Calcul de $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2}$

1 Énoncé

Le but de ce problème est de calculer de plusieurs façons la somme $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} \dfrac{1}{n^2} = \dfrac{\pi^2}{6}$.

Il est l'occasion de revoir les points de cours suivants :
- convergence des suites réels croissantes majorées ;
- convergence des suites réels adjacentes ;
- fonctions trigonométriques ;
- racines complexes de l'unité ;
- relations entre les coefficients et les racines d'un polynôme complexe ;
- intégrales de Wallis ;
- développements limités ;
- développements en série entière ;
- convergence normale et uniforme des suites de fonctions, continuité ou dérivabilité de la limite, intégration terme à terme des séries de fonctions ;
- théorèmes de convergence monotone et dominée ;
- séries de Fourier, théorèmes de Dirichlet et de Parseval ;
- changement de variables dans une intégrale double ;
- théorème d'Abel pour les séries numériques ;
- polynômes de Tchebychev ;
- produits infinis.

On notera $(S_n)_{n\geq 1}$ la suite définie par :

$$\forall n \geq 1,\ S_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^2}.$$

– I – Convergence de la série $\sum \dfrac{1}{n^2}$

1. Démontrer que, pour tout entier $k \geq 2$, on a la majoration :
$$\frac{1}{k^2} \leq \frac{1}{k-1} - \frac{1}{k}.$$
En déduire la convergence de la série $\sum \dfrac{1}{n^2}$ et donner un majorant de la somme $S = \sum\limits_{n=1}^{+\infty} \dfrac{1}{n^2}$.
2. On considère la suite $(T_n)_{n\geq 1}$, définie par :
$$\forall n \geq 1,\ T_n = S_n + \frac{1}{n}.$$
Démontrer que les suites $(S_n)_{n\geq 1}$ et $(T_n)_{n\geq 1}$ sont adjacentes et donner un encadrement d'amplitude 10^{-1} de la limite commune S de ces deux suites.
3. Montrer, par comparaison à une intégrale, la convergence de la suite $(S_n)_{n\geq 1}$.

4. Sachant maintenant que $\sum \frac{1}{n^2}$ converge, montrer que :

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{(2n+1)^2} = \frac{3}{4} \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2}$$

   et :

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n^2} = -\frac{1}{2} \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2}.$$

– II – Utilisation de racines complexes de l'unité

1. Montrer que pour tout réel $x \in \left]0, \frac{\pi}{2}\right[$, on a :

$$0 < \sin(x) < x < \tan(x)$$

   et :

$$\operatorname{cotan}^2(x) < \frac{1}{x^2} < 1 + \operatorname{cotan}^2(x). \tag{1}$$

2. Pour tout entier $n \geq 1$, on note :

$$T_n = \sum_{k=1}^{n} \operatorname{cotan}^2\left(\frac{k\pi}{2n+1}\right)$$

   Montrer que :

$$T_n < \frac{(2n+1)^2}{\pi^2} \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^2} < n + T_n.$$

3. Nous allons montrer, en utilisant les racines du polynôme $P_n(z) = (z+1)^{2n+1} - (z-1)^{2n+1}$, que :

$$\sum_{k=1}^{n} \operatorname{cotan}^2\left(\frac{k\pi}{2n+1}\right) = \frac{n(2n-1)}{3}$$

   (a) Vérifier que P_n est un polynôme pair de degré $2n$.

   (b) Montrer que les racines complexes du polynôme P_n sont les :

$$z_k = i \operatorname{cotan}\left(\frac{k\pi}{2n+1}\right) \text{ et } -z_k, \text{ où } 1 \leq k \leq n.$$

   (c) Montrer que :

$$T_n = \sum_{k=1}^{n} \operatorname{cotan}^2\left(\frac{k\pi}{2n+1}\right) = \frac{n(2n-1)}{3}.$$

4. Conclure.

5. En déduire que :

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{(2n+1)^2} = \frac{\pi^2}{8}.$$

6. En utilisant les idées qui précèdent, montrer que :

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^4} = \frac{\pi^4}{90}.$$

L'idée de cette preuve est due à Ioannis Papadimitriou (The American Mathematical Monthly, Vol. 80, avril 1973, pages 424-425). On pourra aussi consulter A. M. Yaglom, I. M. Yaglom. Challenging Mathematical problems with elementary solutions. Vol. II. Dover, 1987, pb. 142 et 145.

– III – Utilisation des intégrales de Wallis

Pour tout entier $n \in \mathbb{N}$, on pose :

$$I_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{2n+1}(t)\, dt.$$

1.

   (a) Démontrer que pour tout $n \geq 1$, on a : $I_n = \dfrac{2n}{2n+1} I_{n-1}$.

   (b) En déduire que pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a : $I_n = \dfrac{2^{2n}(n!)^2}{(2n+1)!} = \dfrac{2^{2n}}{(2n+1)\, C_{2n}^n}$.

2. Montrer que, pour tout $x \in [-1, 1]$, on a :

$$\arcsin(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{C_{2n}^n}{(2n+1)\, 2^{2n}} x^{2n+1}$$

la convergence étant uniforme.

3. Montrer que, pour tout $t \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$, on a :

$$t = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{C_{2n}^n}{(2n+1)\, 2^{2n}} \sin^{2n+1}(t)$$

la convergence étant uniforme.

4. Déduire de ce qui précède que :

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{(2n+1)^2} = \frac{\pi^2}{8} \text{ et } \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}.$$

L'idée de cette preuve est due à Boo Rim Choe (The American Mathematical Monthly, 1987).

– IV – Encore une utilisation des intégrales de Wallis

Pour tout entier $n \in \mathbb{N}$, on pose :

$$I_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^{2n}(t)\, dt,\ \ J_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}} t^2 \cos^{2n}(t)\, dt.$$

1.

   (a) Démontrer que pour tout $n \geq 1$, on a : $I_n = \dfrac{2n-1}{2n} I_{n-1}$.

(b) En déduire que pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a : $I_n = \dfrac{(2n)!}{2^{2n}(n!)^2}\dfrac{\pi}{2} = \dfrac{C_{2n}^n}{2^{2n}}\dfrac{\pi}{2}$.

2. Soit $n \geq 1$.

(a) Montrer que :

$$I_n = n\,(2n-1)\,J_{n-1} - 2n^2 J_n.$$

(b) En déduire que :

$$\frac{\pi}{4n^2} = K_{n-1} - K_n.$$

où on a noté $K_n = \dfrac{2^{2n}\,(n!)^2}{(2n)!}J_n$, puis que :

$$\frac{\pi}{4}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k^2} = \frac{\pi^3}{24} - K_n.$$

3. Nous allons montrer que $\lim\limits_{n\to+\infty} K_n = 0$.

(a) Démontrer que, pour tout réel $x \in [0, \frac{\pi}{2}]$, on a : $x \leq \frac{\pi}{2}\sin x$.

(b) En déduire que, pour tout entier n, on a :

$$0 \leq J_n \leq \frac{\pi^2 I_n}{8\,(n+1)},\ \text{ puis } 0 \leq K_n \leq \frac{\pi^3}{16\,(n+1)}$$

(c) En déduire que $\sum\limits_{n=1}^{+\infty}\dfrac{1}{n^2} = \dfrac{\pi^2}{6}$.

L'idée de cette preuve est due à Matsuoka (The American Mathematical Monthly, 1961).

– V – Utilisation du noyau de Dirichlet et de Fejér

Pour cette partie, x est un réel dans $]0,\pi[$, n un entier naturel non nul et on note :

$$J_n(x) = \sum_{k=1}^{n} e^{ikx},\ C_n(x) = \sum_{k=1}^{n}\cos(kx)\,,\ S_n(x) = \sum_{k=1}^{n}\sin(kx)\,,$$

$$T_n(x) = \sum_{k=1}^{n} k\cos(kx)\,,\ F_n(x) = 1 + 2\sum_{k=1}^{n}\left(1 - \frac{k}{n+1}\right)\cos(kx)\,.$$

(les $\dfrac{1}{2} + C_n$ sont les noyaux de Dirichlet et les F_n les noyaux de Fejér).

1. Montrer que :

$$J_n(x) = e^{i\frac{n+1}{2}x}\frac{\sin\left(\frac{n}{2}x\right)}{\sin\left(\frac{x}{2}\right)}.$$

2. Montrer que :

$$C_n(x) = \cos\left(\frac{n+1}{2}x\right)\frac{\sin\left(\frac{n}{2}x\right)}{\sin\left(\frac{x}{2}\right)},\ S_n(x) = \sin\left(\frac{n+1}{2}x\right)\frac{\sin\left(\frac{n}{2}x\right)}{\sin\left(\frac{x}{2}\right)}.$$

3. Montrer que :
$$2C_n(x) = \frac{\sin\left(\frac{2n+1}{2}x\right)}{\sin\left(\frac{x}{2}\right)} - 1.$$
4. Montrer que :
$$T_n(x) = \frac{n+1}{2}\frac{\sin\left(\frac{2n+1}{2}x\right)}{\sin\left(\frac{x}{2}\right)} - \frac{1}{2}\frac{\sin^2\left(\frac{n+1}{2}x\right)}{\sin^2\left(\frac{x}{2}\right)}.$$
5. Montrer que :
$$F_n(x) = \frac{1}{n+1}\frac{\sin^2\left(\frac{n+1}{2}x\right)}{\sin^2\left(\frac{x}{2}\right)}.$$
Ce résultat est-il encore valable pour $x = 0$ et pour $x = \pi$?
6. Calculer $I_k = \int_0^\pi x\cos(kx)\,dx$ pour tout entier $k \geq 1$.
7. Montrer que $\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} \leq \ln(n) + 1$.
8. On note $G_n = \int_0^\pi xF_n(x)\,dx$. Montrer qu'il existe une suite $(\alpha_n)_{n\geq 1}$ convergente vers 0 telle que :
$$G_n = \frac{\pi^2}{2} + 2\sum_{k=1}^{n}\frac{(-1)^k - 1}{k^2} + \alpha_n.$$
9. En utilisant **5.** montrer que $\lim_{n\to+\infty} G_n = 0$.
10. En déduire que $\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{(-1)^n - 1}{n^2} = -\frac{\pi^2}{4}$, $\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}$ et $\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{(-1)^n}{n^2} = -\frac{\pi^2}{12}$.

L'idée de cette preuve est due à Stark (The American Mathematical Monthly, 1969).

– VI – Utilisation d'une intégrale double

1.
   (a) Montrer que :
$$\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n^2} = -\int_0^1 \frac{\ln(1-y)}{y}dy.$$
   (b) En déduire que :
$$\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n^2} = \int\int_{[0,1]^2}\frac{dxdy}{1-xy}$$
2.
   (a) Montrer que l'application $\varphi : (u,v) \mapsto (u-v, u+v)$ est un $\mathcal{C}^1$-difféomorphisme de $\mathbb{R}^2$ sur lui même et préciser son inverse.
   (b) Déterminer l'image par φ^{-1} du carré $[0,1]^2$.
   (c) Montrer que pour tout $u \in]0,1[$, on a :
$$\arctan\left(\frac{u}{\sqrt{1-u^2}}\right) = \arcsin(u)$$
   et :
$$\arctan\left(\frac{1-u}{\sqrt{1-u^2}}\right) = \frac{\pi}{4} - \frac{\arcsin(u)}{2}$$

(d) En utilisant le changement de variable $(x,y)=\varphi(u,v)$, montrer que $\displaystyle\iint \frac{dxdy}{1-xy}=\frac{\pi^2}{6}$ et en conséquence $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n^2}=\frac{\pi^2}{6}$.

L'idée de cette preuve est due à Apostol (The Mathematical Intelligencer, 1983).

– VII – Utilisation du théorème de Parseval

On désigne par f la fonction 2π-périodique définie par $f(x)=x$ pour $x\in\left]-\pi,\pi\right[$ et $f(-\pi)=f(\pi)=0$.

1. Calculer les coefficients de Fourier trigonométrique de f.
2. En déduire la valeur de $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n^2}$ en utilisant le théorème de Parseval.

– VIII – Utilisation du théorème de Dirichlet

On désigne par f la fonction 2π-périodique définie par $f(x)=|x|$ pour $x\in[-\pi,\pi]$.

1. Calculer les coefficients de Fourier trigonométrique de f.
2. En déduire la valeur de $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{1}{(2n+1)^2}$ et de $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n^2}$ en utilisant le théorème de Dirichlet.

