Décomposition de Dunford-Schwarz

Pour ce problème, E est un espace vectoriel de dimension $n \geq 1$ sur un corps commutatif $\mathbb{K}$ et $\mathcal{L}(E)$ est l'algèbre des endomorphismes de E.

On se donne $u \in \mathcal{L}(E)$ et $P_u(X) = \det(u - XId)$ désigne le polynôme caractéristique de u.

On rappelle que pour tout polynôme $P(X) = \sum\limits_{k=0}^{p} a_k X^k$, $P(u)$ est l'endomorphisme de E défini par :

$$P(u) = a_0 Id + a_1 u + \cdots + a_p u^p$$

où $u^k = u \circ \cdots \circ u$, cette composition étant effectuée k fois pour $k \geq 1$ et $u^0 = Id$. On vérifie alors que $\mathbb{K}[u] = \{P(u) \mid P \in \mathbb{K}[X]\}$ est une algèbre unitaire commutative.

$\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ désigne l'algèbre des matrices carrées d'ordre n à coefficients dans $\mathbb{K}$.

– I – Généralités

1. Soient p un entier supérieur ou égal à 2, $P_1, \cdots, P_p$ des polynômes non nuls dans $\mathbb{K}[X]$ et $Q_1, \cdots, Q_p$ les polynômes définis par $Q_k = \prod\limits_{\substack{j=1 \\ j \neq k}}^{p} P_j$ pour tout k compris entre 1 et p. Montrer que si les polynômes P_k sont deux à deux premiers entre eux dans $\mathbb{K}[X]$, alors les polynômes Q_k sont premiers entre eux dans leur ensemble et pour tout k compris entre 1 et p, les polynômes P_k et Q_k sont premiers entre eux.
2. Soient p un entier supérieur ou égal à 2, $P_1, \cdots, P_p$ des polynômes non nuls dans $\mathbb{K}[X]$ deux à deux premiers entre eux et $P = \prod\limits_{k=1}^{p} P_k$.
   Montrer que :
   $$\ker(P(u)) = \bigoplus_{k=1}^{p} \ker(P_k(u))$$
   les projecteurs $\pi_k : \ker(P(u)) \to \ker(P_k(u))$, pour k compris entre 1 et p, étant des éléments de $\mathbb{K}[u]$ (théorème de décomposition des noyaux).
3. Soient p un entier supérieur ou égal à 2 et :
   $$P(X) = \prod_{k=1}^{p} (X - \lambda_k)^{\alpha_k},$$
   un polynôme scindé sur $\mathbb{K}$, où les α_k sont des entiers naturels non nuls et les λ_k des scalaires deux à deux distincts. En utilisant la décomposition en éléments simples de la fraction rationnelle $\frac{1}{P}$, donner une expression des projecteurs π_k de $\ker(P(u))$ sur $\ker(P_k(u))$ pour tout k compris entre 1 et p.
4. Justifier l'existence et l'unicité d'un polynôme unitaire de plus petit degré qui annule u.
   Ce polynôme est noté π_u et on dit que c'est le polynôme minimal de u.
   On définit de manière analogue le polynôme minimal π_A d'une matrice $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ et on vérifie que si A est la matrice de u dans une base de E, alors $\pi_u = \pi_A$.
5. Montrer que si F est un sous espace vectoriel de E stable par u, alors le polynôme caractéristique de la restriction de u à F divise celui de u.

