Équations différentielles linéaires

–I – Équations différentielles linéaires du premier ordre

I est un intervalle réel d'intérieur non vide et a, b deux fonctions continues de I dans $\mathbb{R}$ (ou dans $\mathbb{C}$). On s'intéresse à l'équation différentielle linéaire du premier ordre :

$$y' = ay + b. \tag{1}$$

On associe à cette équation différentielle, l'équation homogène :

$$y' = ay. \tag{2}$$

On se fixe un point x_0 de I et on désigne par A la primitive de a nulle en x_0, soit pour tout $x \in I$:

$$A(x) = \int_{x_0}^{x} a(t)\, dt$$

La représentation graphique d'une solution de (1) est appelée courbe intégrale de l'équation différentielle.

1. Montrer, sans utiliser la fonction exponentielle ni le théorème de Cauchy-Lipschitz, qu'une solution définie sur $\mathbb{R}$ et non identiquement nulle de l'équation différentielle $y' = y$ ne s'annule jamais.
2. Montrer que l'ensemble des solutions sur l'intervalle I de l'équation différentielle (2) est non vide et qu'il est formé des fonctions y définies sur I par :
$$\forall x \in I,\ y(x) = \lambda e^{A(x)}$$
où λ une constante réelle (l'ensemble des solutions de (2) est un espace vectoriel de dimension 1 engendré par la solution particulière e^A).
On en déduit qu'une solution de (2) ne s'annule jamais sur I et garde un signe constant.
3. Montrer que l'ensemble des solutions sur l'intervalle I de l'équation différentielle (1) est non vide et qu'il est formé des fonctions y définies sur I par :
$$\forall x \in I,\ y(x) = e^{A(x)} \int_{x_0}^{x} b(t)\, e^{-A(t)} dt + \lambda e^{A(x)}$$
où λ une constante réelle.
4. Montrer que pour tout $x_0 \in I$ et $y_0 \in \mathbb{R}$, l'équation différentielle $y' = ay + b$ admet une unique solution qui vérifie la condition initiale $y(x_0) = y_0$ (c'est un cas particulier du théorème de Cauchy-Lipschitz).
5. On se fixe un point $x_0 \in I$. Montrer que les tangentes aux courbes intégrales de (1) en x_0 sont parallèles ou concourantes.
6. Traiter le cas où la fonction a est constante et le second membre est de la forme $b(x) = P(x)\, e^{\alpha x}$, la fonction P étant polynomiale de degré $n \geq 0$ et α une constante réelle (ou complexe).
7. Traiter le cas où la fonction a est constante et le second membre b est de la forme $b(x) = P(x)\, e^{\alpha x} + Q(x)\, e^{\beta x}$, les fonctions P, Q étant polynomiales et α, β étant des constantes réelles (ou complexes) distinctes (ou b est une somme de $p \geq 2$ fonctions de la forme $P(x)\, e^{\alpha x}$).
8. Résoudre l'équation différentielle $y' + 2y = b$, où b est la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par :
$$b(x) = \begin{cases} 1 - |x| \text{ si } |x| \leq 1 \\ 0 \text{ si } |x| > 1 \end{cases}$$

9. On se donne deux scalaires a, b et on s'intéresse à l'équation différentielle linéaire homogène d'ordre 2 sur $\mathbb{R}$:
$$y'' = ay' + by. \tag{3}$$
Résoudre cette équation différentielle en se ramenant à une équation différentielle d'ordre 1.

10. On s'intéresse à l'équation différentielle :
$$y'' + 2xy' + \left(x^2 - 1\right) y = 0$$
sur $\mathbb{R}$.
On désigne par φ l'endomorphisme de $E = \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}, \mathbb{C})$ défini par :
$$\forall y \in E,\ \varphi(y) = y' + xy \tag{4}$$
Déterminer les valeurs propres et vecteurs propres de φ et φ^2, puis en déduire les solutions de (4).

11. Montrer que si f est une fonction de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[0,1]$ telle que :
$$\begin{cases} f(0) = 1 \\ \forall x \in [0,1],\ f'(x) \leq 2f(x) + 1 \end{cases}$$
on a alors :
$$\forall x \in [0,1],\ f(x) \leq \frac{3}{2}e^{2x} - \frac{1}{2}.$$

12. On se fixe $x_0 \in I$, $y_0 \in \mathbb{R}$ et on suppose que f est une fonction de classe $\mathcal{C}^1$ sur I telle que :
$$\begin{cases} f(x_0) \leq y_0 \\ \forall x \in [0,1],\ f'(x) \leq a(x) f(x) + b(x) \end{cases}$$
On dit que f est une barrière inférieure de l'équation différentielle (1) sur l'intervalle I.
Montrer que :
$$\forall x \in I \cap [x_0, +\infty[,\ f(x) \leq e^{A(x)} \int_{x_0}^{x} b(t) e^{-A(t)} dt + y_0 e^{A(x)}.$$