– IX – Utilisation des théorèmes d'Abel et de convergence dominée

1. Montrer que, tout réel x et tout réel $t\in\left]-1,1\right[$ la série $\sum t^{n-1}\sin(nx)$ est convergente et calculer sa somme. On notera $f(x,t)$ cette somme.
2. Montrer que, pour tout réel $x\in\left]0,\pi\right[$, on a :
$$\int_0^1 f(x,t)\,dt=\frac{\pi-x}{2}.$$
3. Monter que, pour tout réel $x\in\left]0,\pi\right[$, on a :
$$\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{\sin(nx)}{n}=\frac{\pi-x}{2}.$$
4.
   (a) Montrer que la série $\sum\frac{\cos(nx)}{n^2}$ est uniformément convergente sur $\mathbb{R}$. En notant $F(x)$ la somme de cette série, Montrer que la fonction F est continue sur $\mathbb{R}$.

   (b) Montrer que pour tout $x\in\left]0,\pi\right[$, on a :
$$\left|\sum_{k=1}^{n}\sin(kx)\right|\leq\frac{1}{\sin\left(\frac{x}{2}\right)}.$$

   (c) Montrer que F est dérivable sur $\left]0,\pi\right[$ de dérivée $\frac{x-\pi}{2}$.

(d) En déduire que $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}$.

– X – Utilisation des polynômes de Tchebychev et de développements limités

1. Montrer que, pour tout entier naturel n, il existe deux polynômes P_n et Q_n de degré n tels que $\sin((2n+1)x) = \sin(x) P_n(\sin^2(x))$ et $\cos((2n+1)x) = \cos(x) Q_n(\sin^2(x))$ pour tout réel x. On vérifiera que ces deux polynômes ont le même coefficient dominant $\alpha_n = (-1)^n 4^n$ et que $P_n(0) = 2n+1$ et $Q_n(0) = 1$ (les P_n sont des polynômes de Tchebychev de deuxième espèce).
2. Retrouver le résultat de la question précédente avec :
$$e^{i(2n+1)x} = \cos((2n+1)x) + i \sin((2n+1)x).$$
3. Déterminer les racines du polynôme P_n, pour $n \geq 1$.
4. Montrer que, pour tout réel x et tout entier $n \geq 1$, on a :
$$\sin((2n+1)x) = (2n+1)\sin(x) \prod_{k=1}^{n} \left(1 - \frac{\sin^2(x)}{\sin^2\left(\frac{k\pi}{2n+1}\right)}\right).$$
5. En déduire que :
$$\frac{1}{(2n+1)^2} = 1 - \frac{6}{(2n+1)^2} \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{\sin^2\left(\frac{k\pi}{2n+1}\right)}$$
6.
   (a) En utilisant l'inégalité $\sin(x) \geq \frac{2}{\pi}x$ pour $x \in \left]0, \frac{\pi}{2}\right[$, montrer que pour tout entier $n_0 \geq 1$ et tout entier $n > n_0$, on a :
$$0 \leq 1 - \frac{6}{(2n+1)^2} \sum_{k=1}^{n_0} \frac{1}{\sin^2\left(\frac{k\pi}{2n+1}\right)} \leq \frac{1}{(2n+1)^2} + \frac{3}{2} \sum_{k=n_0+1}^{n} \frac{1}{k^2}$$
   (b) Montrer que, pour tout entier $n_0 \geq 1$, on a :
$$0 \leq 1 - \frac{6}{\pi^2} \sum_{k=1}^{n_0} \frac{1}{k^2} \leq \frac{3}{2} \sum_{k=n_0+1}^{+\infty} \frac{1}{k^2}$$
   (c) Conclure.

L'idée de cette preuve est due à Kortram (Mathematics Magazine, 1996).

– XI – Une courte preuve due à Euler

1. Montrer que, pour tout réel $x \in \mathbb{R} \setminus \pi\mathbb{Z}$, le produit infini $\prod \left(1 - \frac{x^2}{n^2\pi^2}\right)$ converge strictement (i. e. $\prod\limits_{n=1}^{+\infty} \left(1 - \frac{x^2}{n^2\pi^2}\right) \neq 0$).
2. En utilisant **X.4.** montrer que, pour tout réel $x \in \left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$ et tout entier $n \geq 1$, on a :
$$\sin((2n+1)x) = (2n+1)\tan(x)\cos^{2n+1}(x) \prod_{k=1}^{n} \left(1 - \frac{\tan^2(x)}{\tan^2\left(\frac{k\pi}{2n+1}\right)}\right)$$

3. Montrer que pour $0 < x < y < \dfrac{\pi}{2}$, on a :

$$0 < \frac{\tan(x)}{\tan(y)} < \frac{x}{y} < \frac{\sin(x)}{\sin(y)}$$

4. Montrer que $\lim\limits_{n \to +\infty} \cos^n\left(\dfrac{x}{n}\right) = 1$ pour tout réel $x \in \left]0, \pi\right[$.
5. Montrer que, pour tout réel $x \in [-\pi, \pi]$, on a :

$$\sin(x) = x \prod_{n=1}^{+\infty} \left(1 - \frac{x^2}{n^2 \pi^2}\right)$$

6. Conclure en identifiant les coefficients de x^3 dans le développement limité à l'ordre 3 de ce produit infini et de $\sin$.

2 Solution

– I – Convergence de la série $\sum \frac{1}{n^2}$

1. Pour $k \geq 2$, on a :
$$\frac{1}{k^2} < \frac{1}{k(k-1)} = \frac{1}{k-1} - \frac{1}{k}.$$
Pour $n \geq 2$, on a :
$$\begin{aligned} S_n = 1 + \sum_{k=2}^{n} \frac{1}{k^2} &\leq 1 + \sum_{k=2}^{n} \left(\frac{1}{k-1} - \frac{1}{k} \right) \\ &\leq 1 + \sum_{k=2}^{n} \frac{1}{k-1} - \sum_{k=2}^{n} \frac{1}{k} \\ &\leq 1 + \sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{k} - \sum_{k=2}^{n} \frac{1}{k} = 2 - \frac{1}{n} \leq 2. \end{aligned}$$
La suite $(S_n)_{n\geq 1}$ est donc une suite croissante (sommes de réels positifs) majorée par 2 et en conséquence convergente de limite $S \in]0,2]$.
De manière plus générale, pour $\alpha > 1$ et $n \geq 2$, on a :
$$\begin{aligned} S_n(\alpha) = 1 + \sum_{k=2}^{n} \frac{1}{k^\alpha} &\leq 1 + \frac{1}{\alpha-1} \sum_{k=2}^{n} \left(\frac{1}{(k-1)^{\alpha-1}} - \frac{1}{k^{\alpha-1}} \right) \\ &\leq 1 + \frac{1}{\alpha-1} \left(\sum_{k=2}^{n} \frac{1}{(k-1)^{\alpha-1}} - \sum_{k=2}^{n} \frac{1}{k^{\alpha-1}} \right) \\ &\leq 1 + \frac{1}{\alpha-1} \left(\sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{k^{\alpha-1}} - \sum_{k=2}^{n} \frac{1}{k^{\alpha-1}} \right) \\ &\leq 1 + \frac{1}{\alpha-1} - \frac{1}{\alpha-1} \frac{1}{n^{\alpha-1}} \leq 1 + \frac{1}{\alpha-1}. \end{aligned}$$
l'inégalité, pour $k \geq 2$:
$$\frac{1}{k^\alpha} < \frac{1}{\alpha-1} \left(\frac{1}{(k-1)^{\alpha-1}} - \frac{1}{k^{\alpha-1}} \right).$$
venant de :
$$\begin{aligned} \frac{1}{k^\alpha} < \int_{k-1}^{k} \frac{dt}{t^\alpha} &= \left[-\frac{1}{\alpha-1} \frac{1}{t^{\alpha-1}} \right]_{k-1}^{k} \\ &= \frac{1}{\alpha-1} \left(\frac{1}{(k-1)^{\alpha-1}} - \frac{1}{k^{\alpha-1}} \right) \end{aligned}$$

2. La suite $(S_n)_{n\geq 1}$ est croissante puisque chaque terme S_n est somme de réels positifs.
Pour tout $n \geq 1$, on a :
$$T_{n+1} - T_n = \frac{1}{(n+1)^2} - \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1} \right) = -\frac{1}{n(n+1)^2} < 0$$
ce qui signifie que la suite $(T_n)_{n\geq 1}$ est décroissante.
Puis avec :
$$\lim_{n\to+\infty} (T_n - S_n) = \lim_{n\to+\infty} \frac{1}{n} = 0,$$

on conclut que ces deux suites sont adjacentes et en conséquence convergentes vers une même limite S.

En choisissant n tel que $\frac{1}{n} \leq \varepsilon$, les encadrements $S_n \leq S \leq T_n$, nous permettent de donner des valeurs approchées de S d'amplitude ε. Par exemple, pour $n = 10$ et $n = 11$, on obtient :

$$S_{10} < S_{11} < S < T_{11} < T_{10}$$

avec :

$$S_{10} = \frac{1968\,329}{1270\,080} \approx 1.549 < S_{11} = \frac{239\,437\,889}{153\,679\,680} \approx 1.558$$

et :

$$T_{11} = \frac{22\,921\,699}{13\,970\,880} \approx 1.6407 < T_{10} = \frac{2095\,337}{1270\,080} \approx 1.649$$

Avec :

$$S_{10} < 1.55 < S_{11} < S < T_{11} < 1.641 < T_{10}$$

on déduit que 1.55 est valeur approchée par défaut de S à 10^{-1} près et 1.641 une valeur approchée par excès à 10^{-1} près.

On peut montrer de manière un plus générale, en utilisant le théorème sur les suites adjacentes, que, pour tout réel $\alpha \geq 2$, la série $\sum \frac{1}{n^\alpha}$ est convergente. Pour ce faire on utilise les suites $(S_n(\alpha))_{n\geq 1}$ et $(T_n(\alpha))_{n\geq 1}$ définies par :

$$S_n(\alpha) = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^\alpha} \text{ et } T_n(\alpha) = S_n(\alpha) + \frac{1}{n^{\alpha-1}}.$$

La suite $(S_n(\alpha))_{n\geq 1}$ est croissante puisque chaque terme $S_n(\alpha)$ est somme de réels positifs.

Pour tout $n \geq 1$, on a :

$$T_{n+1}(\alpha) - T_n(\alpha) = \frac{1}{(n+1)^\alpha} - \left(\frac{1}{n^{\alpha-1}} - \frac{1}{(n+1)^{\alpha-1}}\right)$$

avec :

$$\frac{1}{(n+1)^\alpha} < \frac{1}{\alpha-1}\left(\frac{1}{n^{\alpha-1}} - \frac{1}{(n+1)^{\alpha-1}}\right)$$

ce qui donne :

$$T_{n+1}(\alpha) - T_n(\alpha) < \left(\frac{1}{\alpha-1} - 1\right)\left(\frac{1}{n^{\alpha-1}} - \frac{1}{(n+1)^{\alpha-1}}\right) \leq 0$$

pour $\alpha \geq 2$ (dans ce cas $\frac{1}{\alpha-1} - 1 = \frac{2-\alpha}{\alpha-1} \leq 0$), ce qui signifie que la suite $(T_n(\alpha))_{n\geq 1}$ est décroissante.

Enfin avec :

$$\lim_{n\to+\infty} (T_n(\alpha) - S_n(\alpha)) = \lim_{n\to+\infty} \frac{1}{n^{\alpha-1}} = 0,$$

on conclut que ces deux suites sont adjacentes et donc convergentes vers une même limite.

3. La fonction $t \to \frac{1}{t^2}$ étant décroissante sur $\mathbb{R}^{+*}$, on a :

$$\forall k \geq 2,\ \int_{k-1}^{k} \frac{dt}{t^2} \geq \int_{k-1}^{k} \frac{dt}{k^2} = \frac{1}{k^2}$$

et pour tout $n \geq 2$, on a :

$$S_n = 1 + \sum_{k=2}^{n} \frac{1}{k^2} \leq 1 + \sum_{k=2}^{n} \int_{k-1}^{k} \frac{dt}{t^2} = 1 + \int_{1}^{n} \frac{dt}{t^2} = 2 - \frac{1}{n} \leq 2.$$

La suite $(S_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est donc croissante majorée et en conséquence convergente.

