Un théorème de convergence dominée
pour les fonctions continues par morceaux

1. Soient $J = [\alpha, \beta]$ un segment avec $\alpha < \beta$ et f une fonction continue par morceaux sur J à valeurs réelles positives.
   Montrer que, pour tout réel $\varepsilon > 0$, on peut trouver deux fonctions g et h continues sur J telles que :
   $$0 \leq g \leq f \leq h \text{ et } \int_\alpha^\beta (f(x) - g(x))\, dx < \varepsilon,\ \int_\alpha^\beta (h(x) - f(x))\, dx < \varepsilon.$$
2. Montrer que si $(F_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite décroissante de fermés non vides dans $J = [\alpha, \beta]$, alors l'intersection $F = \bigcap_{n\in\mathbb{N}} F_n$ est un fermé non vide.
3. Soient $J = [\alpha, \beta]$ un segment avec $\alpha < \beta$, $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de fonctions continues par morceaux sur J à valeurs réelles positives et f une fonction continue par morceaux sur J à valeurs réelles positives telles que :
   $$\forall x \in J,\ f(x) \leq \sum_{n=0}^{+\infty} f_n(x)$$
   (la somme des séries numériques considérées étant dans $[0, +\infty]$).
   On se donne un réel $\varepsilon > 0$, on désigne par g et h_n, pour $n \in \mathbb{N}$, des fonctions continues sur J telles que :
   $$0 \leq g \leq f,\ 0 \leq f_n \leq h_n \text{ et } \int_\alpha^\beta (f(x) - g(x))\, dx < \varepsilon,\ \int_\alpha^\beta (h_n(x) - f_n(x))\, dx < \frac{\varepsilon}{2^n}$$
   et pour tout entier $n \in \mathbb{N}$, on note :
   $$F_n = \left\{ x \in J \mid \sum_{k=0}^{n} h_k(x) \leq g(x) - \varepsilon \right\}$$
   (a) Montrer que $(F_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite décroissante de fermés de $\mathbb{R}$ d'intersection vide.
   (b) En déduire qu'il existe un entier m tel que $F_m = \emptyset$.
   (c) En déduire que :
   $$\int_\alpha^\beta f(x)\, dx \leq \sum_{n=0}^{+\infty} \int_\alpha^\beta f_n(x)\, dx$$
   (la somme de la série numérique considérée étant dans $[0, +\infty]$).
4. Soit $I = [a, b[$ un intervalle réel avec $-\infty < a < b \leq +\infty$. On se donne une suite $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de fonctions continues par morceaux sur I à valeurs réelles telle que :
   - la série de fonctions $\sum f_n$ converge simplement sur I vers une fonction f continue par morceaux ;
   - pour tout $n \in \mathbb{N}$ l'intégrale $\int_a^b f_n(x)\, dx$ est absolument convergente ;
   - la série numérique $\sum \int_a^b |f_n(x)|\, dx$ est convergente.

   Montrer alors que l'intégrale $\int_a^b f(x)\, dx$ est absolument convergente et que :
   $$\int_a^b f(x)\, dx = \sum_{n=0}^{+\infty} \int_a^b f_n(x)\, dx$$
   (théorème d'intégration terme à terme).

5. Soit $I = [a, b[$ un intervalle réel avec $-\infty < a < b \leq +\infty$. On se donne une suite $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de fonctions continues par morceaux sur I à valeurs réelles positives telle que :
   - la suite $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge simplement sur I vers la fonction nulle ;
   - il existe une fonction φ continue par morceaux sur J à valeurs réelles positives telle l'intégrale $\displaystyle\int_a^b \varphi(x)\,dx$ est absolument convergente et $0 \leq f_n \leq \varphi$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

   Nous allons alors montrer que $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \int_a^b f_n(x)\,dx = 0$.

   Pour ce faire on construit une suite $(g_n)_{n\in\mathbb{N}}$ telle que la série $\sum (g_n - g_{n+1})$ vérifie les conditions de la question précédente.

   (a) Pour $n \in \mathbb{N}$ fixé, on définit la suite de fonctions $(f_{n,p})_{p\geq n}$ par :

   $$\forall p \geq n,\ f_{n,p} = \max_{n\leq k\leq p} (f_k)$$

   i. Montrer que $(f_{n,p})_{p\geq n}$ est une suite croissante de fonctions continues par morceaux sur I.

   ii. Montrer que $f_{n+1,p} \leq f_{n,p}$ pour tout $p \geq n+1$

   iii. Justifier la convergence des intégrales $I_{n,p} = \displaystyle\int_a^b f_{n,p}(x)\,dx$ pour tout $p \geq n$ et montrer que la suite $(I_{n,p})_{p\geq n}$ est convergente. On notera I_n sa limite.

   (b) Justifier l'existence d'une suite strictement croissante d'entiers $(p_n)_{n\in\mathbb{N}}$ telle que :

   $$\forall n \in \mathbb{N},\ I_{n,p_n} \geq I_n - \frac{1}{2^n}.$$

   On note $g_n = f_{n,p_n}$.

   i. Montrer que la série $\sum (g_n - g_{n+1})$ converge simplement sur I vers g_0.

   ii. Montrer que $|g_{n+1} - g_n| \leq 2\left(f_{n,p_{n+1}} - f_{n,p_n}\right) + g_n - g_{n+1}$ (on peut utiliser $\max(0, a) = \dfrac{a + |a|}{2}$).

   (c) Conclure en utilisant $0 \leq f_n \leq g_n = \displaystyle\sum_{k=n}^{+\infty} (g_k - g_{k+1})$.

6. Déduire de ce qui précède le théorème de convergence dominée :
   si $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite de fonctions continues par morceaux sur $I = [a, b[$ à valeurs réelles telle que :
   - la suite $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge simplement sur I vers une fonction f continue par morceaux ;
   - il existe une fonction φ continue par morceaux sur J à valeurs réelles positives telle l'intégrale $\displaystyle\int_a^b \varphi(x)\,dx$ est absolument convergente et $|f_n| \leq \varphi$ pour tout $n \in \mathbb{N}$;

   alors les fonctions f_n et f sont absolument intégrables sur I avec :

   $$\int_a^b f(x)\,dx = \lim_{n\to+\infty} \int_a^b f_n(x)\,dx.$$