Formes quadratiques réelles et ellipsoïdes [1]

Pour ce problème :
- n désigne un entier naturel non nul ;
- $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ est l'algèbre des matrices carrées d'ordre n à coefficients réels ;
- I_n la matrice identité dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$;
- pour toute matrice $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, ${}^tA$ est la transposée de A ;
- $\mathcal{S}_n(\mathbb{R}) = \{A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \mid {}^tA = A\}$ est le sous-espace vectoriel de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ formé des matrices symétriques ;
- $GL_n(\mathbb{R})$ est le groupe des matrices inversibles dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$;
- $\mathcal{O}_n(\mathbb{R}) = \{A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \mid {}^tAA = A\,{}^tA = I_n\}$ est le sous-groupe de $GL_n(\mathbb{R})$ formé des matrices orthogonales.

Pour tous réels $\lambda_1, \cdots, \lambda_n$, on note :

$$\operatorname{diag}(\lambda_1, \cdots, \lambda_n) = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & \lambda_n \end{pmatrix}$$

– I – Formes quadratiques réelles

E est un espace vectoriel réel de dimension $n \geq 1$.
Pour tout vecteur $x \in E \setminus \{0\}$, on note $\mathbb{R}x$ la droite vectorielle dirigée par x.
On rappelle que :
- une forme quadratique sur E est une application q définie de E dans $\mathbb{R}$ par :

$$\forall x \in E,\ q(x) = \varphi(x, x)$$

  où φ est une forme bilinéaire symétrique sur E ;
- la forme bilinéaire symétrique φ est uniquement déterminée par q et on dit que c'est la forme polaire de q ;
- si $\mathcal{B} = (e_i)_{1\leq i\leq n}$ est une base de E et q une forme quadratique sur E de forme polaire φ, la matrice de q (ou de φ) dans la base $\mathcal{B}$ est alors la matrice :

$$A = ((\varphi(e_i, e_j)))_{1\leq i,j\leq n} \in \mathcal{S}_n(\mathbb{R})$$

  En notant $a_{ij} = \varphi(e_i, e_j)$ pour tous i, j compris entre 1 et n, l'expression de la forme quadratique q dans la base $\mathcal{B}$ est :

$$\forall x = \sum_{i=1}^{n} x_i e_i \in E,\ q(x) = \sum_{1\leq i,j\leq n} a_{ij} x_i x_j = {}^tXAX$$

  où on a noté $X = (x_i)_{1\leq i\leq n}$ le vecteur de $\mathbb{R}^n$ formé des composantes de x dans la base $\mathcal{B}$;
- deux vecteurs x, y de E sont dits orthogonaux relativement à q si $\varphi(x, y) = 0$;
- l'orthogonal d'une partie non vide X de E est le sous-espace vectoriel de E défini par :

$$X^\perp = \{y \in E \mid \forall x \in X,\ \varphi(x, y) = 0\}$$

1. d'après l'épreuve 2 du Capes 2011

– une base $\mathcal{B} = (e_i)_{1 \leq i \leq n}$ de E est dite q-orthogonale si :

$$\varphi(e_i, e_j) = 0 \text{ pour } 1 \leq i \neq j \leq n$$

ce qui revient à dire que la matrice de q dans cette base est diagonale de termes diagonaux $\lambda_i = q(e_i)$ pour i compris entre 1 et n ; dans une telle base, l'expression de q est :

$$\forall x = \sum_{i=1}^{n} x_i e_i \in E,\ q(x) = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i x_i^2$$

si de plus, on a $q(e_i) = 1$ pour tout i compris entre 1 et n, on dit alors que $(e_i)_{1 \leq i \leq n}$ est une base q-orthonormée ;

– le noyau d'une forme quadratique q sur E est l'orthogonal de E, à savoir le sous-espace vectoriel de E défini par :

$$\ker(q) = \{y \in E \mid \forall x \in E,\ \varphi(x, y) = 0\}$$

et son cône isotrope est le sous-ensemble de E défini par :

$$C_q = q^{-1}\{0\} = \{x \in E \mid q(x) = 0\}$$

– une forme quadratique réelle q est dite non dégénérée si son noyau est réduit à $\{0\}$;
– une forme quadratique réelle q est dite positive [resp. définie positive] si $q(x) \geq 0$ [resp. $q(x) > 0$] pour tout $x \in E$ [resp. $x \in E \setminus \{0\}$] ;
– une matrice symétrique réelle $A \in \mathcal{S}_n(\mathbb{R})$ est dite positive [resp. définie positive] si on a $\langle Ax \mid x \rangle \geq 0$ pour tout $x \in \mathbb{R}^n$ [resp. $\langle Ax \mid x \rangle > 0$ pour tout $x \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$], ce qui revient à dire que la forme quadratique canoniquement associée est positive [resp. définie positive].