4. La convergence de $\sum \frac{1}{n^2}$ nous assure celle de $\sum \frac{1}{(2n+1)^2}$ et $\sum \frac{(-1)^n}{n^2}$ et on a :

$$S = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{1}{4} \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2} + \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{(2n+1)^2}$$

donc :

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{(2n+1)^2} = \frac{3}{4} \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{3}{4} S$$

et :

$$\begin{aligned} \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n^2} &= \frac{1}{4} \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2} - \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{(2n+1)^2} \\ &= \frac{1}{4} S - \frac{3}{4} S = -\frac{S}{2}. \end{aligned}$$

– II – Utilisation de racines complexes de l'unité

1. En utilisant le théorème des accroissements finis, on a, pour tout réel $x \in \left]0, \frac{\pi}{2}\right[$:

$$\begin{cases} 0 < \sin(x) = \sin(x) - \sin(0) = x \cos(c_x) < x \\ \tan(x) = \tan(x) - \tan(0) = x \left(1 + \tan^2(d_x)\right) > x > 0 \end{cases}$$

avec $0 < c_x, d_x < x$, ce qui donne :

$$0 < \sin(x) < x < \tan(x)$$

ou encore :

$$0 < \operatorname{cotan}(x) = \frac{1}{\tan(x)} < \frac{1}{x} < \frac{1}{\sin(x)}$$

et :

$$\operatorname{cotan}^2(x) < \frac{1}{x^2} < \frac{1}{\sin^2(x)} = 1 + \operatorname{cotan}^2(x).$$

L'inégalité $0 < \sin(x) < x < \tan(x)$ peut aussi se justifier géométriquement (figure 1).

2. En utilisant l'encadrement (1), on a pour tout k compris entre 1 et n :

$$\operatorname{cotan}^2\left(\frac{k\pi}{2n+1}\right) < \frac{(2n+1)^2}{\pi^2} \frac{1}{k^2} < 1 + \operatorname{cotan}^2\left(\frac{k\pi}{2n+1}\right)$$

et en sommant :

$$T_n < \frac{(2n+1)^2}{\pi^2} \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^2} < n + T_n.$$

3.

(a) On a :

$$\begin{cases} (z+1)^{2n+1} = \sum\limits_{k=0}^{2n+1} C_{2n+1}^k z^k = \sum\limits_{j=0}^{n} C_{2n+1}^{2j} z^{2j} + \sum\limits_{j=0}^{n} C_{2n+1}^{2j+1} z^{2j+1} \\ (z-1)^{2n+1} = \sum\limits_{k=0}^{2n+1} C_{2n+1}^k (-1)^{2n+1-k} z^k = -\sum\limits_{j=0}^{n} C_{2n+1}^{2j} z^{2j} + \sum\limits_{j=0}^{n} C_{2n+1}^{2j+1} z^{2j+1} \end{cases}$$

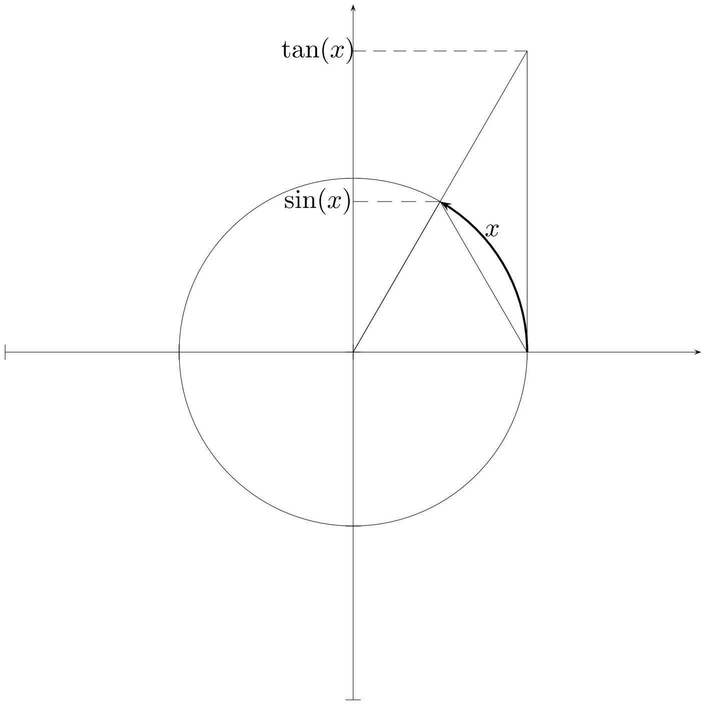

FIG. 1 –

et :

$$P_n(z) = (z+1)^{2n+1} - (z-1)^{2n+1} = 2\sum_{j=0}^{n} C_{2n+1}^{2j} z^{2j}$$

Le polynôme P_n est donc pair et de degré $2n$. Il a donc $2n$ racines complexes.

(b) Comme $P_n(1) = 2^{2n+1} \neq 0$, 1 n'est pas racine de P_n et dire que $z \in \mathbb{C}$ est racine de P_n équivaut à dire que $z \neq 1$ et $Z = \dfrac{z+1}{z-1}$ est une racine $(2n+1)$-ème de l'unité différente de 1 (la fonction homographique $z \mapsto \dfrac{z+1}{z-1}$ réalise une bijection de $\mathbb{C} \setminus \{1\}$ sur lui même). Pour toute racine z de P_n, il existe donc un entier k compris entre 1 et $2n$ tel que :

$$\frac{z+1}{z-1} = e^{i\frac{2k\pi}{2n+1}}$$

ce qui entraîne :

$$\begin{aligned} z &= \frac{e^{i\frac{2k\pi}{2n+1}}+1}{e^{i\frac{2k\pi}{2n+1}}-1} = \frac{e^{i\frac{k\pi}{2n+1}}+e^{-i\frac{k\pi}{2n+1}}}{e^{i\frac{k\pi}{2n+1}}-e^{-i\frac{k\pi}{2n+1}}} = \frac{\cos\left(\frac{k\pi}{2n+1}\right)}{i\sin\left(\frac{k\pi}{2n+1}\right)} \\ &= -i\,\mathrm{cotan}\left(\frac{k\pi}{2n+1}\right) = -\frac{i}{\tan\left(\frac{k\pi}{2n+1}\right)} \end{aligned}$$

La fonction tan étant strictement croissante sur $\left]-\dfrac{\pi}{2}, \dfrac{\pi}{2}\right[$, les $z_k = -\dfrac{i}{\tan\left(\frac{k\pi}{2n+1}\right)}$, pour k compris entre 1 et n nous fournissent k racines distinctes de P_n. Du fait de la parité de P_n, les $-z_k$ sont aussi racines de P_n. On a donc ainsi $2n$ racines distinctes de P_n et on les a toutes puisque P_n est de degré $2n$.

(c) On a $P_n(z) = 2Q_n(z^2)$, où $Q_n(z) = \sum\limits_{j=0}^{n} C_{2n+1}^{2j} z^j$ et les z_k^2, pour k compris entre 1 et n sont les racines de Q_n (la fonction $\tan^2$ est strictement croissante sur $\left]0, \frac{\pi}{2}\right[$, donc les z_k^2 sont deux à deux distincts et Q_n est de degré n). On a donc, en notant $a_k = C_{2n+1}^{2k}$ les coefficients du polynôme Q_n :

$$-\sum_{k=1}^{n} \operatorname{cotan}^2\left(\frac{k\pi}{2n+1}\right) = \sum_{k=1}^{n} z_k^2 = -\frac{a_{n-1}}{a_n}$$
$$= -\frac{C_{2n+1}^{2n-2}}{C_{2n+1}^{2n}} = -\frac{C_{2n+1}^{3}}{C_{2n+1}^{1}} = -\frac{(2n)!}{3! \cdot (2n-2)!} = -\frac{n(2n-1)}{3}$$

et $T_n = \dfrac{n(2n-1)}{3}$.

4. On a donc :

$$T_n = \frac{n(2n-1)}{3} < \frac{(2n+1)^2}{\pi^2} \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^2} < n + T_n = \frac{2n(n+1)}{3}$$

soit :

$$\forall n \geq 1,\ \pi^2 \frac{n(2n-1)}{3(2n+1)^2} < \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^2} < \pi^2 \frac{2n(n+1)}{3(2n+1)^2}$$

et faisant tendre n vers $+\infty$, on en déduit que

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}.$$

5. On a :

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{(2n+1)^2} = \frac{3}{4} \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{3}{4}\frac{\pi^2}{6} = \frac{\pi^2}{8}.$$

6. En gardant les notations du **3.c.** on a, pour $n \geq 2$:

$$\sum_{1 \leq j < k \leq n} z_j^2 z_k^2 = \frac{a_{n-2}}{a_n}$$
$$= \frac{C_{2n+1}^{2n-4}}{C_{2n+1}^{2n}} = \frac{C_{2n+1}^{5}}{C_{2n+1}^{1}} = \frac{(2n)!}{5! \cdot (2n-4)!} = \frac{n(2n-1)(n-1)(2n-3)}{30}$$

et avec :

$$\left(\sum_{k=1}^{n} z_k^2\right)^2 = \sum_{k=1}^{n} z_k^4 + 2 \sum_{1 \leq j < k \leq n} z_j^2 z_k^2$$

on déduit que :

$$\sum_{k=1}^{n} z_k^4 = \left(\sum_{k=1}^{n} z_k^2\right)^2 - 2 \sum_{1 \leq j < k \leq n} z_j^2 z_k^2$$
$$= \frac{n^2(2n-1)^2}{9} - \frac{n(2n-1)(n-1)(2n-3)}{15}$$
$$= \frac{n(2n-1)}{3} \frac{5n(2n-1) - 3(n-1)(2n-3)}{15}$$
$$= \frac{n(2n-1)(4n^2+10n-9)}{45}$$

soit, pour $n \geq 2$:

$$U_n = \sum_{k=1}^{n} \operatorname{cotan}^4 \left(\frac{k\pi}{2n+1} \right) = \frac{n\,(2n-1)\,(4n^2+10n-9)}{45}.$$

cette identité étant encore valable pour $n = 1$.
En utilisant l'encadrement (1), on a pour tout k compris entre 1 et $n \geq 1$:

$$\operatorname{cotan}^4 \left(\frac{k\pi}{2n+1} \right) < \frac{(2n+1)^4}{\pi^4} \frac{1}{k^4} < 1 + 2\operatorname{cotan}^2 \left(\frac{k\pi}{2n+1} \right) + \operatorname{cotan}^4 \left(\frac{k\pi}{2n+1} \right)$$

et en sommant :

$$U_n < \frac{(2n+1)^4}{\pi^4} \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^4} < n + 2T_n + U_n$$

soit :

$$\frac{n\,(2n-1)\,(4n^2+10n-9)}{45} < \frac{(2n+1)^4}{\pi^4} \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^4} < \frac{8n\,(n+1)\,(n^2+n+3)}{45}$$

ce qui donne :

$$\frac{n\,(2n-1)\,(4n^2+10n-9)}{45\,(2n+1)^4}\pi^4 < \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^4} < \frac{8n\,(n+1)\,(n^2+n+3)}{45\,(2n+1)^4}\pi^4$$

et faisant tendre n vers $+\infty$, on en déduit que

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^4} = \frac{\pi^4}{90}.$$

– III – Utilisation des intégrales de Wallis

1.

(a) Une intégration par parties donne, pour $n \geq 1$:

$$\begin{aligned} I_n &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{2n}(t) \sin(t)\, dt = \left[-\sin^{2n}(t) \cos(t) \right]_0^{\frac{\pi}{2}} + 2n \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{2n-1}(t) \cos^2(t)\, dt \\ &= 2n \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{2n-1}(t) \left(1 - \sin^2(t)\right) dt = 2n\,(I_{n-1} - I_n) \end{aligned}$$

et :

$$I_n = \frac{2n}{2n+1} I_{n-1}.$$

(b) On procède par récurrence sur $n \geq 0$.
Pour $n = 0$,on a :

$$I_0 = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin(t)\, dt = 1$$

et supposant le résultat acquis au rang $n - 1 \geq 0$, on a :

$$\begin{aligned} I_n &= \frac{2n}{2n+1} \frac{2^{2n-2}((n-1)!)^2}{(2n-1)!} = \frac{(2n)^2}{(2n+1)\,(2n)} \frac{2^{2n-2}((n-1)!)^2}{(2n-1)!} \\ &= \frac{2^{2n}(n!)^2}{(2n+1)!} = \frac{2^{2n}}{(2n+1)\, C_{2n}^n} \end{aligned}$$

2. La fonction $f : x \mapsto \arcsin(x)$ est continue sur $[-1, 1]$, dérivable sur $]-1, 1[$ avec, pour $x \in]-1, 1[$:

$$f'(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{C_{2n}^n}{2^{2n}} x^{2n}$$

ce qui donne :

$$\arcsin(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{C_{2n}^n}{(2n+1)\, 2^{2n}} x^{2n+1}$$

le rayon de convergence de cette série entière étant égal à 1.
En notant $a_n = \dfrac{C_{2n}^n}{(2n+1)\, 2^{2n}}$, on a pour tout x dans $[0, 1[$ et tout $n \geq 0$:

$$0 \leq \sum_{k=0}^{n} a_k x^{2k+1} \leq \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^{2n+1} = \arcsin(x)$$

et faisant tendre x vers 1, on en déduit que pour tout $n \geq 1$, on a :

$$0 \leq \sum_{k=1}^{n} a_k \leq \frac{\pi}{2},$$

ce qui implique la convergence de la série à termes positifs $\sum\limits_{n=0}^{+\infty} a_n$.
Avec $|a_n x^{2n+1}| \leq a_n$ pour tout pour tout x dans $[-1, 1]$ et tout $n \geq 0$, on déduit que la série $\sum a_n x^{2n+1}$ est uniformément convergente sur $[-1, 1]$ et sa somme est continue sur cet intervalle.
Comme elle coïncide avec f sur $]-1, 1[$, on déduit que $f(x) = \sum\limits_{n=0}^{+\infty} a_n x^{2n+1}$ sur $[-1, 1]$ puisque f est aussi continue sur cet intervalle.