13. Soient f la solution sur $\mathbb{R}$ de l'équation différentielle $y' + 2xy = 1$ vérifiant la condition initiale $y(0) = 0$ et $\mathcal{D}$ l'ensemble des réels a strictement positifs tels que $f'(a) = 0$.
    (a) Donner une expression intégrale de f.
    (b) Montrer que :
    $$\forall x \geq 0,\ 1 - e^{-x^2} \leq 2xf(x).$$
    (c) Montrer que :
    $$\forall x \geq 2,\ \int_2^x \frac{e^{t^2}}{t^4} dt < \frac{e^{x^2}}{x^3}.$$
    (d) Montrer que $f(x)$ est équivalent à $\frac{1}{2x}$ au voisinage de l'infini.
    (e) Montrer que $\mathcal{D}$ n'est pas vide.
    (f) Montrer qu'en tout point de $\mathcal{D}$, la fonction f admet un maximum local strict.
    (g) Montrer que $\mathcal{D}$ est réduit à un point et que la fonction f admet en ce point un maximum global strict.

14. On désigne par α un réel strictement positif et φ une fonction continue de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$.

(a) Donner la forme générale des solutions y de l'équation différentielle :

$$y' + \alpha y = \varphi \tag{5}$$

(b) Montrer si $\lim\limits_{x \to +\infty} \varphi(x) = \ell$, on a alors $\lim\limits_{x \to +\infty} y(x) = \dfrac{\ell}{\alpha}$ pour toute solution y sur $\mathbb{R}$ de (5).

(c) Montrer que si f est une fonction continûment dérivable de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ telle que :

$$\lim_{x \to +\infty} (f'(x) + \alpha f(x)) = \ell$$

on a alors $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = \dfrac{\ell}{\alpha}$.

(d) Montrer que si l'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty} \varphi(t)\, dt$ est absolument convergente, il en est de même de $\displaystyle\int_0^{+\infty} y(t)\, dt$ pour toute solution y sur $\mathbb{R}$ de (5) et exprimer $\displaystyle\int_0^{+\infty} y(t)\, dt$ en fonction de $\displaystyle\int_0^{+\infty} \varphi(t)\, dt$.

15. On désigne par α un réel strictement positif et φ une fonction continue de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ telle que $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} \varphi(t)\, dt$ soit absolument convergente

(a) Donner la forme générale des solutions y de l'équation différentielle :

$$y' - \alpha y = \varphi \tag{6}$$

(b) Montrer (6) admet une unique solution f bornée sur $\mathbb{R}$.

(c) Montrer que l'intégrale $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\, dt$ est absolument convergente et exprimer $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\, dt$ en fonction de $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} \varphi(t)\, dt$.

16. En étudiant l'équation différentielle :

$$x^2 y' - y = 0. \tag{7}$$

sur $\mathbb{R}$, montrer que le résultat de 4 n'est pas valable. Pourquoi ?

17. Étudier les équations différentielles sur $\mathbb{R}$:

(a)

$$xy' + y = x^n \tag{8}$$

où n est un entier naturel non nul

(b) et

$$xy' - ny = x^{n+1} \tag{9}$$

où n est un entier naturel supérieur ou égal à 2.

18. On suppose ici que les fonctions a et b sont périodiques sur $\mathbb{R}$ de même période $T > 0$, la fonction b n'étant pas identiquement nulle.

(a) Montrer qu'une solution y de (1) est T-périodique si, et seulement si, $y(0) = y(T)$.

(b) Montrer que si l'équation homogène $y' = ay$ a une solution non identiquement nulle qui est non T-périodique (ce qui équivaut à $\int_0^T a(t)\,dt \neq 0$) il existe alors une unique solution T-périodique de (1).

(c) On suppose que l'équation homogène $y' = ay$ a une solution T-périodique non identiquement nulle. Montrer que l'équation (1) a des solutions T-périodiques si, et seulement si, $\int_0^T b(t)\,e^{-A(t)}dt = 0$, où A est la primitive de a nulle en 0.

19. On suppose ici que les fonctions a et b sont développables en série entière sur $]-R, R[$ avec $0 < R \leq +\infty$ et :

$$a(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n,\ b(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} b_n x^n$$

et on s'intéresse au problème de Cauchy :

$$\begin{cases} y' = ay + b \\ y(0) = y_0 \end{cases} \tag{10}$$

sur $I = \,]-R, R[$.