On note :
– $\mathcal{Q}(E)$ l'espace vectoriel des formes quadratiques sur E ;
– $\mathcal{Q}^+(E)$ [resp. $\mathcal{Q}^{++}(E)$] le sous-ensemble de $\mathcal{Q}(E)$ formé des formes quadratiques positive [resp. définie positive] sur E ;
– $\mathcal{S}_n^+(\mathbb{R})$ [resp. $\mathcal{S}_n^{++}(\mathbb{R})$] le sous-ensemble de $\mathcal{S}_n(\mathbb{R})$ formé des matrices symétriques positive [resp. définie positive].

1. Soient $\mathcal{B}$ et $\mathcal{B}'$ deux bases de E et P la matrice de passage de $\mathcal{B}$ à $\mathcal{B}'$. Montrer que si A' et A' sont les matrices d'une forme quadratique q sur E dans les bases $\mathcal{B}$ et $\mathcal{B}'$ respectivement, on a alors :
$$A' = {}^tPAP \text{ et } \det(A') = \det(P)^2 \det(A)$$

2. Soit q une forme quadratique non nulle sur E. Montrer que pour tout vecteur non isotrope $x \in E$, on a :
$$E = \mathbb{R}x \oplus (\mathbb{R}x)^{\perp}$$

3. En raisonnant par récurrence sur la dimension $n \geq 1$ de E, montrer que pour toute forme quadratique q sur E, il existe une base q-orthogonale de E.

4. Soit q une forme quadratique sur E.

   (a) Montrer que le noyau de q est contenu dans son cône isotrope.

   (b) Si $\mathcal{B} = (e_i)_{1 \leq i \leq n}$ est une base de E, A la matrice de q dans la base $\mathcal{B}$ et u l'endomorphisme de E de matrice A dans la base $\mathcal{B}$, montrer alors que :
$$\ker(\varphi) = \ker(u)$$

   (c) Montrer que si q est définie sur E, dans le sens où $q(x) \neq 0$ pour tout $x \in E \setminus \{0\}$, elle est alors positive ou négative.

(d) Montrer que si q est positive, on a alors pour tous vecteurs x, y dans E :

$$|\varphi(x,y)| \leq \sqrt{q(x)}\sqrt{q(y)} \text{ (inégalité de Cauchy-Schwarz)}$$

et :

$$\sqrt{q(x+y)} \leq \sqrt{q(x)} + \sqrt{q(y)} \text{ (inégalité de Minkowski)}$$

Dans le cas où q est définie positive, on dit que φ est un produit scalaire sur E, l'application $x \mapsto \sqrt{q(x)}$ est une norme sur E et on dit que (E, q) est un espace euclidien.
Par exemple, sur l'espace vectoriel $\mathbb{R}^n$, on a le produit scalaire canonique défini par :

$$\forall (X,Y) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n,\ \langle X \mid Y \rangle = {}^tX \cdot Y = \sum_{k=1}^{n} x_k y_k \tag{1}$$

et $X \mapsto \|X\|$ est la norme associée.

(e) Montrer que si q est positive, son cône isotrope est alors égal à son noyau et, dans ce cas, q est définie positive si, et seulement si, elle est non dégénérée.

– II – Formes quadratiques sur un espace euclidien. Le théorème spectral

On suppose ici que (E, q_0) est un espace euclidien, c'est-à-dire que q_0 est une forme quadratique définie positive sur E.

On rappelle que l'application $x \mapsto \sqrt{q_0(x)}$ définit une norme sur E.

On note φ_0 la forme polaire de q_0 et :

$$S(q_0) = \{x \in E \mid q_0(x) = 1\}$$

la sphère unité de (E, q_0). Cette sphère unité est compacte puisqu'on est en dimension finie.