3. Pour $t \in \left[-\dfrac{\pi}{2}, \dfrac{\pi}{2}\right]$, $x = \sin(t) \in [-1]$ et on a :

$$t = \arcsin(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{C_{2n}^n}{(2n+1)\, 2^{2n}} x^{2n+1} = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{C_{2n}^n}{(2n+1)\, 2^{2n}} \sin^{2n+1}(t)$$

la convergence étant uniforme puisque $\left| \dfrac{C_{2n}^n}{(2n+1)\, 2^{2n}} \sin^{2n+1}(t) \right| \leq \dfrac{C_{2n}^n}{(2n+1)\, 2^{2n}}$ et $\sum \dfrac{C_{2n}^n}{(2n+1)\, 2^{2n}}$ converge.

4. La convergence uniforme nous permet d'intégrer terme à terme sur $\left[0, \dfrac{\pi}{2}\right]$ l'identité précédente, ce qui donne :

$$\begin{aligned} \frac{\pi^2}{8} &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} t dt = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{C_{2n}^n}{(2n+1)\, 2^{2n}} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{2n+1}(t)\, dt \\ &= \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{C_{2n}^n}{(2n+1)\, 2^{2n}} I_n = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{(2n+1)^2} \end{aligned}$$

et :

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{4}{3} \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{(2n+1)^2} = \frac{\pi^2}{6}.$$

– IV – Encore une utilisation des intégrales de Wallis

1.

(a) Une intégration par parties donne, pour $n \geq 1$:

$$\begin{aligned} I_n &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^{2n-1}(t)\cos(t)\,dt = \left[\cos^{2n-1}(t)\sin(t)\right]_0^{\frac{\pi}{2}} + (2n-1)\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^{2n-2}(t)\sin^2(t)\,dt \\ &= (2n-1)\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^{2n-2}(t)\left(1-\cos^2(t)\right)dt = (2n-1)\left(I_{n-1}-I_n\right) \end{aligned}$$

et :

$$I_n = \frac{2n-1}{2n} I_{n-1}.$$

(b) On procède par récurrence sur $n \geq 0$.
Pour $n = 0$, on a $I_0 = \dfrac{\pi}{2}$.
Supposant le résultat acquis au rang $n-1 \geq 0$, on a :

$$\begin{aligned} I_n &= \frac{2n-1}{2n}\frac{(2n-2)!}{2^{2n-2}\left((n-1)!\right)^2}\frac{\pi}{2} = \frac{2n(2n-1)}{(2n)^2}\frac{(2n-2)!}{2^{2n-2}\left((n-1)!\right)^2}\frac{\pi}{2} \\ &= \frac{(2n)!}{2^{2n}(n!)^2}\frac{\pi}{2} = \frac{C_{2n}^n}{2^{2n}}\frac{\pi}{2} \end{aligned}$$

2.

(a) Une intégration par parties donne pour $n \geq 1$:

$$\begin{aligned} I_n &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^{2n}(t)\,dt = \left[t\cos^{2n}(t)\right]_0^{\frac{\pi}{2}} + 2n\int_0^{\frac{\pi}{2}} t\sin(t)\cos^{2n-1}(t)\,dt \\ &= 2n\int_0^{\frac{\pi}{2}} t\sin(t)\cos^{2n-1}(t)\,dt = 2nI'_n \end{aligned}$$

puis une deuxième intégration par parties donne :

$$\begin{aligned} I'_n &= \left[\frac{t^2}{2}\sin(t)\cos^{2n-1}(t)\right]_0^{\frac{\pi}{2}} \\ &- \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{t^2}{2}\left(\cos^{2n}(t) - (2n-1)\sin^2(t)\cos^{2n-2}(t)\right)dt \\ &= (2n-1)\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{t^2}{2}\sin^2(t)\cos^{2n-2}(t)\,dt - \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{t^2}{2}\cos^{2n}(t)\,dt \\ &= (2n-1)\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{t^2}{2}\left(1-\cos^2(t)\right)\cos^{2n-2}(t)\,dt - \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{t^2}{2}\cos^{2n}(t)\,dt \\ &= (2n-1)\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{t^2}{2}\cos^{2n-2}(t)\,dt - n\int_0^{\frac{\pi}{2}} t^2\cos^{2n}(t)\,dt \end{aligned}$$

ce qui entraîne :

$$\begin{aligned} I_n &= n(2n-1)\int_0^{\frac{\pi}{2}} t^2\cos^{2n-2}(t)\,dt - 2n^2\int_0^{\frac{\pi}{2}} t^2\cos^{2n}(t)\,dt \\ &= n(2n-1)J_{n-1} - 2n^2 J_n. \end{aligned}$$

(b) Utilisant la valeur de I_n, on a :

$$\frac{(2n)!}{2^{2n}(n!)^2}\frac{\pi}{2} = n(2n-1)J_{n-1} - 2n^2 J_n$$

et :

$$\begin{aligned}\frac{\pi}{4n^2} &= \frac{n(2n-1)2^{2n}(n!)^2}{2n^2(2n)!}J_{n-1} - \frac{2n^2 2^{2n}(n!)^2}{2n^2(2n)!}J_n \\ &= \frac{2^{2n-2}((n-1)!)^2}{(2n-2)!}J_{n-1} - \frac{2^{2n}(n!)^2}{(2n)!}J_n \\ &= K_{n-1} - K_n\end{aligned}$$

en notant $K_n = \dfrac{2^{2n}(n!)^2}{(2n)!}J_n$.
Il en résulte que :

$$\frac{\pi}{4}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k^2} = \sum_{k=1}^{n}(K_{k-1} - K_k) = K_0 - K_n = J_0 - K_n,$$

avec $J_0 = \dfrac{\pi^3}{24}$.

3.

(a) La fonction sin étant concave sur $\left[0, \dfrac{\pi}{2}\right]$, son graphe est au dessus de la corde d'extrémités $(0,0)$ et $\left(\dfrac{\pi}{2}, 1\right)$, ce qui se traduit par $\sin(x) \geq \dfrac{2}{\pi}x$.
On peut aussi étudier les variations de la fonction $\varphi : x \mapsto \sin(x) - \dfrac{2}{\pi}x$ sur $\left[0, \dfrac{\pi}{2}\right]$. Cette fonction est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$ avec $\varphi''(x) = -\sin(x) < 0$ pour $x \in \left]0, \dfrac{\pi}{2}\right[$, donc φ' est strictement décroissante sur $\left[0, \dfrac{\pi}{2}\right]$ avec $\varphi'(0) = 1 - \dfrac{2}{\pi} > 0$, $\varphi'\left(\dfrac{\pi}{2}\right) = -\dfrac{2}{\pi} < 0$, il existe un unique $c \in \left]0, \dfrac{\pi}{2}\right[$ tel que $\varphi'(c) = 0$ et φ est strictement croissante sur $]0, c[$, strictement décroissante sur $\left]c, \dfrac{\pi}{2}\right[$ avec $\varphi(0) = \varphi\left(\dfrac{\pi}{2}\right) = 0$ (dessiner le tableau de variations). Il en résulte que $\varphi(x) \geq 0$ sur $\left[0, \dfrac{\pi}{2}\right]$.

(b) Pour tout $t \in \left[0, \dfrac{\pi}{2}\right]$, on a :

$$0 \leq t^2\cos^{2n}(t) \leq \frac{\pi^2}{4}\sin^2(t)\cos^{2n}(t) \leq \frac{\pi^2}{4}\left(1 - \cos^2(t)\right)\cos^{2n}(t)$$

et en intégrant :

$$0 \leq J_n \leq \frac{\pi^2}{4}(I_n - I_{n+1}) = \frac{\pi^2}{4}\left(1 - \frac{2n+1}{2n+2}\right)I_n = \frac{\pi^2 I_n}{8(n+1)}.$$

Ce qui donne :

$$0 \leq K_n = \frac{2^{2n}(n!)^2}{(2n)!}J_n = \frac{\pi}{2}\frac{J_n}{I_n} \leq \frac{\pi}{2}\frac{\pi^2}{8(n+1)} = \frac{\pi^3}{16(n+1)}.$$

(c) De ce dernier encadrement, on déduit que $\lim\limits_{n\to+\infty} K_n = 0$ et :

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{\pi}{4}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k^2} = J_0 = \frac{\pi^3}{24}$$

soit $\sum\limits_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n^2} = \lim\limits_{n\to+\infty}\sum\limits_{k=1}^{n}\frac{1}{k^2} = \frac{\pi^2}{6}.$

– V – Utilisation du noyau de Dirichlet et de Fejér

1. Comme $e^{ix} \neq 1$, on a :

$$\begin{aligned} J_n(x) &= e^{ix}\sum_{k=0}^{n-1}\left(e^{ix}\right)^k = e^{ix}\frac{1-e^{inx}}{1-e^{ix}} = e^{ix}\frac{e^{i\frac{n}{2}x}}{e^{i\frac{x}{2}}}\frac{e^{-i\frac{n}{2}x}-e^{i\frac{n}{2}x}}{e^{-i\frac{x}{2}}-e^{i\frac{x}{2}}} \\ &= e^{i\frac{n+1}{2}x}\frac{\sin\left(\frac{n}{2}x\right)}{\sin\left(\frac{x}{2}\right)}. \end{aligned}$$

2. On a $C_n(x) = \Re(J_n(x))$ et $S_n(x) = \Im(J_n(x))$, ce qui donne :

$$C_n(x) = \cos\left(\frac{n+1}{2}x\right)\frac{\sin\left(\frac{n}{2}x\right)}{\sin\left(\frac{x}{2}\right)},\ S_n(x) = \sin\left(\frac{n+1}{2}x\right)\frac{\sin\left(\frac{n}{2}x\right)}{\sin\left(\frac{x}{2}\right)}.$$

3. Avec :

$$2\sin\left(\frac{n}{2}x\right)\cos\left(\frac{n+1}{2}x\right) = \sin\left(\frac{2n+1}{2}x\right) - \sin\left(\frac{x}{2}\right)$$

$(2\sin(a)\cos(b) = \sin(a+b)+\sin(a-b))$, on a :

$$2C_n(x) = \frac{\sin\left(\frac{2n+1}{2}x\right)}{\sin\left(\frac{x}{2}\right)} - 1.$$

4. On a :

$$\begin{aligned} T_n(x) = S_n'(x) &= \frac{n+1}{2}\cos\left(\frac{n+1}{2}x\right)\frac{\sin\left(\frac{n}{2}x\right)}{\sin\left(\frac{x}{2}\right)} \\ &+ \frac{n}{2}\sin\left(\frac{n+1}{2}x\right)\frac{\cos\left(\frac{n}{2}x\right)}{\sin\left(\frac{x}{2}\right)} - \frac{1}{2}\sin\left(\frac{n+1}{2}x\right)\frac{\sin\left(\frac{n}{2}x\right)\cos\left(\frac{x}{2}\right)}{\sin^2\left(\frac{x}{2}\right)} \end{aligned}$$

