Agrégation interne 2008, épreuve 1

Notations

On désigne par $\mathbb{C}$ le corps des nombres complexes.

Soit E un $\mathbb{C}$-espace vectoriel de dimension finie. On désigne par E^* l'espace vectoriel dual de E. On désigne par $\mathrm{End}\,(E)$ l'algèbre des endomorphismes de E et par $\mathrm{GL}\,(E)$ le groupe des endomorphismes inversibles de E. On note 1_E l'application identique de E.

Si u est un endomorphisme de E, on note ${}^tu$ l'endomorphisme de E^* transposé de u ; si X est une partie de $\mathrm{End}\,(E)$, on note ${}^tX$ l'ensemble des transposés des éléments de X.

Soit u une application linéaire d'un espace vectoriel E dans un espace vectoriel E et soit x un vecteur de E. Pour alléger les notations, il nous arrivera d'écrire ux pour désigner l'image $u\,(x)$ du vecteur x par l'application u.

Soit n un entier ≥ 1 ; on désigne par $\mathcal{M}_n\,(\mathbb{C})$ l'algèbre des matrices carrées complexes à n lignes et n colonnes. On note $E_{i,j}$ la matrice de $\mathcal{M}_n\,(\mathbb{C})$ dont tous les coefficients sont nuls excepté celui de la i-ème ligne et j-ème colonne qui est égal à 1. On note $\mathrm{GL}\,(n, \mathbb{C})$ le groupe des matrices inversibles et 1_n la matrice unité de $\mathcal{M}_n\,(\mathbb{C})$.

Soient $\mathcal{A}$ et $\mathcal{B}$ deux $\mathbb{C}$-algèbres possédant chacune un élément unité ; un *morphisme unitaire* d'algèbres de $\mathcal{A}$ dans $\mathcal{B}$ est une application $\mathbb{C}$-linéaire qui préserve les produits et les éléments unités.

Les deux premières parties sont indépendantes. La sixième partie est indépendante des précédentes.

Partie I

1. Soit W un $\mathbb{C}$-espace vectoriel de dimension finie. Soient $p_1, \cdots, p_n$ des endomorphismes de W. Pour $i = 1, \cdots, n$, on note W_i l'image de p_i. Démontrer que les conditions suivantes sont équivalentes :

   (i) L'espace vectoriel W est somme directe des sous-espaces W_i et, pour $i = 1, \cdots, n$, p_i est le projecteur d'image W_i parallèlement à la somme directe des W_j, $j \neq i$.

   (ii) Pour $i = 1, \cdots, n$, on a $p_i^2 = p_i$; pour $j \neq i$, on a $p_i p_j = 0$; et on a $p_1 + \cdots + p_n = 1_W$.

2. Soit toujours W un $\mathbb{C}$-espace vectoriel de dimension finie, soit n un entier ≥ 1 et soit $\rho : M_n\,(\mathbb{C}) \to \mathrm{End}\,(W)$ un morphisme unitaire d'algèbres.

   (a) Pour $i = 1, \cdots, n$, on note p_i l'endomorphisme $\rho\,(E_{i,i})$. Démontrer que les endomorphismes p_i satisfont à la condition (ii) de la question **I.1.**

   (b) Pour $i = 1, \cdots, n$, on note W_i l'image de p_i. Démontrer que la restriction de $\rho\,(E_{i,j})$ à W_j induit un isomorphisme de W_j sur W_i.

   (c) Dans la suite de cette question, ou fixe une base $(w_1, \cdots, w_r)$ de l'espace vectoriel W_1. On pose
   $$v_1 = w_1,\ v_2 = \rho\,(E_{2,1})\,w_1, \cdots,\ v_n = \rho\,(E_{n,1})\,w_1.$$
   Démontrer que la famille $(v_1, \cdots, v_n)$ est libre et que, pour tous entiers s, t et k compris entre 1 et n, on a
   $$\rho\,(E_{s,t})\,v_k = \delta_{t,k} v_s,$$
   où le symbole de Kronecker $\delta_{t,k}$ vaut 1 lorsque $t = k$, et vaut 0 sinon.

   (d) Plus généralement, pour $1 \leq j \leq r$, on note V_j le sous-espace vectoriel de W engendré par les vecteurs $\rho\,(E_{k,1})\,w_j$, pour $k = 1, \cdots, n$. Démontrer que W est somme directe des sous-espaces V_j, $1 \leq j \leq r$.