1. On se propose de montrer que, pour toute forme quadratique q sur E, il existe une base de E qui est q_0-orthonormée et q-orthogonale. Pour ce faire, on raisonne par récurrence sur la dimension $n \geq 1$ de E.
Pour $n = 1$, le résultat est évident.
Supposant le résultat acquis au rang $n - 1$, on se donne une forme quadratique q sur E de forme polaire φ.

   (a) Justifier l'existence d'un vecteur $e_1 \in S(q_0)$ tel que :

   $$q(e_1) = \sup_{x \in S(q_0)} q(x)$$

   (b) En posant $\lambda_1 = q(e_1)$, montrer que la forme quadratique q_1 définie sur E par :

   $$\forall x \in E,\ q_1(x) = \lambda_1 q_0(x) - q(x)$$

   est positive et que le vecteur e_1 est dans le noyau de q_1.

   (c) En désignant par H_0 l'orthogonal de la droite $\mathbb{R}e_1$ relativement à q_0, montrer que $E = \mathbb{R}e_1 \oplus H_0$ et conclure.

2. Soient $A_0 \in \mathcal{S}_n^{++}(\mathbb{R})$ et $A \in \mathcal{S}_n(\mathbb{R})$. Montrer qu'il existe une matrice $P \in GL_n(\mathbb{R})$ telle que ${}^tPA_0P = I_n$ et ${}^tPAP$ est diagonale (théorème de réduction simultanée).

3. Pour cette question et les suivantes dans cette partie, $E = \mathbb{R}^n$ est muni du produit scalaire canonique défini par (1), c'est-à-dire que $q_0 = \|\cdot\|^2$ et $\varphi_0 = \langle \cdot \mid \cdot \rangle$.

(a) Montrer qu'une matrice $P \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ est orthogonale si, et seulement si, c'est la matrice de passage P d'une base orthonormée de $\mathbb{R}^n$ à une autre base orthonormée.

(b) Montrer que, pour toute matrice symétrique réelle $A \in \mathcal{S}_n(\mathbb{R})$,il existe une matrice orthogonale P telle que ${}^tPAP$ soit diagonale. Autrement dit, la matrice $A \in \mathcal{S}_n(\mathbb{R})$ a toutes ses valeurs propres réelles et se diagonalise dans une base orthonormée de $\mathbb{R}^n$ (théorème spectral).

4. Montrer qu'une matrice symétrique réelle $A \in \mathcal{S}_n(\mathbb{R})$ est positive [resp. définie positive] si, et seulement si, toutes ses valeurs propres sont positives ou nulles [resp. strictement positives].

5. Montrer qu'une matrice $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ est symétrique positive si, et seulement si, il existe $B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ telle que $A = {}^tBB$.

6. Montrer que pour toute matrice symétrique positive $A \in \mathcal{S}_n^+(\mathbb{R})$, il existe une unique matrice symétrique positive $B \in \mathcal{S}_n^+(\mathbb{R})$ telle que $A = B^2$.
   On dit que B est la racine carrée de A et on note $B = \sqrt{A}$.

7. Montrer que toute matrice réelle inversible $A \in GL_n(\mathbb{R})$ peut s'écrire de manière unique $A = \Omega S$, où Ω est une matrice orthogonale et S une matrice symétrique définie positive (décomposition polaire).

8. Montrer que toute matrice réelle inversible $A \in GL_n(\mathbb{R})$ peut s'écrire de manière unique $A = S\Omega$, où Ω est une matrice orthogonale et S une matrice symétrique définie positive.

– III – Formes quadratiques réelles définies positives

E est un espace vectoriel réel de dimension $n \geq 1$ et $\mathcal{B} = (e_i)_{1\leq i\leq n}$ est une base de E.

On rappelle que les mineurs principaux d'une matrice $A = ((a_{ij}))_{1\leq i,j\leq n} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ sont les déterminants des matrices carrées extraites $A_k = ((a_{ij}))_{1\leq i,j\leq k}$ où k est un entier compris entre 1 et n.

1. Soit q une forme quadratique sur E de matrice $A \in \mathcal{S}_n(\mathbb{R})$ dans la base $\mathcal{B}$.

   (a) Montrer que q est définie positive si, et seulement si, A est définie positive.