En exploitant :

$$\begin{aligned} \sin\left(\frac{2n+1}{2}x\right) &= \sin\left(\frac{n+1}{2}x + \frac{n}{2}x\right) \\ &= \sin\left(\frac{n+1}{2}x\right)\cos\left(\frac{n}{2}x\right) + \cos\left(\frac{n+1}{2}x\right)\sin\left(\frac{n}{2}x\right) \end{aligned}$$

on écrit que :

$$\cos\left(\frac{n+1}{2}x\right)\sin\left(\frac{n}{2}x\right) = \sin\left(\frac{2n+1}{2}x\right) - \sin\left(\frac{n+1}{2}x\right)\cos\left(\frac{n}{2}x\right)$$

et on a :

$$\begin{aligned}
T_n(x) &= \frac{n+1}{2\sin\left(\frac{x}{2}\right)}\left(\sin\left(\frac{2n+1}{2}x\right)-\sin\left(\frac{n+1}{2}x\right)\cos\left(\frac{n}{2}x\right)\right) \\
&\quad+\frac{n}{2}\sin\left(\frac{n+1}{2}x\right)\frac{\cos\left(\frac{n}{2}x\right)}{\sin\left(\frac{x}{2}\right)}-\frac{1}{2}\sin\left(\frac{n+1}{2}x\right)\frac{\sin\left(\frac{n}{2}x\right)\cos\left(\frac{x}{2}\right)}{\sin^2\left(\frac{x}{2}\right)} \\
&= \frac{n+1}{2}\frac{\sin\left(\frac{2n+1}{2}x\right)}{\sin\left(\frac{x}{2}\right)} \\
&\quad-\frac{1}{2}\sin\left(\frac{n+1}{2}x\right)\frac{\cos\left(\frac{n}{2}x\right)}{\sin\left(\frac{x}{2}\right)}-\frac{1}{2}\sin\left(\frac{n+1}{2}x\right)\frac{\sin\left(\frac{n}{2}x\right)\cos\left(\frac{x}{2}\right)}{\sin^2\left(\frac{x}{2}\right)} \\
&= \frac{n+1}{2}\frac{\sin\left(\frac{2n+1}{2}x\right)}{\sin\left(\frac{x}{2}\right)}-\frac{1}{2}\frac{\sin\left(\frac{n+1}{2}x\right)}{\sin^2\left(\frac{x}{2}\right)}\left(\cos\left(\frac{n}{2}x\right)\sin\left(\frac{x}{2}\right)+\sin\left(\frac{n}{2}x\right)\cos\left(\frac{x}{2}\right)\right) \\
&= \frac{n+1}{2}\frac{\sin\left(\frac{2n+1}{2}x\right)}{\sin\left(\frac{x}{2}\right)}-\frac{1}{2}\frac{\sin^2\left(\frac{n+1}{2}x\right)}{\sin^2\left(\frac{x}{2}\right)}
\end{aligned}$$

5. On a :

$$F_n(x)=1+2C_n(x)-\frac{2}{n+1}T_n(x)$$

avec :

$$2C_n(x)+1=\frac{\sin\left(\frac{2n+1}{2}x\right)}{\sin\left(\frac{x}{2}\right)}$$

(question **3.**) et :

$$\frac{2}{n+1}T_n(x)=\frac{\sin\left(\frac{2n+1}{2}x\right)}{\sin\left(\frac{x}{2}\right)}-\frac{1}{n+1}\frac{\sin^2\left(\frac{n+1}{2}x\right)}{\sin^2\left(\frac{x}{2}\right)},$$

ce qui donne :

$$F_n(x)=\frac{1}{n+1}\frac{\sin^2\left(\frac{n+1}{2}x\right)}{\sin^2\left(\frac{x}{2}\right)}.$$

La fonction F_n est en fait définie et continue sur $\mathbb{R}$ et la fonction $\varphi_n : x \mapsto \dfrac{1}{n+1}\dfrac{\sin^2\left(\frac{n+1}{2}x\right)}{\sin^2\left(\frac{x}{2}\right)}$ est continue sur $]0,\pi]$ avec $\lim\limits_{x\to 0^+}\varphi_n(x)=n+1$, elle se prolonge donc par continuité en 0 en posant $\varphi_n(0)=n+1$. Comme les fonctions F_n et φ_n sont continues sur $[0,\pi]$ et coïncident sur $]0,\pi[$, elles sont égales sur $[0,\pi]$.

6. Une intégration par parties donne :

$$\begin{aligned}
I_k &= \int_0^\pi x\cos(kx)\,dx=\left[\frac{x}{k}\sin(kx)\right]_0^\pi-\frac{1}{k}\int_0^\pi \sin(kx)\,dx \\
&= \frac{1}{k^2}\left[\cos(kx)\right]_0^\pi=\frac{(-1)^k-1}{k^2}.
\end{aligned}$$

7. En écrivant que, pour $k\geq 2$, on a :

$$k-1\leq t\leq k\Rightarrow \frac{1}{k}\leq\frac{1}{t}\Rightarrow\frac{1}{k}=\int_{k-1}^k\frac{dt}{k}\leq\int_{k-1}^k\frac{dt}{t},$$

on déduit que :

$$\sum_{k=2}^n\frac{1}{k}\leq\sum_{k=2}^n\int_{k-1}^k\frac{dt}{t}=\int_1^n\frac{dt}{t}=\ln(n)$$

et $\sum\limits_{k=1}^n\dfrac{1}{k}\leq\ln(n)+1$.

8. La fonction F_n est en fait définie et continue sur $\mathbb{R}$, donc G_n est bien définie. On a :

$$\begin{aligned}G_n &= \int_0^\pi x\left(1+2\sum_{k=1}^{n}\left(1-\frac{k}{n+1}\right)\cos(kx)\right)dx\\ &= \int_0^\pi xdx + 2\sum_{k=1}^{n}\left(1-\frac{k}{n+1}\right)\int_0^\pi x\cos(kx)\,dx\\ &= \frac{\pi^2}{2}+2\sum_{k=1}^{n}\left(1-\frac{k}{n+1}\right)\left(\frac{(-1)^k-1}{k^2}\right)\end{aligned}$$

soit :

$$G_n = \frac{\pi^2}{2}+2\sum_{k=1}^{n}\frac{(-1)^k-1}{k^2}-\frac{2}{n+1}\sum_{k=1}^{n}\frac{(-1)^k-1}{k}$$

avec :

$$\left|\sum_{k=1}^{n}\frac{(-1)^k-1}{k}\right| \leq 2\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k}\leq 2(\ln(n)+1).$$

On a donc :

$$G_n = \frac{\pi^2}{2}+2\sum_{k=1}^{n}\frac{(-1)^k-1}{k^2}+\alpha_n$$

avec :

$$|\alpha_n| = \frac{2}{n+1}\left|\sum_{k=1}^{n}\frac{(-1)^k-1}{k}\right| \leq 4\frac{\ln(n)+1}{n+1} \underset{n\to+\infty}{\to} 0$$

9. On a :

$$G_n = \frac{1}{n+1}\int_0^\pi x\frac{\sin^2\left(\frac{n+1}{2}x\right)}{\sin^2\left(\frac{x}{2}\right)}dx.$$

Pour $0\leq x\leq\pi$ on a $\sin\left(\frac{x}{2}\right)\geq\frac{x}{\pi}$, donc :

$$0\leq G_n\leq\frac{\pi^2}{n+1}\int_0^\pi\frac{\sin^2\left(\frac{n+1}{2}x\right)}{x}dx = \frac{\pi^2}{n+1}\int_0^{\frac{n+1}{2}\pi}\frac{\sin^2(u)}{u}du$$

avec :

$$\begin{aligned}\int_0^{\frac{n+1}{2}\pi}\frac{\sin^2(u)}{u}du &= \int_0^1\frac{\sin^2(u)}{u}du+\int_1^{\frac{n+1}{2}\pi}\frac{\sin^2(u)}{u}du\\ &\leq \int_0^1 du+\int_1^{\frac{n+1}{2}\pi}\frac{du}{u} = 1+\ln\left(\frac{n+1}{2}\pi\right)\end{aligned}$$

(sur $[0,1]$, on a $0\leq\frac{\sin(u)}{u}\leq 1$), ce qui donne :

$$0\leq G_n\leq\frac{\pi^2}{n+1}\left(1+\ln\left(\frac{n+1}{2}\pi\right)\right)$$

et $\lim\limits_{n\to+\infty} G_n = 0$.

10. De **8.** et $\lim\limits_{n\to+\infty} G_n=0$, on déduit que :

$$\lim_{n\to+\infty}\sum_{k=1}^{n}\frac{(-1)^k-1}{k^2} = -\frac{\pi^2}{4},$$

soit :

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n^2} - \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2} = -\frac{\pi^2}{4}$$

et avec $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n^2} = -\frac{1}{2} \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2}$, on déduit que :

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}, \ \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n^2} = -\frac{\pi^2}{12}.$$

– VI – Utilisation d'une intégrale double

On rappelle le théorème de convergence monotone tel qu'il figure au programme de l'agrégation interne.

Soit $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite croissante de fonctions à valeurs positives, définies sur un intervalle I, intégrables sur I et qui converge simplement sur I vers une fonction f. Si les fonctions f_n et f sont continues par morceaux sur tout segment de I et si la suite $\left(\int_I f_n(x)\,dx\right)_{n\in\mathbb{N}}$ est majorée alors la fonction f est intégrable sur I et $\int_I f(x)\,dx = \lim_{n\to+\infty} \int_I f_n(x)\,dx$.

En pratique les fonctions f_n et f sont continues par morceaux sur I.

On en déduit que si $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite de fonctions continues par morceaux, à valeurs positives et intégrables sur un intervalle I telle que la série de fonctions $\sum f_n$ converge simplement vers une fonction f continue par morceaux sur I, alors la fonction f est intégrable sur I si la série $\sum \int_I f_n(x)\,dx$ est convergente et dans ce cas, on a $\int_I f(x)\,dx = \sum_{n=0}^{+\infty} \int_I f_n(x)\,dx$.

1.

(a) Pour tout $y \in \left]0,1\right[$, on a :

$$-\frac{\ln(1-y)}{y} = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{y^{n-1}}{n}$$

les fonctions considérées étant toutes à valeurs positives et continues sur $\left]0,1\right[$. Tenant compte de $\sum_{n=1}^{+\infty} \int_0^1 \frac{y^{n-1}}{n} dy = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2} < +\infty$, on déduit du théorème de convergence monotone que :

$$-\int_0^1 \frac{\ln(1-y)}{y} dy = \sum_{n=1}^{+\infty} \int_0^1 \frac{y^{n-1}}{n} dy = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2}.$$

(b) Pour y fixé dans $\left]0,1\right[$, on a :

$$\int_0^1 \frac{dx}{1-xy} = \left[-\frac{\ln(1-xy)}{y}\right]_0^1 = -\frac{\ln(1-y)}{y}$$

et :

$$\int\int_{[0,1]^2} \frac{dxdy}{1-xy} = \int_0^1 \left(\int_0^1 \frac{dx}{1-xy}\right) dy = -\int_0^1 \frac{\ln(1-y)}{y} dy = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2}.$$

2.

(a) L'application $\varphi : (u,v) \mapsto (u-v, u+v)$ est linéaire bijective de $\mathbb{R}^2$ sur lui même (son déterminant vaut $2 \neq 0$) d'inverse $\varphi^{-1} : (x,y) \mapsto \left(\dfrac{x+y}{2}, \dfrac{y-x}{2} \right)$ et en conséquence réalise un $\mathcal{C}^1$-difféomorphisme de $\mathbb{R}^2$ sur lui même.

(b) L'image par φ^{-1} du carré $[0,1]^2$ est le carré $\mathcal{C}$ de sommets $\varphi^{-1}(0,0) = (0,0)$, $\varphi^{-1}(1,0) = \left(\dfrac{1}{2}, -\dfrac{1}{2} \right)$, $\varphi^{-1}(1,1) = (1,0)$ et $\varphi^{-1}(0,1) = \left(\dfrac{1}{2}, \dfrac{1}{2} \right)$. En effet, en désignant par (e_1, e_2) la base canonique de $\mathbb{R}^2$, un point du carré $[0,1]^2$ s'écrit $xe_1 + ye_2$ avec $0 \leq x, y \leq 1$ et son image par φ^{-1} est $x \left(\dfrac{1}{2}e_1 - \dfrac{1}{2}e_2 \right) + y \left(\dfrac{1}{2}e_1 - \dfrac{1}{2}e_2 \right)$, elle est donc dans le carré $\mathcal{C}$ et réciproquement tout point de $\mathcal{C}$ s'écrit $\varphi^{-1}(xe_1 + ye_2)$ avec $xe_1 + ye_2 \in [0,1]^2$).