(e) Démontrer qu'il existe une base de l'espace vectoriel W dans laquelle, pour toute matrice $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$, la matrice de l'endomorphisme $\rho(M)$ est la matrice diagonale par blocs :

$$\operatorname{diag}(M, \cdots, M) = \begin{pmatrix} M & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & M & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & M \end{pmatrix}.$$

Partie II

Dans cette partie, on désigne par E un $\mathbb{C}$-espace vectoriel de dimension finie. On dit qu'une partie X de $\operatorname{End}(E)$ est *irréductible* si les seuls sous-espaces vectoriels de E stables par tous les éléments de X sont $\{0\}$ et E. On désigne par $\mathcal{A}$ une sous-algèbre irréductible de $\operatorname{End}(E)$ qui contient 1_E, et on se propose de démontrer qu'elle est égale à $\operatorname{End}(E)$.

1. Soient u et v des éléments de $\operatorname{End}(E)$ qui commutent entre eux. Démontrer que tout sous-espace propre de l'un est stable par l'autre.
2. Soit X une partie irréductible de $\operatorname{End}(E)$. Démontrer que l'ensemble des endomorphismes de E qui commutent à tous les éléments de X est l'ensemble des endomorphismes scalaires.
3. Rappelons que $\mathcal{A}$ est une sous-algèbre irréductible de $\operatorname{End}(E)$ contenant 1_E. Démontrer que ${}^t\mathcal{A}$ est une sous-algèbre irréductible de $\operatorname{End}(E^*)$.
4. Soit x un vecteur non nul de E. Préciser à quoi est égal le sous-espace vectoriel $\mathcal{A}x$ de E.
5. Soit $u \in \operatorname{End}(E)$ un endomorphisme de rang 1. Démontrer qu'il existe un vecteur y de E et une forme linéaire $\ell \in E^*$ tels que l'on ait $u(x) = \ell(x)\, y$ pour tout $x \in E$.
6. Démontrer que, si l'algèbre $\mathcal{A}$ contient un endomorphisme de rang 1, alors elle les contient tous. En déduire que l'on a alors $\mathcal{A} = \operatorname{End}(E)$.
7. Dans cette question, on suppose que $\mathcal{A}$ contient un endomorphisme u dont le rang r est ≥ 2, et on se propose de démontrer qu'il existe un endomorphisme $u' \in \mathcal{A}$, non nul, dont le rang est strictement plus petit que r.
   (a) Démontrer qu'il existe x et y dans E et v dans $\mathcal{A}$ tels que le couple de vecteurs $(u(x), u(y))$ soit libre et que l'on ait $vu(x) = y$.
   (b) Démontrer qu'il existe alors $\lambda \in \mathbb{C}$ tel que la restriction de l'endomorphisme $uv - \lambda 1_E$ à l'image $u(E)$ de u ne soit ni injective ni nulle.
   (c) Vérifier que l'endomorphisme $u' = uvu - \lambda u$ convient.
8. Démontrer finalement que $\mathcal{A} = \operatorname{End}(E)$.

Partie III

Soit n un entier ≥ 1. On appelle dérivation de $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ toute application linéaire d de $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ telle que, pour tous X et $Y \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$, on ait

$$d(XY) = d(X)\, Y + X d(Y).$$

1. Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$; démontrer que l'application d_A de $\mathcal{M}M_n(\mathbb{C})$ dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ définie par $d_A(X) = AX - XA$ est une dérivation.
2. Dans cette question, on se propose de démontrer que toute dérivation de $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ est de la forme ci-dessus.

(a) Soit $d : \mathcal{M}_n(\mathbb{C}) \to \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ une dérivation. Démontrer que l'application ρ de $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ dans $\mathcal{M}_{2n}(\mathbb{C})$ définie par :

$$\rho(X) = \begin{pmatrix} X & d(X) \\ 0 & X \end{pmatrix}$$

est un morphisme unitaire d'algèbres.

(b) Démontrer qu'il existe une matrice inversible $P = \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix}$ où A, B, C, D appartiennent à $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$, telle que l'on ait, pour tout $X \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$:

$$P\rho(X) = \begin{pmatrix} X & 0 \\ 0 & X \end{pmatrix} P.$$

(c) Conclure.

Partie IV

Soit n un entier ≥ 1. Pour toute matrice $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$, on note $\operatorname{Tr}(M)$ la trace de M, somme des coefficients diagonaux de M.

1.

(a) Démontrer que l'application ψ de $\mathcal{M}_n(\mathbb{C}) \times \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ dans $\mathbb{C}$ définie par :

$$\psi(X, Y) = \operatorname{Tr}(XY),$$

est une forme bilinéaire symétrique non dégénérée.