6. On propose ici une démonstration du théorème de Cayley-Hamilton qui nous dit que $P_u(u) = 0$, ce qui est encore équivalent à dire que π_u divise P_u.
En désignant par A la matrice de u, dans une base de E, il est équivalent de montrer que $P_A(A) = 0$.
On considère la matrice $A - XI_n$ comme un élément de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K}(X))$ où $\mathbb{K}(X)$ est le corps des fractions rationnelles à coefficients dans $\mathbb{K}$.
   (a) Justifier le fait que la transposée $C(X)$ de la matrice des cofacteurs de $A - XI_n$ s'écrit :
$$C(X) = \sum_{k=0}^{n-1} C_k X^k$$
   où les C_k sont des éléments de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$.
   (b) En notant $P_u(X) = \sum_{k=0}^{n} a_k X^k$, montrer que :
$$\begin{cases} AC_0 = a_0 I_n \\ AC_k - C_{k-1} = a_k I_n \ \ (1 \leq k \leq n-1) \\ -C_{n-1} = a_n I_n \end{cases}$$
   (c) En déduire que $P_A(A) = \sum_{k=0}^{n} a_k A^k = 0$ et $P_u(u) = 0$.
7. On propose ici une deuxième démonstration du théorème de Cayley-Hamilton pour u non nul (pour $u = 0$ c'est clair).
On se donne un vecteur non nul $x \in E$ et on désigne par E_x le sous espace vectoriel de E engendré par $\left\{u^k(x) \mid k \in \mathbb{N}\right\}$ (sous espace cyclique engendré par x).
   (a) Soit p_x le plus petit entier strictement positif tel que le système $\mathcal{B}_x = \left\{u^k(x) \mid 0 \leq k \leq p_x - 1\right\}$ soit libre. Montrer que $\mathcal{B}_x$ est une base de E_x.
   (b) Justifier l'existence d'un polynôme :
$$\pi_x(X) = X^{p_x} - \sum_{k=0}^{p_x-1} a_k X^k$$
   tel que $u^{p_x}(x) = \sum_{k=0}^{p_x-1} a_k u^k(x)$, puis montrer que π_x est le polynôme minimal et $(-1)^{p_x}\pi_x$ le polynôme caractéristique de la restriction de u à E_x.
   (c) En déduire que $P_u(u) = 0$.
8. Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ une matrice réelle. Cette matrice est aussi une matrice complexe. En désignant respectivement par $\pi_{A,\mathbb{R}}$ et $\pi_{A,\mathbb{C}}$ le polynôme minimal de A dans $\mathbb{R}[X]$ et $\mathbb{C}[X]$, montrer que $\pi_{A,\mathbb{R}} = \pi_{A,\mathbb{C}}$
9. Montrer que si $\mathbb{L}$ est une extension du corps $\mathbb{K}$, A une matrice dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, $\pi_{A,\mathbb{K}}$ et $\pi_{A,\mathbb{L}}$ le polynôme minimal de A dans $\mathbb{K}[X]$ et $\mathbb{L}[X]$ respectivement,alors $\pi_{A,\mathbb{K}} = \pi_{A,\mathbb{L}}$.
10. Montrer que les valeurs propres de u sont les racines de π_u.
11. Montrer que si P_u est scindé sur $\mathbb{K}$ avec :
$$P_u(X) = (-1)^n \prod_{k=1}^{p} (X - \lambda_k)^{\alpha_k},$$

où les α_k sont des entiers naturels non nuls et les λ_k des scalaires deux à deux distincts, alors :

$$\pi_u(X) = \prod_{k=1}^{p} (X - \lambda_k)^{\beta_k}$$

avec $1 \leq \beta_k \leq \alpha_k$.

12. Montrer que si F est un sous-espace vectoriel de E stable par u, alors le polynôme minimal de la restriction de u à F divise celui de u.
13.
    (a) Montrer que u est diagonalisable si, et seulement si, il est annulé par un polynôme scindé à racine simple.

    (b) En déduire que si que si u est diagonalisable et F un sous-espace vectoriel de E stable par u, alors la restriction de u à F est un endomorphisme de F diagonalisable.
14. Montrer que si u, v sont deux endomorphismes de E qui sont diagonalisables et qui commutent, il existe alors une base commune de diagonalisation.

– II – Endomorphismes nilpotents

On dit qu'un endomorphisme v est nilpotent s'il existe un entier q strictement positif tel que $v^{q-1} \neq 0$ et $v^q = 0$. On dit que q est l'indice de nilpotence de v.

1. Montrer que si $v \in \mathcal{L}(E)$ est nilpotent, alors 0 est valeur propre de v et $\mathrm{Tr}(v) = 0$.
2. Montrer que, pour $\mathbb{K}$ algébriquement clos, v est nilpotent si, et seulement si, 0 est la seule valeur propre de v. Que se passe-t-il pour $\mathbb{K}$ non algébriquement clos ?
3. On suppose le corps $\mathbb{K}$ de caractéristique nulle (ce qui signifie que le morphisme d'anneaux $k \mapsto k \cdot 1$ de $\mathbb{Z}$ dans $\mathbb{K}$ est injectif, ce qui est encore équivalent à dire que l'égalité $k\lambda = 0$ dans $\mathbb{K}$ avec $k \in \mathbb{Z}$ et $\lambda \in \mathbb{K}^*$ équivaut à $k = 0$).
   Montrer qu'un endomorphisme v est nilpotent si, et seulement si, $\mathrm{Tr}\left(v^k\right) = 0$ pour tout k compris entre 1 et n.
4. On suppose le corps $\mathbb{K}$ de caractéristique nulle et algébriquement clos.
   Montrer que si v est tel que $\mathrm{Tr}\left(v^k\right) = 0$ pour tout k compris entre 1 et $n-1$, il est alors nilpotent ou diagonalisable inversible.
5. Montrer que si $(v_i)_{1 \leq i \leq n}$ est une famille d'endomorphismes nilpotents qui commutent deux à deux ($n = \dim(E)$), alors $\prod_{i=1}^{n} v_i = 0$.
6. Montrer que si v, w sont deux endomorphismes nilpotents qui commutent, alors $v + w$ est nilpotent.