(c) Si $g(u) = \arctan \left(\dfrac{u}{\sqrt{1-u^2}} \right)$, on a pour $u \in \left]0,1\right[$:

$$g'(u) = \frac{\sqrt{1-u^2} - u \frac{-u}{\sqrt{1-u^2}}}{1-u^2} \frac{1}{1 + \frac{u^2}{1-u^2}} = \frac{1}{\sqrt{1-u^2}} = \arcsin'(u)$$

et en conséquence $g(u) = \arcsin(u) + c$, où c est une constante réelle. Faisant tendre u vers 0, on a $c = 0$ et $g(u) = \arcsin(u)$.
De même, si $h(u) = \arctan \left(\dfrac{1-u}{\sqrt{1-u^2}} \right)$, on a pour $u \in \left]0,1\right[$:

$$h'(u) = \frac{-\sqrt{1-u^2} - (1-u) \frac{-u}{\sqrt{1-u^2}}}{1-u^2} \frac{1}{1 + \frac{(1-u)^2}{1-u^2}} = -\frac{1}{2\sqrt{1-u^2}} = -\frac{1}{2} \arcsin'(u)$$

et en conséquence $h(u) = -\dfrac{1}{2} \arcsin(u) + c$, où c est une constante réelle. Faisant tendre u vers 0, on a $c = \dfrac{\pi}{4}$ et $h(u) = \dfrac{\pi}{4} - \dfrac{1}{2} \arcsin(u)$.

(d) Le changement de variable $(x,y) = \varphi(u,v) = (u-v, u+v)$ nous donne $dxdy = 2dudv$ et :

$$\begin{aligned} I = \iint_{[0,1]^2} \frac{dxdy}{1-xy} &= 2 \iint_{\varphi^{-1}\left([0,1]^2\right)} \frac{dudv}{1-u^2+v^2} \\ &= 2 \left(\int_0^{\frac{1}{2}} \left(\int_{-u}^{u} \frac{dv}{1-u^2+v^2} \right) du + \int_{\frac{1}{2}}^{1} \left(\int_{-(1-u)}^{1-u} \frac{dv}{1-u^2+v^2} \right) du \right) \\ &= 4 \left(\int_0^{\frac{1}{2}} \left(\int_0^{u} \frac{dv}{1-u^2+v^2} \right) du + \int_{\frac{1}{2}}^{1} \left(\int_0^{1-u} \frac{dv}{1-u^2+v^2} \right) du \right) \end{aligned}$$

avec, pour u fixé dans $\left]0,1\right[$:

$$\begin{aligned} \int \frac{dv}{1-u^2+v^2} = \frac{1}{1-u^2} \int \frac{dv}{1 + \frac{v^2}{1-u^2}} &= \frac{1}{1-u^2} \int \frac{dv}{1 + \left(\frac{v}{\sqrt{1-u^2}} \right)^2} \\ &= \frac{1}{\sqrt{1-u^2}} \arctan \left(\frac{v}{\sqrt{1-u^2}} \right) \end{aligned}$$

ce qui donne :

$$\begin{aligned}\frac{I}{4} &= \int_0^{\frac{1}{2}} \frac{1}{\sqrt{1-u^2}} \arctan\left(\frac{u}{\sqrt{1-u^2}}\right) du + \int_{\frac{1}{2}}^1 \frac{1}{\sqrt{1-u^2}} \arctan\left(\frac{1-u}{\sqrt{1-u^2}}\right) du \\ &= \int_0^{\frac{1}{2}} \frac{\arcsin(u)}{\sqrt{1-u^2}} du + \int_{\frac{1}{2}}^1 \frac{1}{\sqrt{1-u^2}} \left(\frac{\pi}{4} - \frac{1}{2}\arcsin(u)\right) du \\ &= \left[\frac{\arcsin^2(u)}{2}\right]_0^{\frac{1}{2}} + \frac{\pi}{4}\left[\arcsin(u)\right]_{\frac{1}{2}}^1 - \frac{1}{2}\left[\frac{\arcsin^2(u)}{2}\right]_{\frac{1}{2}}^1 \\ &= \frac{\pi^2}{72} + \frac{\pi}{4}\left(\frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{6}\right) - \frac{1}{2}\left(\frac{\pi^2}{8} - \frac{\pi^2}{72}\right) = \frac{\pi^2}{24}\end{aligned}$$

et $I = \dfrac{\pi^2}{6}$.

– VII – Utilisation du théorème de Parseval

On rappelle que si $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ est une fonction continue par morceaux et 2π-périodique, alors ses coefficients de Fourier trigonométriques sont définis par :

$$\forall n \in \mathbb{N},\ a_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(t)\cos(nt)\, dt$$

et :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*,\ b_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(t)\sin(nt)\, dt$$

La série de Fourier de f est alors la série trigonométrique :

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{n\geq 1}(a_n\cos(nx) + b_n\sin(nx))$$

(écrire cette série ne signifie pas qu'elle converge !)

1. Comme f est impaire sur $]-\pi, \pi[$, les a_n sont tous nuls et les b_n sont donnés, pour $n \geq 1$, par :

$$\begin{aligned} b_n &= \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} t\sin(nt)\, dt = \frac{2}{\pi}\left[-\frac{t}{n}\cos(nt)\right]_0^{\pi} + \frac{2}{n\pi}\int_0^{\pi}\cos(nt)\, dt \\ &= 2\frac{(-1)^{n+1}}{n}.\end{aligned}$$

2. Comme f est continue par morceaux sur $\mathbb{R}$, le théorème de Parseval nous dit que :

$$\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} f^2(t)\, dt = \sum_{n=1}^{+\infty} b_n^2$$

soit :

$$4\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n^2} = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} t^2 dt = 2\frac{\pi^2}{3}$$

et $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}$.

– VIII – Utilisation du théorème de Dirichlet

1. Comme f est paire sur $[-\pi, \pi]$, les b_n sont tous nuls et les a_n sont donnés, pour $n \geq 1$, par :

$$\begin{aligned} a_n &= \frac{2}{\pi} \int_0^\pi t \cos(nt)\, dt = \frac{2}{\pi} \left[\frac{t}{n} \sin(nt) \right]_0^\pi - \frac{2}{n\pi} \int_0^\pi \sin(nt)\, dt \\ &= \frac{2}{\pi n^2} [\cos(nt)]_0^\pi = \frac{2}{\pi n^2} ((-1)^n - 1). \end{aligned}$$

Pour $n = 0$, on a :

$$a_0 = \frac{2}{\pi} \int_0^\pi t dt = \pi$$

2. Comme f est continue et $\mathcal{C}^1$ par morceaux sur $\mathbb{R}$, le théorème de Dirichlet nous dit que pour tout réel x, on a :

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{+\infty} a_n \cos(nx)$$

soit, pour $x \in [-\pi, \pi]$:

$$|x| = \frac{\pi}{2} - \frac{4}{\pi} \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{\cos((2n+1)x)}{(2n+1)^2}$$

Prenant $x = 0$, on déduit que :

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{(2n+1)^2} = \frac{\pi^2}{8}$$

et :

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{4}{3} \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{(2n+1)^2} = \frac{\pi^2}{6}.$$

– IX – Utilisation des théorèmes d'Abel et de convergence dominée

On rappelle le théorème de convergence dominée tel qu'il figure au programme de l'agrégation interne.

Soit $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de fonctions définies sur un intervalle I, à valeurs complexes et qui converge simplement sur I vers une fonction f. Si les fonctions f_n et f sont continues par morceaux sur tout segment de I et s'il existe une fonction $\varphi : I \to \mathbb{R}^+$ intégrable telle que $|f_n(x)| \leq \varphi(x)$ pour tout $n \in \mathbb{N}$ et tout $x \in I$, alors les fonctions f_n et f sont intégrables sur I et $\int_I f(x)\, dx = \lim_{n\to+\infty} \int_I f_n(x)\, dx$.

1. Pour tout entier $n \geq 1$, tout réel x et tout réel $t \in]-1, 1[$, on note :

$$S_n(x,t) = \sum_{k=1}^{n} t^{k-1} \sin(kx)$$

la somme partielle de la série considérée.
On a :

$$\begin{aligned} S_n(x,t) &= \Im\left(\sum_{k=1}^{n} t^{k-1} e^{ikx} \right) = \Im\left(e^{ix} \sum_{k=1}^{n} \left(te^{ix}\right)^{k-1} \right) = \Im\left(e^{ix} \sum_{k=0}^{n-1} \left(te^{ix}\right)^{k} \right) \\ &= \Im\left(e^{ix} \frac{1 - t^n e^{inx}}{1 - te^{ix}} \right) \end{aligned}$$

et pour $|t| < 1$, on a :

$$\begin{aligned}\lim_{n\to+\infty} S_n(x,t) &= \Im\left(\frac{e^{ix}}{1-te^{ix}}\right) = \frac{1}{|1-te^{ix}|^2}\Im\left(e^{ix}-t\right)\\ &= \frac{\sin(x)}{1-2t\cos(x)+t^2} = f(x,t)\,.\end{aligned}$$

2. Pour tout $x \in]0,\pi[$, on a :

$$\begin{aligned}\int_0^1 f(x,t)\,dt &= \sin(x)\int_0^1 \frac{dt}{1-2t\cos(x)+t^2} = \sin(x)\int_0^1 \frac{dt}{(t-\cos(x))^2+\sin^2(x)}\\ &= \frac{1}{\sin(x)}\int_0^1 \frac{dt}{1+\left(\dfrac{t-\cos(x)}{\sin(x)}\right)^2}\end{aligned}$$

($\sin(x) \neq 0$ pour $x \in]0,\pi[$) et le changement de variable $u = \dfrac{t-\cos(x)}{\sin(x)}$ nous donne :

$$\begin{aligned}\int_0^1 f(x,t)\,dt &= \int_{-\frac{\cos(x)}{\sin(x)}}^{\frac{1-\cos(x)}{\sin(x)}} \frac{du}{1+u^2} = \int_{-\operatorname{cotan}(x)}^{\tan\left(\frac{x}{2}\right)} \frac{du}{1+u^2}\\ &= \arctan\left(\tan\left(\frac{x}{2}\right)\right) + \arctan(\operatorname{cotan}(x))\\ &= \frac{x}{2} + \arctan(\operatorname{cotan}(x))\end{aligned}$$

et avec $\arctan(\operatorname{cotan}(x)) = \dfrac{\pi}{2} - x$ (cette fonction est définie et dérivable sur $]0,\pi[$ de dérivée $-\dfrac{1}{\sin^2(x)}\dfrac{1}{1+\frac{\cos^2(x)}{\sin^2(x)}} = -1$, elle est donc égale à $-x+c$ et $x = \dfrac{\pi}{2}$ donne $c = \dfrac{\pi}{2}$), on déduit que $\displaystyle\int_0^1 f(x,t)\,dt = \frac{\pi - x}{2}$.

3. Pour x fixé dans $]0,\pi[$, la suite de fonctions $(S_n(x,\cdot))_{n\geq 1}$ converge simplement sur $]0,1[$ vers la fonction $t \mapsto f(x,t)$, toutes les fonctions considérées étant continues sur $]0,1[$ avec :

$$\begin{aligned}|S_n(x,t)| &= \left|\Im\left(e^{ix}\frac{1-t^ne^{inx}}{1-te^{ix}}\right)\right| \leq \left|e^{ix}\frac{1-t^ne^{inx}}{1-te^{ix}}\right|\\ &\leq \frac{2}{|1-te^{ix}|^2} = \frac{2}{1-2t\cos(x)+t^2} = \varphi(t)\end{aligned}$$

la fonction φ étant continue sur $[0,1]$, donc intégrable. On déduit alors du théorème de convergence dominée que :

$$\begin{aligned}\frac{\pi-x}{2} &= \int_0^1 f(x,t)\,dt = \lim_{n\to+\infty}\int_0^1 S_n(x,t)\,dt = \lim_{n\to+\infty}\int_0^1\left(\sum_{k=1}^n t^{k-1}\sin(kx)\right)dt\\ &= \lim_{n\to+\infty}\sum_{k=1}^n \frac{\sin(kx)}{k} = \sum_{n=1}^{+\infty}\frac{\sin(nx)}{n}.\end{aligned}$$

4.

(a) Avec $\left|\dfrac{\cos(nx)}{n^2}\right| \leq \dfrac{1}{n^2}$, on déduit que la série converge normalement, donc uniformément convergente sur $\mathbb{R}$.