   (b) Montrer que si q est définie positive, tous les mineurs principaux de A sont alors strictement positifs.

2. On se propose ici de montrer la réciproque du résultat précédent, c'est-à-dire que si une forme quadratique q de matrice A dans $\mathcal{B}$ est telle que tous les mineurs principaux de A sont strictement positifs, elle est alors définie positive.
   Pour ce faire, on raisonne par récurrence sur la dimension $n \geq 1$ de E.
   Pour $n = 1$, le résultat est évident.
   Supposant le résultat acquis pour $n-1 \geq 1$, on se donne une forme quadratique q sur un espace vectoriel réel E de dimension n de matrice A dans une base $\mathcal{B} = (e_i)_{1\leq i\leq n}$ et on suppose que cette matrice a tous ses mineurs principaux strictement positifs.

   (a) Justifier l'existence d'une base $(f_1, \cdots, f_{n-1}, e_n)$ de E dans laquelle la matrice de q est de la forme :
$$A' = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & \cdots & \alpha_1 \\ 0 & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \lambda_{n-1} & \alpha_{n-1} \\ \alpha_1 & \cdots & \alpha_{n-1} & \alpha_n \end{pmatrix}.$$
   où les λ_k pour k compris entre et $n-1$ sont des réels strictement positifs.

(b) On définit le vecteur f_n par :

$$f_n = e_n - \sum_{i=1}^{n-1} \frac{\alpha_i}{\lambda_i} f_i$$

Montrer que la famille $\mathcal{B}' = (f_k)_{1 \leq k \leq n}$ est une base q-orthogonale de E et conclure.

3. Du résultat précédent, on déduit qu'une matrice $A \in \mathcal{S}_n(\mathbb{R})$ est dans $\mathcal{S}_n^{++}(\mathbb{R})$ si, et seulement si, tous ses mineurs principaux strictement positifs.

   (a) Montrer que $\mathcal{S}_n^{++}(\mathbb{R})$ est un ouvert convexe de l'espace vectoriel normé $\mathcal{S}_n(\mathbb{R})$.

   (b) Montrer que $\mathcal{S}_n^{+}(\mathbb{R})$ est un fermé convexe de $\mathcal{S}_n(\mathbb{R})$ et que son intérieur est $\mathcal{S}_n^{++}(\mathbb{R})$ (on rappelle qu'une partie $\mathcal{C}$ d'un espace vectoriel E est convexe lorsque, pour tout $(x, y) \in \mathcal{C}^2$, le segment $[x, y]$ est contenu dans $\mathcal{C}$).

4. Soient A, B dans $\mathcal{S}_n^{++}(\mathbb{R})$.

   (a) Montrer que :

$$\forall t \in [0,1], \ \det(tA + (1-t)B) \geq (\det(A))^t (\det(B))^{1-t}$$

   (b) Montrer que cette inégalité est stricte pour $A \neq B$ et $t \in]0,1[$.

5.

   (a) Montrer qu'une somme finie de formes quadratiques définies positives est une forme quadratique définie positive.

   (b) Soit $q : [0,1] \to Q^{++}(E)$ une fonction continue. Montrer que l'application Q définie sur E par :

$$Q(x) = \int_0^1 q(t)(x)\, dt$$

   est une forme quadratique définie positive.

   (c) Soit $0 < \alpha_1 < \alpha_2 < \cdots < \alpha_n$ une suite de réels strictement positifs et deux à deux distincts. Montrer que la forme quadratique Q définie sur $\mathbb{R}^n$ par :

$$Q(x) = \sum_{1 \leq i,j \leq n} \frac{x_i x_j}{\alpha_i + \alpha_j}$$

   est définie positive.

– IV – Ellipsoïdes dans un espace euclidien

Ici $E = \mathbb{R}^n$ est muni du produit scalaire canonique défini par (1).

Une matrice $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ est identifiée à l'application linéaire qu'elle définit dans la base canonique.

On appelle ellipsoïde (centré en 0) toute partie de $\mathbb{R}^n$ de la forme :

$$\mathcal{E}(q) = \{x \in \mathbb{R}^n \mid q(x) \leq 1\}$$

où q est une forme quadratique définie positive sur $\mathbb{R}^n$.

Un tel ellipsoïde est donc la boule unité de l'espace euclidien $(\mathbb{R}^n, q)$.