(a) En supposant qu'il existe une fonction f solution de (10) qui est développable en série entière sur $]-R, R[$ avec :

$$f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} c_n x^n$$

montrer que les coefficients c_n sont uniquement déterminés.

(b) On désigne par $(c_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite numérique définie par la relation de récurrence :

$$\begin{cases} c_0 = y_0 \\ \forall n \geq 0,\ (n+1)\,c_{n+1} = \sum\limits_{k=0}^{n} a_k c_{n-k} + b_n \end{cases}$$

on se fixe un réel r dans $]0, R[$, on note :

$$A(r) = \sum_{n=0}^{+\infty} |a_n|\,r^n,\ B(r) = \sum_{n=0}^{+\infty} |b_n|\,r^n$$

on désigne par $n(r)$ un entier naturel tel que :

$$\forall n \geq n(r),\ \frac{r\,(A(r) + B(r))}{n+1} \leq 1$$

et on note :

$$M(r) = \max\left(\max_{0\leq k\leq n(r)} |c_k|\,r^k, 1\right)$$

i. Montrer que :

$$\forall n \geq 0,\ |c_n| \leq \frac{M(r)}{r^n}$$

ii. En déduire que le rayon de convergence de la série $\sum c_n x^n$ est au moins égal à R, puis que la fonction f définie par $f(x) = \sum\limits_{n=0}^{+\infty} c_n x^n$ sur l'intervalle $]-R, R[$ est l'unique solution de (10).

Pour les équations différentielles d'ordre 1 non linéaires, on a le résultat suivant.

Si U une partie ouverte de $\mathbb{R}\times\mathbb{R}^m$ et f une application de U dans $\mathbb{R}^m$, on dit alors qu'une fonction $u : I \to \mathbb{R}^m$ est une solution de l'équation différentielle :

$$x' = f(t,x) \tag{11}$$

si :

- I est un intervalle non trivial (ni vide, ni réduit à un point) de la droite réelle $\mathbb{R}$;
- u est une application dérivable de I dans $\mathbb{R}^m$;
- pour tout $t \in I$, on a $(t, u(t)) \in U$ et $u'(t) = f(t, u(t))$.

Si $u_1 : I_1 \to \mathbb{R}^m$ et $u_2 : I_2 \to \mathbb{R}^m$ sont deux solutions de (11), on dit alors que u_1 est une restriction de u_2 si $I_1 \subset I_2$ et si, pour tout $t \in I_1$, on a $u_1(t) = u_2(t)$. On dit aussi que u_2 est un prolongement de u_1, ou encore que u_2 prolonge u_1.

Une solution de (11) est dite maximale si elle n'admet pas d'autre prolongement qu'elle même.

On dit que l'application f est localement lipschitzienne en x si, pour tout point (t_0, x_0) de U, il existe deux nombres réels $\varepsilon > 0$ et $k > 0$ tels que :

- l'ensemble $C = [t_0 - \varepsilon, t_0 + \varepsilon] \times \mathcal{B}_f(x_0, \varepsilon)$ est inclus dans U ;
- si (t, x_1) et (t, x_2) sont deux points de C, on a :

$$\|f(t,x_1) - f(t,x_2)\| \leq k\,\|x_1 - x_2\|.$$

Par exemple, une fonction $f \in \mathcal{C}^n(U, \mathbb{R}^m)$ est localement lipschitzienne en x.

Théorème 1 (Cauchy-Lipschitz) *Soient U une partie ouverte de $\mathbb{R}\times\mathbb{R}^m$, $f \in \mathcal{C}^0(U, \mathbb{R}^m)$ une fonction localement lipschitzienne en x, (t_0, x_0) un point de U ; alors :*

- *l'équation différentielle (E) admet une solution maximale unique $u : I \to \mathbb{R}^m$ satisfaisant à $u(t_0) = x_0$;*
- *son ensemble de départ I est un intervalle ouvert de $\mathbb{R}$;*
- *toute solution v de (E) telle que $v(t_0) = x_0$ est une restriction de u.*

– II – Équations différentielles linéaires d'ordre n à coefficients constants

On s'intéresse tout d'abord aux équations différentielles linéaires, homogènes (ou sans second membre), d'ordre $n \geq 1$ à coefficients constants sur $I = \mathbb{R}$:

$$y^{(n)} = a_{n-1}y^{(n-1)} + \cdots + a_0 y \tag{12}$$

où les a_k sont des scalaires donnés.