Les fonctions $x \mapsto \dfrac{\cos(nx)}{n^2}$ étant continues sur $\mathbb{R}$, il en est de même de F puisque la convergence de la série de fonctions est uniforme.

(b) Pour $x \in \left]0, \pi\right[$, on a :

$$\sum_{k=1}^{n} \sin(kx) = \sum_{k=0}^{n} \sin(kx) = \Im\left(\sum_{k=0}^{n} e^{ikx}\right) = \Im\left(\frac{1 - e^{i(n+1)x}}{1 - e^{ix}}\right)$$
$$= \Im\left(\frac{e^{i\frac{n+1}{2}x}}{e^{i\frac{x}{2}}} \frac{e^{-i\frac{n+1}{2}x} - e^{i\frac{n+1}{2}x}}{e^{-i\frac{x}{2}} - e^{i\frac{x}{2}}}\right) = \Im\left(e^{i\frac{n}{2}x} \frac{\sin\left(\frac{n+1}{2}x\right)}{\sin\left(\frac{x}{2}\right)}\right)$$

et :

$$\left|\sum_{k=1}^{n} \sin(kx)\right| \leq \left|e^{i\frac{n}{2}x} \frac{\sin\left(\frac{n+1}{2}x\right)}{\sin\left(\frac{x}{2}\right)}\right| \leq \frac{1}{\sin\left(\frac{x}{2}\right)}$$

(c) Chaque fonction $x \mapsto \dfrac{\cos(nx)}{n^2}$ est continue sur $\mathbb{R}$ de dérivée $x \mapsto -\dfrac{\sin(nx)}{n}$.

Pour $x \in \left]0, \pi\right[$ et $n \geq 1$, on a $\left|\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \sin(kx)\right| \leq \dfrac{1}{\sin\left(\frac{x}{2}\right)}$ et la suite $\left(\dfrac{1}{n}\right)_{n \geq 1}$ tend vers 0 en décroissant, le théorème d'Abel nous dit alors que la série $\sum \dfrac{\sin(nx)}{n}$ est convergente (ce que l'on sait déjà avec $\dfrac{\pi - x}{2}$ pour somme) et qu'on a la majoration des restes :

$$|R_n(x)| = \left|\frac{\pi - x}{2} - \sum_{k=1}^{n} \frac{\sin(kx)}{k}\right| \leq \frac{2}{\sin\left(\frac{x}{2}\right)} \frac{1}{n+1}.$$

Pour $\varepsilon \in \left]0, \pi\right[$ et $x \in [\varepsilon, \pi - \varepsilon]$, on a $\sin\left(\dfrac{x}{2}\right) \geq \sin\left(\dfrac{\varepsilon}{2}\right)$ (la fonction sin est croissante sur $\left[0, \dfrac{\pi}{2}\right]$) et $|R_n(x)| \leq \dfrac{2}{\sin\left(\frac{\varepsilon}{2}\right)} \dfrac{1}{n+1}$ pour tout $n \geq 1$. La série $\sum \dfrac{\sin(nx)}{n}$ est donc uniformément convergente sur $[\varepsilon, \pi - \varepsilon]$ pour tout $\varepsilon \in \left]0, \pi\right[$.

Il en résulte que la fonction F est dérivable sur $\left]0, \pi\right[$ de dérivée $F'(x) = -\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\sin(nx)}{n} = \frac{x - \pi}{2}$.

(d) On a :

$$F(\pi) - F(0) = \lim_{\varepsilon \to 0} F(\pi - \varepsilon) - F(\varepsilon) = \lim_{\varepsilon \to 0} \int_{\varepsilon}^{\pi - \varepsilon} F'(t)\, dt$$
$$= \lim_{\varepsilon \to 0} \int_{\varepsilon}^{\pi - \varepsilon} \frac{t - \pi}{2} dt = \int_{0}^{\pi} \frac{t - \pi}{2} dt = -\frac{\pi^2}{4}$$

avec $F(0) = \displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2}$ et $F(\pi) = \displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n^2} = -\frac{1}{2} \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2}$, ce qui donne :

$$\frac{3}{2} F(0) = \frac{3}{2} \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{4}$$

et $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}$.

– X – Utilisation des polynômes de Tchebychev et de développements limités

1. Pour $n = 0$, $P_0 = Q_0 = 1$ conviennent.
   Pour $n = 1$, on a :

$$\begin{aligned}\sin(3x) &= \sin(x)\cos(2x) + \cos(x)\sin(2x)\\ &= \sin(x)\left(1 - 2\sin^2(x)\right) + 2\cos^2(x)\sin(x)\\ &= \sin(x)\left(1 - 2\sin^2(x)\right) + 2\left(1 - \sin^2(x)\right)\sin(x)\\ &= \sin(x)\left(3 - 4\sin^2(x)\right)\end{aligned}$$

   et :

$$\begin{aligned}\cos(3x) &= \cos(x)\cos(2x) - \sin(x)\sin(2x)\\ &= \cos(x)\left(1 - 2\sin^2(x)\right) - 2\sin^2(x)\cos(x)\\ &= \cos(x)\left(1 - 4\sin^2(x)\right)\end{aligned}$$

   donc $P_1(t) = 3 - 4t$ et $Q_1(t) = 1 - 4t$.
   Supposant le résultat acquis jusqu'au rang $n - 1 \geq 1$, les polynômes P_{n-1} et Q_{n-1} ayant le même coefficient dominant $\alpha_{n-1} = (-1)^{n-1} 4^{n-1}$, on a :

$$\begin{aligned}\sin((2n+1)x) &= \sin(2x + (2n-1)x)\\ &= \sin(2x)\cos((2n-1)x) + \cos(2x)\sin((2n-1)x)\\ &= 2\sin(x)\cos^2(x)\,Q_{n-1}\left(\sin^2(x)\right) + \left(1 - 2\sin^2(x)\right)\sin(x)\,P_{n-1}\left(\sin^2(x)\right)\\ &= \sin(x)\left(2\left(1 - \sin^2(x)\right)Q_{n-1}\left(\sin^2(x)\right) + \left(1 - 2\sin^2(x)\right)P_{n-1}\left(\sin^2(x)\right)\right)\\ &= \sin(x)\,P_n\left(\sin^2(x)\right)\end{aligned}$$

   avec :

$$P_n(t) = 2(1-t)\,Q_{n-1}(t) + (1-2t)\,P_{n-1}(t)$$

   et :

$$P_n(0) = 2Q_{n-1}(0) + P_{n-1}(0) = 2 + 2n - 1 = 2n + 1.$$

   Le polynôme P_n est de degré n avec pour coefficient dominant $\alpha_n = -4\alpha_{n-1} = (-1)^n 4^n$.
   De manière analogue, on a :

$$\begin{aligned}\cos((2n+1)x) &= \cos(2x + (2n-1)x)\\ &= \cos(2x)\cos((2n-1)x) - \sin(2x)\sin((2n-1)x)\\ &= \left(1 - 2\sin^2(x)\right)\cos(x)\,Q_{n-1}\left(\sin^2(x)\right) - 2\sin^2(x)\cos(x)\,P_{n-1}\left(\sin^2(x)\right)\\ &= \cos(x)\left(\left(1 - 2\sin^2(x)\right)Q_{n-1}\left(\sin^2(x)\right) - 2\sin^2(x)\,P_{n-1}\left(\sin^2(x)\right)\right)\\ &= \cos(x)\,Q_n\left(\sin^2(x)\right)\end{aligned}$$

   avec :

$$Q_n(t) = (1-2t)\,Q_{n-1}(t) - 2tP_{n-1}(t)$$

   et :

$$Q_n(0) = Q_{n-1}(0) = 1.$$

   Le polynôme Q_n est de degré n avec pour coefficient dominant $\alpha_n = -4\alpha_{n-1} = (-1)^n 4^n$.

2. On peut aussi écrire que :

$$e^{i(2n+1)x} = \cos((2n+1)x) + i\sin((2n+1)x)$$

avec :

$$\begin{aligned}
e^{i(2n+1)x} &= (\cos(x) + i\sin(x))^{2n+1} \\
&= \sum_{k=0}^{2n+1} C_{2n+1}^{k} \cos^{2n+1-k} i^k \sin^k(x) \\
&= \sum_{k=0}^{n} C_{2n+1}^{2k} \cos^{2n+1-2k} (-1)^k \sin^{2k}(x) + i \sum_{k=0}^{n} C_{2n+1}^{2k+1} \cos^{2n-2k} (-1)^k \sin^{2k+1}(x) \\
&= \cos(x) \sum_{k=0}^{n} (-1)^k C_{2n+1}^{2k} \left(1 - \sin^2(x)\right)^{n-k} \sin^{2k}(x) \\
&+ i\sin(x) \sum_{k=0}^{n} (-1)^k C_{2n+1}^{2k+1} \left(1 - \sin^2(x)\right)^{n-k} \sin^{2k}(x)
\end{aligned}$$

ce qui donne $\cos((2n+1)x) = \cos(x) Q_n\left(\sin^2(x)\right)$ et $\sin((2n+1)x) = \sin(x) P_n\left(\sin^2(x)\right)$ avec $Q_n(t) = \sum_{k=0}^{n} (-1)^k C_{2n+1}^{2k} (1-t)^{n-k} t^k$ et $P_n(t) = \sum_{k=0}^{n} (-1)^k C_{2n+1}^{2k+1} (1-t)^{n-k} t^k$.
Ces polynômes sont de degré n.
Le coefficient dominant de P_n et de Q_n est :

$$\alpha_n = (-1)^n \sum_{k=0}^{n} C_{2n+1}^{2k+1} = (-1)^n \sum_{k=0}^{n} C_{2n+1}^{2k} = 4^n$$

ces dernières égalités étant déduites de :

$$2^{2n+1} = (1+1)^{2n+1} = \sum_{k=0}^{2n+1} C_{2n+1}^{k} = \sum_{k=0}^{n} C_{2n+1}^{2k} + \sum_{k=0}^{n} C_{2n+1}^{2k+1}$$

$$0 = (1-1)^{2n+1} = \sum_{k=0}^{2n+1} C_{2n+1}^{k} (-1)^k = \sum_{k=0}^{n} C_{2n+1}^{2k} - \sum_{k=0}^{n} C_{2n+1}^{2k+1}$$

qui donnent par addition :

$$2^{2n+1} = 2 \cdot 4^n = 2\sum_{k=0}^{n} C_{2n+1}^{2k}$$

et par soustraction :

$$2^{2n+1} = 2 \cdot 4^n = 2\sum_{k=0}^{n} C_{2n+1}^{2k+1}.$$

On a aussi :

$$P_n(0) = C_{2n+1}^{1} = 2n+1, \; Q_n(0) = C_{2n+1}^{0} = 1.$$

3. Pour k entier compris entre 1 et n, on a :

$$0 = \sin\left((2n+1)\frac{k\pi}{2n+1}\right) = \sin\left(\frac{k\pi}{2n+1}\right) P_n\left(\sin^2\left(\frac{k\pi}{2n+1}\right)\right)$$

avec $\sin\left(\frac{k\pi}{2n+1}\right) \neq 0$ (pour $1 \leq k \leq n$, on a $0 < \frac{k\pi}{2n+1} < \frac{\pi}{2}$), donc $P_n\left(\sin^2\left(\frac{k\pi}{2n+1}\right)\right) = 0$.
Les $x_k = \sin^2\left(\frac{k\pi}{2n+1}\right)$ nous fournissent donc n racines distinctes de P_n (la fonction sin est strictement croissante sur $\left]0, \frac{\pi}{2}\right[$) et ont les a toutes.