(b) Démontrer que, si $(X_1, \cdots, X_{n^2})$ est une base de l'espace vectoriel $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$, il existe une autre base $\left(X'_1, \cdots, X'_{n^2}\right)$ de $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ telle que, pour tous entiers i et j compris entre 1 et n^2, on ait

$$\psi\left(X_i, X'_j\right) = \delta_{i,j} \text{ (symbole de Kronecker).}$$

2. Démontrer que, pour toute matrice $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$, on a :

$$\sum_{1 \leq i \leq n^2} X_i A X'_i = \operatorname{Tr}(A)\ \mathbf{1}_n.$$

Partie V

On considère dans cette partie un sous-groupe G de $\mathrm{GL}(n, \mathbb{C})$ ayant la propriété suivante :

(P) il existe un entier $m \geq 1$ tel que l'on ait $g^m = \mathbf{1}_n$ pour tout $g \in G$.

On fixe l'entier m.

1. Démontrer que chaque élément g de G est diagonalisable. Que peut-on dire de ses valeurs propres ?
2. Démontrer que l'ensemble $\{\operatorname{Tr}(g) \mid g \in G\}$ est fini.
3. On suppose, dans cette question, que l'ensemble G, considéré comme ensemble d'endomorphismes de $\mathbb{C}^n$ (en identifiant $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ et $\operatorname{End}(\mathbb{C}^n)$), est irréductible.

(a) Démontrer que l'ensemble G contient une base de l'espace vectoriel $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$.

(b) Démontrer que l'ensemble G est fini (on pourra utiliser les questions **IV.1.** et **V.2.**).

4. Dans cette question, on ne suppose plus que l'ensemble G soit irréductible.

   (a) Démontrer qu'il existe des entiers non nuls p et q, avec $p+q=n$, et une base de l'espace vectoriel $\mathbb{C}^n$ dans laquelle chaque élément g de G s'écrit par blocs :
   $$\begin{pmatrix} T(g) & U(g) \\ 0 & V(g) \end{pmatrix}$$
   où $T(g) \in M_p(\mathbb{C})$ et $V(g) \in M_q(\mathbb{C})$.

   (b) Posons $G_1 = \{g \in G \mid T(g) = \mathbf{1}_p\}$ et $G_2 = \{g \in G \mid V(g) = \mathbf{1}_q\}$. Démontrer que G_1 et G_2 sont des sous-groupes distingués de G. Déterminer $G_1 \cap G_2$.

   (c) Soient K un groupe et H un sous-groupe de K. L'indice de H dans K est le cardinal de l'ensemble quotient K/H. Etablir le résultat général suivant : Soient K un groupe, K_1 et K_2 des sous-groupes distingués de K, tous deux d'indice fini dans K ; alors l'indice de $K_1 \cap K_2$ dans K est fini.

   (d) Conclure.

Partie VI

Soient n et m des entiers ≥ 1. Soient $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ et $B \in \mathcal{M}_m(\mathbb{C})$; on définit la matrice $A * B \in \mathcal{M}_{nm}(\mathbb{C})$ par :
$$A * B = \begin{pmatrix} a_{11}B & a_{12}B & \cdots & a_{1n}B \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ a_{n1}B & a_{n2}B & \cdots & a_{nn}B \end{pmatrix}.$$

1. Démontrer que l'application ϕ de $\mathcal{M}_n(\mathbb{C}) \times \mathcal{M}_m(\mathbb{C})$ dans $\mathcal{M}_{nm}(\mathbb{C})$ définie par $\phi(A,B) = A*B$ est bilinéaire et satisfait à :
   $$(A*B)(A'*B') = AA' * BB'$$
   pour toutes matrices $A, A' \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$, $B, B' \in \mathcal{M}_m(\mathbb{C})$.

2. Démontrer que l'image de l'application ϕ engendre l'espace vectoriel $\mathcal{M}_{nm}(\mathbb{C})$.
   On suppose désormais $n=m$.

3. Posons
   $$P = \sum_{1 \leq i,j \leq n} E_{i,j} * E_{j,i}.$$

   (a) Démontrer que l'on a $P^2 = 1_{n^2}$.

   (b) Démontrer que, pour toutes matrices $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$, on a :
   $$P(A*B)P = B*A.$$

4. Soient A et $B \in M_n(\mathbb{C})$.

   (a) Calculer la trace et le déterminant de la matrice $A*B$.

   (b) Déterminer les valeurs propres de $A*B$ en fonction de celles de A et de B.