– III – Décomposition de Dunford-Schwarz

En utilisant les notations de **I.11** les sous espaces vectoriels $N_k = \ker(u - \lambda_k Id)^{\alpha_k}$ sont les sous-espaces caractéristiques de u (comme N_k contient l'espace propre $\ker(u - \lambda_k Id)$, il n'est pas réduit à $\{0\}$).

1. En supposant que P_u est scindé sur $\mathbb{K}$, montrer que :

    (a) $E = \bigoplus_{k=1}^{p} N_k$.

(b) $N_k = \ker(u - \lambda_k Id)^{\beta_k}$, pour tout $k \in \{1, 2, \cdots, p\}$.
(c) λ_k est la seule valeur propre de la restriction de u à N_k.
(d) $\dim(N_k) = \alpha_k$.
(e) La restriction de $u - \lambda_k Id$ à N_k est nilpotente d'indice β_k.

2. On suppose que le polynôme caractéristique de u est scindé sur $\mathbb{K}$. Montrer qu'il existe un unique couple (d, v) d'endomorphismes de E tel que d soit diagonalisable, v soit nilpotent, d et v commutent et $u = d + v$ (théorème de Dunford-Schwarz). On vérifiera que d et v sont des polynômes en u et que les valeurs propres de d sont celles de u.
3. Soit u l'endomorphisme de $\mathbb{K}^4$ de matrice :

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

dans la base canonique.

(a) Ecrire la décomposition de Dunford-Schwarz de u.
(b) En déduire un calcul de u^r pour tout entier r strictement positif.

4. On suppose que $\mathbb{K} = \mathbb{C}$ et $\lambda_1, \cdots, \lambda_p$ sont les valeurs propres deux à deux distinctes de u dans $\mathbb{C}$.
On note $\rho(u) = \max\limits_{1 \leq k \leq p} |\lambda_k|$ le rayon spectral de u.
Dans un premier temps, on se donne une norme $x \mapsto \|x\|$ sur E et on lui associe la norme sur $\mathcal{L}(E)$ définie par :

$$\forall v \in \mathcal{L}(E), \ \|v\| = \sup_{x \in E \setminus \{0\}} \frac{\|v(x)\|}{\|x\|}$$

On rappelle qu'une telle norme est sous-multiplicative dans le sens où $\|v \circ w\| \leq \|v\| \|w\|$ pour tous v, w dans $\mathcal{L}(E)$.

(a) Montrer que :

$$\forall k \geq 1, \ \rho(u) \leq \left\|u^k\right\|^{\frac{1}{k}}$$

(b) On suppose que u est diagonalisable. Montrer qu'il existe une constante réelle $\alpha > 0$ telle que :

$$\forall k \geq 1, \ \left\|u^k\right\|^{\frac{1}{k}} \leq \alpha^{\frac{1}{k}} \rho(u)$$

et en déduire que :

$$\rho(u) = \lim_{k \to +\infty} \left(\left\|u^k\right\|^{\frac{1}{k}}\right).$$

(c) En utilisant la décomposition de Dunford-Schwarz $u = d + v$, montrer qu'il existe une constante réelle $\beta > 0$ telle que :

$$\forall k \geq n, \ \left\|u^k\right\| \leq \beta k^n \left\|d^{k-n}\right\|$$

et en déduire que :

$$\rho(u) = \lim_{k \to +\infty} \left(\left\|u^k\right\|^{\frac{1}{k}}\right).$$

(d) Montrer que $\rho(u) = \lim\limits_{k \to +\infty} \left(\left\|u^k\right\|^{\frac{1}{k}}\right)$ où $v \mapsto \|v\|$ est une norme quelconque sur $\mathcal{L}(E)$.

5. Montrer que la série $\sum u^k$ est convergente dans $\mathcal{L}(E)$ si, et seulement si, $\rho(u) < 1$. En cas de convergence de $\sum u^k$, montrer que $Id - u$ est inversible d'inverse $\sum\limits_{k=0}^{+\infty} u^k$.