4. On a donc :

$$P_n(t) = (-1)^n 4^n \prod_{k=1}^{n} \left(t - \sin^2\left(\frac{k\pi}{2n+1}\right)\right)$$

et :

$$\begin{aligned}\sin((2n+1)x) &= (-1)^n 4^n \sin(x) \prod_{k=1}^{n} \left(\sin^2(x) - \sin^2\left(\frac{k\pi}{2n+1}\right)\right)\\ &= (-1)^n 4^n \sin(x) \prod_{k=1}^{n} \sin^2\left(\frac{k\pi}{2n+1}\right) \prod_{k=1}^{n} \left(\frac{\sin^2(x)}{\sin^2\left(\frac{k\pi}{2n+1}\right)} - 1\right)\end{aligned}$$

avec :

$$2n+1 = P_n(0) = 4^n \prod_{k=1}^{n} \sin^2\left(\frac{k\pi}{2n+1}\right)$$

ce qui donne :

$$\sin((2n+1)x) = (2n+1)\sin(x) \prod_{k=1}^{n} \left(1 - \frac{\sin^2(x)}{\sin^2\left(\frac{k\pi}{2n+1}\right)}\right) = \varphi_n(x)$$

5. En identifiant les coefficients de x^3 dans les développements limités de :

$$\sin((2n+1)x) = (2n+1)x - \frac{(2n+1)^3}{6}x^3 + o(x^3)$$

et de :

$$\begin{aligned}\varphi_n(x) &= (2n+1)\left(x - \frac{x^3}{6} + o(x^3)\right) \prod_{k=1}^{n} \left(1 - \frac{x^2}{\sin^2\left(\frac{k\pi}{2n+1}\right)} + o(x^3)\right)\\ &= (2n+1)\left(x - \frac{x^3}{6} + o(x^3)\right)\left(1 - \left(\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{\sin^2\left(\frac{k\pi}{2n+1}\right)}\right)x^2 + o(x^3)\right)\\ &= (2n+1)\left(x - \left(\frac{1}{6} + \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{\sin^2\left(\frac{k\pi}{2n+1}\right)}\right)x^3 + o(x^3)\right)\end{aligned}$$

on a :

$$-\frac{(2n+1)^3}{6} = -\frac{2n+1}{6} - (2n+1)\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{\sin^2\left(\frac{k\pi}{2n+1}\right)}$$

soit :

$$(2n+1)^2 = 1 + 6\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{\sin^2\left(\frac{k\pi}{2n+1}\right)}$$

ou encore :

$$\frac{1}{(2n+1)^2} = 1 - \frac{6}{(2n+1)^2}\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{\sin^2\left(\frac{k\pi}{2n+1}\right)}$$

6.

(a) On se fixe un entier $n_0 \geq 1$ et pour $n > n_0$, on a :

$$1 - \frac{6}{(2n+1)^2}\sum_{k=1}^{n_0} \frac{1}{\sin^2\left(\frac{k\pi}{2n+1}\right)} = \frac{1}{(2n+1)^2} + \frac{6}{(2n+1)^2}\sum_{k=n_0+1}^{n} \frac{1}{\sin^2\left(\frac{k\pi}{2n+1}\right)}$$

En utilisant les inégalités $\sin\left(\dfrac{k\pi}{2n+1}\right) \geq \dfrac{2}{\pi}\dfrac{k\pi}{2n+1} = \dfrac{2k}{2n+1}$ (on a $0 < \dfrac{k\pi}{2n+1} < \dfrac{\pi}{2}$ pour k compris entre 1 et n), on déduit que :

$$0 \leq 1 - \frac{6}{(2n+1)^2}\sum_{k=1}^{n_0}\frac{1}{\sin^2\left(\frac{k\pi}{2n+1}\right)} \leq \frac{1}{(2n+1)^2} + \frac{6}{(2n+1)^2}\sum_{k=n_0+1}^{n}\frac{(2n+1)^2}{4k^2}$$

soit :

$$0 \leq 1 - \frac{6}{(2n+1)^2}\sum_{k=1}^{n_0}\frac{1}{\sin^2\left(\frac{k\pi}{2n+1}\right)} \leq \frac{1}{(2n+1)^2} + \frac{3}{2}\sum_{k=n_0+1}^{n}\frac{1}{k^2}$$

(b) Avec $\lim\limits_{n\to+\infty}(2n+1)^2\sin^2\left(\dfrac{k\pi}{2n+1}\right) = k^2\pi^2$ pour tout k compris entre 1 et n, on déduit de ce qui précède que, pour tout entier $n_0 \geq 1$, on a :

$$0 \leq 1 - \frac{6}{\pi^2}\sum_{k=1}^{n_0}\frac{1}{k^2} \leq \frac{3}{2}\sum_{k=n_0+1}^{+\infty}\frac{1}{k^2}$$

(c) Faisant tendre n_0 vers l'infini, on déduit que $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n^2}\frac{6}{\pi^2} = 1$, ou encore que $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}$.

– X – Une courte preuve due à Euler

1. Pour $x \in \mathbb{R} \setminus \pi\mathbb{Z}$, la suite $\left(\dfrac{x^2}{n^2\pi^2}\right)_{n\in\mathbb{N}}$ est formée de réels positifs tous différents de 1 et cette suite tend vers 0, donc le produit infini $\prod\left(1 - \dfrac{t^2}{n^2\pi^2}\right)$ est strictement convergent (voir le cours sur les produits infinis).
2. En utilisant la relation, $1 = \cos^2(x) + \sin^2(x)$, on a, pour k compris entre 1 et n :

$$\begin{aligned}
1 - \frac{\sin^2(x)}{\sin^2\left(\frac{k\pi}{2n+1}\right)} &= \cos^2(x) + \sin^2(x)\left(1 - \frac{1}{\sin^2\left(\frac{k\pi}{2n+1}\right)}\right) \\
&= \cos^2(x) + \sin^2(x)\left(\frac{\sin^2\left(\frac{k\pi}{2n+1}\right) - 1}{\sin^2\left(\frac{k\pi}{2n+1}\right)}\right) \\
&= \cos^2(x) - \sin^2(x)\left(\frac{\cos^2\left(\frac{k\pi}{2n+1}\right)}{\sin^2\left(\frac{k\pi}{2n+1}\right)}\right) \\
&= \cos^2(x) - \frac{\sin^2(x)}{\tan^2\left(\frac{k\pi}{2n+1}\right)}
\end{aligned}$$

ce qui donne pour $x \in \left]-\dfrac{\pi}{2}, \dfrac{\pi}{2}\right[$:

$$1 - \frac{\sin^2(x)}{\sin^2\left(\frac{k\pi}{2n+1}\right)} = \cos^2(x)\left(1 - \frac{\tan^2(x)}{\tan^2\left(\frac{k\pi}{2n+1}\right)}\right)$$

et :

$$\begin{aligned}\sin\left((2n+1)\,x\right) &= (2n+1)\sin(x)\prod_{k=1}^{n}\left(\cos^2(x)\left(1-\frac{\tan^2(x)}{\tan^2\left(\frac{k\pi}{2n+1}\right)}\right)\right)\\ &= (2n+1)\sin(x)\cos^{2n}(x)\prod_{k=1}^{n}\left(1-\frac{\tan^2(x)}{\tan^2\left(\frac{k\pi}{2n+1}\right)}\right)\\ &= (2n+1)\tan(x)\cos^{2n+1}(x)\prod_{k=1}^{n}\left(1-\frac{\tan^2(x)}{\tan^2\left(\frac{k\pi}{2n+1}\right)}\right)\end{aligned}$$

3. Pour y fixé dans $\left]0,\frac{\pi}{2}\right[$, on désigne par f la fonction définie sur $[0,y]$ par $f(x)=y\sin(x)-x\sin(y)$. Cette fonction est indéfiniment dérivable avec $f'(x)=y\cos(x)-\sin(y)$ et $f''(x)=-y\sin(x)<0$ pour $x\in\left]0,y\right]$, donc f' est strictement décroissante sur $[0,y]$. Comme $f(0)=f(y)=0$, le théorème de Rolle nous dit qu'il existe $c\in\left]0,y\right[$ tel que $f'(c)=0$ et avec la stricte décroissance de f', on déduit que $f'(x)>0=f'(c)$ sur $\left]0,c\right[$ et $f'(x)<0$ sur $\left]c,y\right[$. La fonction f est donc strictement croissante sur $\left]0,c\right[$, strictement décroissante sur $\left]c,y\right[$ avec $f(0)=f(y)=0$ et en conséquence $f(x)>0$ sur $\left]0,y\right[$ (f est strictement concave sur $[0,y]$), ce qui équivaut à $\dfrac{x}{y}<\dfrac{\sin(x)}{\sin(y)}$.
   Une étude analogue donne $\dfrac{\tan(x)}{\tan(y)}<\dfrac{x}{y}$.
4. Si $u_n=\cos^n\left(\dfrac{x}{n}\right)$, on a
$$\ln(u_n)=n\ln\left(1-\frac{x^2}{2n^2}+o\left(\frac{1}{n^2}\right)\right)=-\frac{x^2}{2n}+o\left(\frac{1}{n}\right)$$
   donc $\lim\limits_{n\to+\infty}\ln(u_n)=0$ et $\lim\limits_{n\to+\infty}u_n=1$.
5. Pour $x\in\left]0,\pi\right[$ et $n\geq 1$, on a :
$$\begin{aligned}\sin(x) &= \sin\left((2n+1)\frac{x}{2n+1}\right)\\ &= (2n+1)\sin\left(\frac{x}{2n+1}\right)\prod_{k=1}^{n}\left(1-\frac{\sin^2\left(\frac{x}{2n+1}\right)}{\sin^2\left(\frac{k\pi}{2n+1}\right)}\right)\end{aligned}$$
   avec :
$$0<\frac{x}{2n+1}<\frac{k\pi}{2n+1}<\frac{\pi}{2}$$
   pour k compris entre 1 et n, ce qui donne :
$$0<\frac{x}{k\pi}=\frac{\frac{x}{2n+1}}{\frac{k\pi}{2n+1}}<\frac{\sin\left(\frac{x}{2n+1}\right)}{\sin\left(\frac{k\pi}{2n+1}\right)}<1$$
   et :
$$0<1-\frac{\sin^2\left(\frac{x}{2n+1}\right)}{\sin^2\left(\frac{k\pi}{2n+1}\right)}<1-\frac{x^2}{k^2\pi^2}$$
   Tenant compte de $\sin\left(\dfrac{x}{2n+1}\right)<\dfrac{x}{2n+1}$, il en résulte que :
$$\begin{aligned}\sin(x) &< (2n+1)\sin\left(\frac{x}{2n+1}\right)\prod_{k=1}^{n}\left(1-\frac{x^2}{k^2\pi^2}\right)\\ &< x\prod_{k=1}^{n}\left(1-\frac{x^2}{k^2\pi^2}\right)\end{aligned}$$

et faisant tendre n vers l'infini, on en déduit que :

$$\sin(x) \leq x \prod_{n=1}^{+\infty} \left(1 - \frac{x^2}{n^2\pi^2}\right)$$

(on sait que le produit infini converge).
Pour $x \in]0, \pi[$ et $n \geq 1$, on a $\dfrac{x}{2n+1} \in \left]0, \dfrac{\pi}{2}\right[$ et :

$$\begin{aligned}
\sin(x) &= \sin\left((2n+1)\frac{x}{2n+1}\right) \\
&= (2n+1)\tan\left(\frac{x}{2n+1}\right)\cos^{2n+1}\left(\frac{x}{2n+1}\right)\prod_{k=1}^{n}\left(1 - \frac{\tan^2\left(\frac{x}{2n+1}\right)}{\tan^2\left(\frac{k\pi}{2n+1}\right)}\right)
\end{aligned}$$

avec :

$$0 < \frac{\tan\left(\frac{x}{2n+1}\right)}{\tan\left(\frac{k\pi}{2n+1}\right)} < \frac{x}{k\pi} < 1$$

pour k compris entre 1 et n et :

$$0 < 1 - \frac{x^2}{k^2\pi^2} < 1 - \frac{\tan^2\left(\frac{x}{2n+1}\right)}{\tan^2\left(\frac{k\pi}{2n+1}\right)}$$

Tenant compte de $\tan\left(\dfrac{x}{2n+1}\right) > \dfrac{x}{2n+1}$, il en résulte que :

$$\sin(x) > x\cos^{2n+1}\left(\frac{x}{2n+1}\right)\prod_{k=1}^{n}\left(1 - \frac{x^2}{k^2\pi^2}\right)$$

et faisant tendre n vers l'infini, on en déduit que :

$$\sin(x) \geq x \prod_{n=1}^{+\infty} \left(1 - \frac{x^2}{n^2\pi^2}\right)$$

et $\sin(x) = x\displaystyle\prod_{n=1}^{+\infty}\left(1 - \frac{x^2}{n^2\pi^2}\right)$ pour $x \in]0, \pi[$.
Ce résultat est valable pour $x \in \{-\pi, 0, \pi\}$ et par parité, cette identité est encore valable pour $x \in [-\pi, \pi]$.

6. Le coefficient de x^3 dans le développement limité à l'ordre 3 de ce produit infini est égal $-\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n^2\pi^2}$, mais c'est aussi celui de x^3 dans la développement de $\sin(x)$, soit $-\dfrac{1}{6}$, ce qui donne le résultat. Il faudrait en fait justifier un peu plus sérieusement la première affirmation.