On note :

$$\mathcal{B}_n = \{x \in \mathbb{R}^n \mid \|x\| \leq 1\}$$

la boule unité de l'espace euclidien $(\mathbb{R}^n, \|\cdot\|)$.

L'espace vectoriel $Q(E)$ est muni de la norme N définie par :

$$\forall q \in Q(E),\ N(q) = \sup_{x \in \mathcal{B}_n} |q(x)|$$

et l'espace vectoriel $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ est muni de la norme induite par la norme euclidienne, à savoir la norme définie par :

$$\forall A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}),\ \|A\| = \sup_{x \in \mathcal{B}_n} \|Ax\|$$

1. Montrer qu'un ellipsoïde $\mathcal{E}(q)$ est convexe et que pour tout $x \in \mathcal{E}(q)$, on a $-x \in \mathcal{E}(q)$.
2. Montrer qu'un ellipsoïde est l'image de $\mathcal{B}_n$ par une application linéaire bijective.
3. Réciproquement, montrer que l'image de $\mathcal{B}_n$ par une application linéaire bijective est un ellipsoïde.
4. Soient q, q' deux formes quadratiques définies positives de matrices respectives A, A' dans la base canonique de $\mathbb{R}^n$.
   (a) Montrer que si $\mathcal{E}(q) \subset \mathcal{E}(q')$, les valeurs propres de $A^{-1}A'$ sont dans l'intervalle $]0, 1]$.
   Indication : on pourra utiliser **II.1.**
   (b) En déduire que si $\mathcal{E}(q) = \mathcal{E}(q')$, on a alors $q = q'$.
5. Soient q une forme quadratique définie positive sur $\mathbb{R}^n$ de matrice $A \in \mathcal{S}_n^{++}(\mathbb{R})$ dans la base canonique et $\mathcal{E}(q)$ l'ellipsoïde correspondant.
   (a) Montrer que le volume de $\mathcal{E}(q)$ est :
   $$V(q) = \frac{V_n}{\sqrt{\det(A)}}$$
   où V_n est le volume de $\mathcal{B}_n$.
   (b) Préciser $V(q)$ pour $n = 2$ et $n = 3$.
6. Soient q, q' deux formes quadratiques définies positives de matrices respectives A, A' dans la base canonique de $\mathbb{R}^n$. Montrer que que si $\mathcal{E}(q) \subset \mathcal{E}(q')$, on a alors $\det(A) \geq \det(A')$.
7. Soit $q \in Q(E)$ de matrice $A \in \mathcal{S}_n(\mathbb{R})$ dans la base canonique. On désigne par $\mathrm{Sp}(A)$ l'ensemble des valeurs propres de A et on définit le rayon spectral de A par :
   $$\rho(A) = \max_{\lambda \in \mathrm{Sp}(A)} |\lambda|$$
   Montrer que :
   $$\forall q \in Q(E),\ N(q) = \rho(A) = \|A\|$$
8. Soit K un compact d'intérieur non vide dans $\mathbb{R}^n$ et $\mathcal{M}(K)$ le sous-ensemble de $Q(E)$ défini par :
   $$\mathcal{M}(K) = \left\{q \in Q^+(E) \mid \forall x \in K,\ q(x) \leq 1\right\}$$
   (a) Montrer que $\mathcal{M}(K)$ est non vide.
   (b) Montrer que $\mathcal{M}(K)$ est convexe.
   (c) Montrer que $\mathcal{M}(K)$ est fermé.
   (d) Montrer que $\mathcal{M}(K)$ est compact.
   (e) Montrer qu'il existe un ellipsoïde $\mathcal{E}(q_0)$ de volume minimal qui contient K.
   (f) Montrer que cet ellipsoïde $\mathcal{E}(q_0)$ est unique.

On a donc ainsi montré le théorème de Loewner : tout compact d'intérieur non vide dans $\mathbb{R}^n$ est contenu dans un ellipsoïde de volume minimal.

On peut aussi montrer le théorème de John : tout convexe compact d'intérieur non vide dans $\mathbb{R}^n$ contient un ellipsoïde de volume maximal (voir Ralph Howard. *John's theorem on ellipsoids in convex bodies.* http ://www.math.sc.edu/˜howard/ (1997).