– IV – Exponentielle d'un endomorphisme (pour $\mathbb{K} = \mathbb{C}$)

On suppose que $\mathbb{K} = \mathbb{C}$ et $v \mapsto \|v\|$ est une norme sur $\mathcal{L}(E)$.

1. Justifier, pour tout $v \in \mathcal{L}(E)$, la définition de l'endomorphisme e^v par :

$$e^v = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{1}{k!} v^k.$$

On définit de manière analogue l'exponentielle d'une matrice $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ par :

$$e^A = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{1}{k!} A^k$$

et on vérifie facilement que si A est la matrice de v dans une base $\mathcal{B}$ de E, alors e^A est la matrice de e^v dans cette base.

2. Montrer que, pour tout $v \in \mathcal{L}(E)$, on $\det(e^v) = e^{\operatorname{Tr}(v)}$ et e^v est inversible.
3. Calculer, pour tout réel θ l'exponentielle de la matrice $A_\theta = \begin{pmatrix} 0 & -\theta \\ \theta & 0 \end{pmatrix}$.
4. Montrer que si v est diagonalisable, il en est alors de même de e^v et exprimer les valeurs propres de e^v en fonctions de celles de v.
5. Montrer que, pour tout $v \in \mathcal{L}(E)$, la fonction $\varphi : t \mapsto e^{tv}$ est de classe $\mathcal{C}^1$ de $\mathbb{R}$ dans $\mathcal{L}(E)$ et calculer sa dérivée.
6. Montrer que, pour tout $v \in \mathcal{L}(E)$, e^v est inversible d'inverse e^{-v}.
7. Soient v, w dans $\mathcal{L}(E)$. Montrer que v et w commutent si, et seulement si, $e^{t(v+w)} = e^{tv}e^{tw}$ pour tout réel t.
8. En utilisant la décomposition de Dunford-Schwarz $u = d + v$, montrer que :

$$e^u = e^d e^v = e^d \sum_{k=0}^{q} \frac{1}{k!} v^k$$

où $q \geq 1$ est l'indice de nilpotence de v.

9. Montrer que si $u = d + v$ est la décomposition de Dunford-Schwarz de u, alors celle de e^u est donnée par :

$$e^u = e^d + e^d(e^v - Id),$$

avec e^d diagonalisable et $e^d(e^v - I_n)$ nilpotente.

10. Montrer que u est diagonalisable si, et seulement si, e^u est diagonalisable.
11. Déterminer toutes les solutions dans $\mathcal{L}(E)$ de l'équation $e^u = Id$.

– V – Endomorphismes semi-simples

On dit que $u \in \mathcal{L}(E)$ est semi-simple si tout sous-espace vectoriel de E stable par u admet un supplémentaire stable par u.

1. On suppose que le corps $\mathbb{K}$ est algébriquement clos.
   Montrer que $u \in \mathcal{L}(E)$ est semi-simple si, et seulement si, il est diagonalisable.
2. Montrer que si u est semi-simple, son polynôme minimal est alors sans facteurs carrés dans sa décomposition en facteurs irréductibles dans $\mathbb{K}[x]$ (i. e. $\pi_u = \prod_{k=1}^{p} P_k$, où les P_k sont des polynômes irréductibles deux à deux distincts dans $\mathbb{K}[x]$).
3. On suppose que π_u est irréductible dans $\mathbb{K}[x]$. On sait alors que $\mathbb{L} = \dfrac{\mathbb{K}[x]}{(\pi_u)}$ est un corps.
   (a) Montrer que l'espace vectoriel E peut être muni d'une structure de $\mathbb{L}$-espace vectoriel avec la multiplication externe définie par :
   $$\overline{P} \cdot x = P(u)(x)$$
   pour tout $\overline{P} \in \mathbb{L}$ et tout $x \in u$.
   (b) Montrer que F est un $\mathbb{K}$-sous-espace vectoriel de E stable par u si, et seulement si, F est un $\mathbb{L}$-sous-espace vectoriel de E.
   (c) En déduire que u est semi-simple.
4. Montrer que si le polynôme minimal de u est sans facteurs carrés dans sa décomposition en facteurs irréductibles dans $\mathbb{K}[x]$, alors u est semi-simple.
5. Montrer que si u est semi-simple, alors pour tout sous-espace F de E stable par u, la restriction de u à F est semi-simple.
6. Quels sont les endomorphismes nilpotents de u qui sont semi-simples ?
7. On suppose que $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$. Montrer qu'il existe un unique couple (s, v) d'endomorphismes de E tel que s soit semi-simple, v soit nilpotent, d et s commutent et $u = s + v$ (théorème de Dunford-Schwarz).