On note D l'opérateur de dérivation qui associe à toute fonction $y \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}, \mathbb{C})$ sa dérivée. Cet opérateur est un endomorphisme de $\mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}, \mathbb{C})$ et on peut définir ses itérés D^k par $D^0 = I_d$ et $D^{k+1} = D^k \circ D$ pour tout $k \in \mathbb{N}$ (pour tout $y \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}, \mathbb{C})$, on a $D^k(y) = y^{(k)}$). À tout polynôme $Q(X) = \sum\limits_{k=0}^{q} q_k X^k$ dans $\mathbb{C}[X]$ on peut associer l'opérateur différentiel $Q(D) = \sum\limits_{k=0}^{q} q_k D^k$ et il est facile de vérifier que si P, Q sont deux polynômes alors $P(D) \circ Q(D) = Q(D) \circ P(D) = (PQ)(D)$.

Le polynôme :

$$P(X) = X^n - \sum_{k=0}^{n-1} a_k X^k$$

est le polynôme caractéristique de (12) et l'ensemble S des solutions de cette équation différentielle est $\ker(P(D))$. C'est donc un espace vectoriel.

En notant $\lambda_1, \cdots, \lambda_p$ les racines complexes deux à deux distinctes de multiplicités respectives $m_1, \cdots, m_p$ de P, on a $P(X) = \prod\limits_{k=1}^{p} (X - \lambda_k)^{m_k}$ et $P(D) = \prod\limits_{k=1}^{p} (D - \lambda_k I_d)^{m_k}$.

1. Avec les notations qui précèdent, montrer que :

$$S = \ker\left(P\left(D\right)\right) = \bigoplus_{k=1}^{p} \ker\left(\left(D - \lambda_k I_d\right)^{m_k}\right).$$

2. Soient λ un nombre complexe et m un entier naturel non nul. Montrer que les solutions sur $\mathbb{R}$ de l'équation différentielle :

$$\left(D - \lambda I_d\right)^{m}\left(y\right) = 0$$

forment un espace vectoriel de dimension m engendré par les fonctions :

$$y_k : x \mapsto x^k e^{\lambda x} \quad \left(0 \leq k \leq m-1\right).$$

3. En déduire que les solutions définies sur $\mathbb{R}$ et à valeurs complexes de l'équation différentielle (12) sont de la forme

$$x \mapsto y\left(x\right) = \sum_{k=1}^{p} e^{\lambda_k x} P_k\left(x\right),$$

où, pour tout k compris entre 1 et p, P_k est une fonction polynomiale à coefficients complexes de degré inférieur ou égal à $m_k - 1$, ce qui revient à dire que l'ensemble S des solutions de cette équation est un $\mathbb{C}$-espace vectoriel de dimension n engendré par les fonctions :

$$x \mapsto x^j e^{\lambda_k x} \quad \left(1 \leq k \leq p,\ 0 \leq j \leq m_k - 1\right)$$

4. On suppose ici que les coefficients a_k sont réels et on note $\alpha_1, \cdots, \alpha_r$ les racines réelles distinctes de P (s'il en existe) et $\alpha_{r+1} \pm i\beta_{r+1}, \cdots, \alpha_s \pm i\beta_s$ les racines complexes non réelles (s'il en existe) de P, les β_j étant tous non nuls.
Montrer que les solutions définies sur $\mathbb{R}$ et à valeurs réelles de l'équation différentielle (12) sont de la forme

$$y\left(x\right) = \sum_{k=1}^{r} e^{\alpha_k x} P_k\left(x\right) + \sum_{k=r+1}^{s} e^{\beta_k x} \cos\left(\gamma_k x\right) P_k\left(x\right) + \sum_{k=r+1}^{s} e^{\beta_k x} \sin\left(\gamma_k x\right) Q_k\left(x\right),$$

où, pour tout k compris entre 1 et r, P_k est une fonction polynomiale à coefficients réels de degré inférieur ou égal à $m_k - 1$ et pour tout k compris entre $r+1$ et s, P_k et Q_k sont des fonctions polynomiales à coefficients réels de degré inférieur ou égal à $m_k - 1$, ce qui revient à dire que l'ensemble S des solutions réelles de cette équation est un $\mathbb{R}$-espace vectoriel de dimension n engendré par les fonctions :

$$\left\{ \begin{array}{l} x^j e^{\alpha_k x},\ \left(1 \leq k \leq r,\ 0 \leq j \leq m_k - 1\right) \\ x^j e^{\beta_k x} \cos\left(\gamma_k x\right),\ x^j e^{\beta_k x} \sin\left(\gamma_k x\right),\ \left(r+1 \leq k \leq s,\ 0 \leq j \leq m_k - 1\right) \end{array} \right.$$