qui précède, déterminer pour toute solution sur l'intervalle $]0, +\infty[$ de $(E1)$ une fonction de type exponentiel la majorant au voisinage de $+\infty$. On commencera par comparer les solutions de $(E2)$ et de $(E3)$.

5. Prouver que, pour $x \in \left[1, 2 + 2\sqrt{2}\right[$ l'intégrale figurant dans l'égalité de la question 4. de la troisième partie, a un sens.

6. Prouver que, pour tous x_1, x_2 tels que $0 < x_1 < x_2 < 2 + \sqrt{2}$, il existe $\delta > 0$, $t_1 > 0$, $t_2 > 0$, M_1, M_2 tels que :

$$\begin{array}{lll} \forall x \in [x_1, x_2], & \forall t \geq t_1, & e^{-t} |G'(xt)| \leq M_1 e^{-\delta t}, \\ \forall x \in [x_1, x_2], & \forall t \geq t_2, & e^{-t} |G''(xt)| \leq M_2 e^{-\delta t}. \end{array}$$

Prouver alors que :

$$x \mapsto \int_0^{+\infty} e^{-t} G(xt)\, dt$$

est solution de (E) sur $\left]-1, 2 + 2\sqrt{2}\right[$.